

应用瞬时混沌强度解读混沌

罗传文

(东北林业大学林学院 哈尔滨 150040)

〔摘要〕 应用瞬时混沌强度对 Logistic 模型进行了研究,发现它具有表现混沌程度的作用;尽管它是一个随机过程,有较强的随机性,然而它对 Logistic 模型的 r 仍有很强的指示作用。定义了步数混沌强度(n -step chaometry)的概念,它更便于实际计算,而使用者并不必理会均方积分的概念。应用于研究 Henon 映射时,发现了以 21 为基数的周期窗口体系,在一个狭窄的区间内混沌与周期交替出现,其中还包含以 189 和 252 为初始周期的倍周期分岔。

〔关键词〕 Henon 映射 瞬时混沌强度 Logistic 模型 21 周期窗口 189 周期窗口 252 周期窗口

〔中图分类号〕 018 〔文献标识码〕 A 〔文章编号〕 1000-7857(2005)03-0024-04

CHAOS INTERPRETED WITH
INSTANTANEOUS CHAOMETRY

LUO Chuan-wen

(School of Forestry, Northeast Forestry University, Harbin 150040, China)

Abstract: While the Logistic model was studied with instantaneous chaometry, it is found that instantaneous chaometry can powerfully exhibit the characteristic of chaos. Though the instantaneous chaometry is a stochastic process and has a little randomness, value r of Logistic model can be shown with it. The new concept of n -step chaometry was defined, which can be easily calculated, and not involved in mean square integral. While instantaneous chaometry was applied to Henon map, the window systems based on 21 were found, chaos and periodic windows appear by turns in a narrow interval, and in which there are period doubling bifurcation based on 189 and 252.

Key Words: Henon map, instantaneous chaometry, Period Window 21, Period Window 189, Period Window 252

CLC Number: 018

Document Code: A

Article ID: 1000-7857(2005)03-0024-04

1 引言

笔者在独占球的基础上定义了均匀度,并证明了独占球的两个重要性质。均匀度、独占球总体积、独占体总体积这 3 个概念均能表达均匀性,所以,笔者使用了独占球总体积定义了混沌强度^[1-2]。但是,定义中由于使用了均方积分的概念,因而不太方便于计算。本文定义的 n 步混沌强度则没有这方面的缺点,这一定义是基于 Monte Carlo 方法的,有较强的实用性。

2 n 步混沌强度的定义

定义 1(瞬时混沌强度):设 R^k 是 k 维欧氏空间, $B \subset R^k$ 有界, f 是定义在 B 上的动力系统,设 θ 是 f 的参数向量。

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1)$$

对任意 $x_0 \in B$ 和给定的 n_0 (一般 $n_0 > 10\ 000$), 记轨道点集为: $S = (x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+n})$, 它的独占球总体积为: $C(x_0, n_0, n, \theta)$, 称它为模型(1)的瞬时混沌强度。 n_0 称为空代步数, n 称为实代步数, S 中任意一点的最近邻体称为紧邻。

对于模型(1)定义的动力系统,用 f^m 表示 f 同其自身的 m 次复合,如果 $x_0 = f^m(x_0)$, 但对一切 $0 \leq l < m$, $f^l(x_0) \neq x_0$, 则称

点 x_0 是 f 的 m 周期点。特别地,如果 $m=1$, 则称 x_0 是一个不动点。若对 $x_0 \in B$, 存在正整数 m , 使 $f^m(x_0)$ 是周期点, 则称 x_0 为最终周期点。

定理 1(周期判别定理):对于模型(1)定义的动力系统,对 $x_0 \in B$, 若它是周期点或最终周期点, 它的周期为 N , 则, 当 $n > 2N$ 时, 存在正整数 N_0 , 当 $n_0 > N_0$ 时, 有:

$$C(x_0, n_0, n, \theta) = 0$$

证明:下面的证明中, $x_i(i=0)$ 均代表 k 维向量。以下分两种情况证明。

(1) 设 $x_0 \in B$ 是周期点

注意点集: $S = (x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+n})$, 由假设有:

$$x_{n_0} = x_{n_0+N}, x_{n_0+1} = x_{n_0+N+1}, \dots, x_{n_0+l} = x_{n_0+N+l}$$

$l > 0$, 由于 $n > 2N$, 则 S 中的任意一点的足标可表示为:

$$n_0 + rN + l \quad \text{其中: } 0 \leq r, 0 \leq l < N$$

由于: $x_{n_0+rN+l} = x_{n_0+(r+1)N+l}$, 它们互为紧邻, 可见 S 中的所有点都有一个与之重合的紧邻, 故有: $C(x_0, n_0, n, \theta) = 0$

(2) 设 $x_0 \in B$ 是最终周期点

则存在 m , 使 $f^m(x_0)$ 为周期点

只要设 $N_0 = m$, 当 $n_0 > N_0$, 根据(1)的证明, 结论显然成

收稿日期: 2004-12-28

作者简介: 罗传文, 男, 1962~; 哈尔滨市和兴路 26 号东北林业大学林学院(321 信箱), 教授, 主要从事空间信息学和非线性科学研究;

E-mail: luocw-cf@nefu.edu.cn

立。

证毕。

Li-Yorke 混沌定义简述如下^[6]。

定义 2 (Li-Yorke 混沌定义): 设连续映射 $f: I \subset \mathbb{R}^l \rightarrow I$, 如果存在不可数集合 $S \subseteq I$ 并满足:

- (1) S 不含周期点;
- (2) 任给 $x_1, x_2 \in S (x_1 \neq x_2)$, 则有

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} |f^p(x_1) - f^p(x_2)| > 0$$

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} |f^p(x_1) - f^p(x_2)| = 0$$

- (3) 任给 $x_1 \in S$ 及 f 的任意周期点 $q \in I$, 有

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} |f^p(x_1) - f^p(q)| > 0$$

则称 f 在 S 上是混沌的。

定理 2 (混沌判别定理): 设 $I \subset \mathbb{R}^l, f: I \rightarrow I$ 基于 Li-Yorke 的混沌定义, 设 f 在不可数集合 B 上是混沌的, 则对任意 $x_0 \in B$, 以及任意正整数 n_0 和 n , 有: $C(x_0, n_0, n, \theta) > 0$ 。

证明: 用反证法

设存在正整数 n_0 和 n , 使 $C(x_0, n_0, n, \theta) = 0$

相应的点集为: $S = (x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+n})$

这说明每一个点有一个与之重合的紧邻, 则存在正整数 k , 使得: $x_{n_0} = x_{n_0+k}$

且假设对正整数 $i < k, x_{n_0} \neq x_{n_0+i}$

可见 x_{n_0} 为周期点, 周期为 k , 对任意正整数 j 有: $x_{n_0+jk} = x_{n_0}$

令 $x_{n_0} = x'_0, n_0 = rk - 1$, 其中: $0 \leq r, 0 \leq l < k$

注意到: $x'_{n_0+l} = x'_{rk-1+l} = x'_{0+r(k-1)+l} = x'_0$, 且 $x'_l = x'_{n_0+l}$ 仍为周期点, 对 $p > n_0$ 有:

$$|f^p(x_0) - f^p(x'_l)| = |f^{p-n_0}(x'_0) - f^{p-n_0}(x'_{n_0+1})| = |f^{p-n_0}(x'_0) - f^{p-n_0}(x'_0)| = 0$$

这与 Li-Yorke 定义的第 3 个假设相矛盾。

证毕。

定义 3 (n 步混沌强度): 设模型 (1) 在 B 上是混沌的, 对于给定的 θ 和充分大的给定的 n , 设对 $x_0 \in B$ 和充分大的 $N_0, N_1, N_1 > n_0 > N_0$, $C(x_0, n_0, n, \theta)$ 对 x_0, n_0 是一个二阶矩随机过程。对随机选取的 $x_i \in B$ 和随机选取的正整数 $n_i, N_1 > n_i > N_0 (i = 1, 2, \dots, m)$, 计算:

$$V(m, n) = \frac{1}{m} \sum C(x_i, n_i, n, \theta)$$

设 $V(m, n)$ 对 m 是均方收敛的, 其均方极限记为 $V(-, n)$, 则称 $V_n = E(V(-, n))$ 为依步数 n 的混沌强度, 简称 n 步混沌强度 (n -step chaometry), 或称为步数混沌强度。设 $V(-, n)$ 对 n 是均方收敛的, 记均方极限为 $V(-, -)$, 则称 $V = E(V(-, -))$ 为模型 (1) 在 B 上的混沌强度。

显然, $V(m, n)$ 可以看成 V_n 的一个估计。

对于不同的模型, n 的取值要先进行测算, n 的取值应足够大, 只有足够大的 n 才能使混沌模型的信息彻底地表现出来。

下面就 Logistic 模型研究瞬时混沌强度的性质。

3 瞬时混沌强度应用于 Logistic 模型

Logistic 模型表示为:

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$$

$$r \in [0, 4], x_n \in [0, 1]$$

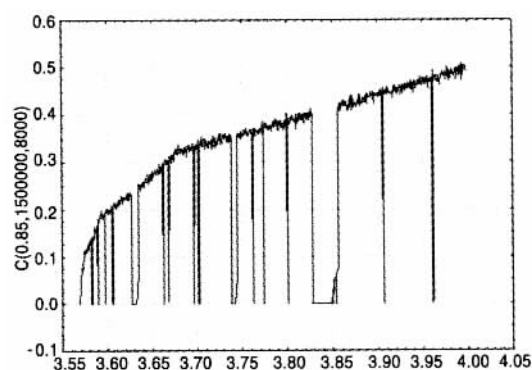


图 1 Logistic 模型的 r 与 $C(0.85, 1500000, 8000, r)$ 的关系

从图 1 可见, 瞬时混沌强度对 r 有单调递增的趋势。而且, 这种趋势对不同的窗口起着控制作用。表 1 的搜索步长为: 0.0005。

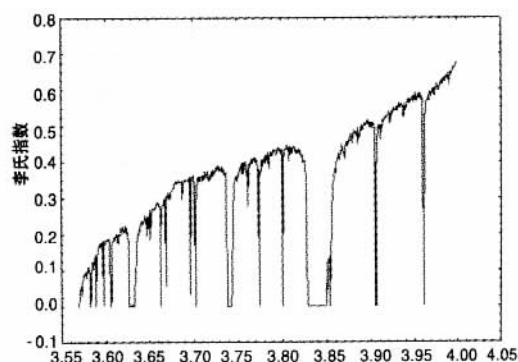


图 2 李氏指数随 r 值的变化图 (将小于 0 的指数值换为 0)

图 2 中, 李氏指数的 $x_0 = 0.85, n = 4000$ 。

从图 1 和图 2 可见, $C(x_0, n_0, n, r)$ 与李亚普诺夫指数 (简称李氏指数) 的变化规律略有相似。李氏指数局部变动幅度较大, $C(x_0, n_0, n, r)$ 比李氏指数稳定, 它的稳定性与尺度有关, 当尺度充分缩小时, 可以找到它的振荡窗口 (下文将对此有所讨论)。李氏指数的计算需要依赖于特定的模型, 而 $C(x_0, n_0, n, r)$ 则不需要。注意到李氏指数同样与轨道上的每一个点有关, 下面讨论李氏指数的相加项与独占线长度 (1 维的独占球又称为独占线) 的关系:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| / n$$

注意到因子:

$$\ln |f'(x_i)| / n \quad (2)$$

它看起来像是独占线一样, 但经过计算没有表现出相关性 (见表 2), 然而它们的加和却有相似之处, 这真是一个谜。

从表 2 可见, (2) 式与独占线长度并无关系, 然而 λ 却与独占线总长度相似。而且经过计算发现, 在一维欧氏空间中, 李氏指数和 $C(x_0, n_0, n, r)$ 对初值的依赖关系表现出平稳的特性, 这说明两者之间有着内在的联系。

图 1 中使用的搜索步长为 0.0005, 共搜索到 12 个周期窗口。 r 在 $[3.70, 3.74]$ 之间只能表现出 1 个周期窗口; 而当改变搜索尺度为 0.00005 时, 中间又出现了 4 个周期窗口 (见图 3)。

表2 对轨道上的各点计算独占线长度和(2)式进行比较

序号	x_n	独占线长度	(2)式的计算结果
0	0.8858123	2.379E-11	1.0146801
1	0.3615971	1.81E-10	-0.010502
2	0.8252465	1.773E-10	0.8439124
3	0.5155532	9.587E-10	-2.196405
4	0.8928602	1.188E-11	1.032783
5	0.3419779	9.372E-11	0.1220637
6	0.8044563	1.196E-10	0.7778566
7	0.5623545	5.669E-10	-0.807834
8	0.8798255	1.126E-10	0.999041
9	0.3779835	8.306E-10	-0.136515
10	0.8405018	6.323E-10	0.8897495
11	0.4792458	3.747E-09	-1.907922
12	0.8921852	2.958E-11	1.0310632
13	0.3438725	2.326E-10	0.1100021
14	0.806584	2.898E-10	0.7848208
15	0.5577068	1.393E-09	-0.885295
16	0.8818203	2.372E-10	1.0042792
17	0.372552	1.768E-09	-0.092962
18	0.8356579	1.467E-09	0.8754216
19	0.4909545	8.452E-09	2.738406
20	0.8934325	2.539E-12	1.0342386

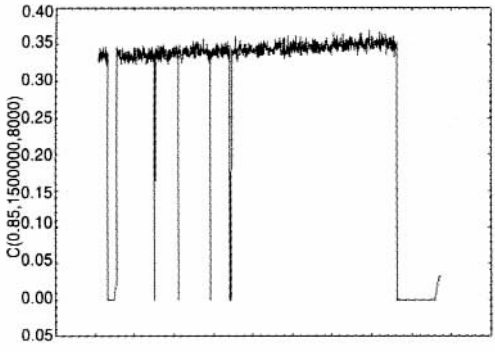


图3 窗口[3.70 3.74]上的瞬时混沌强度的变化

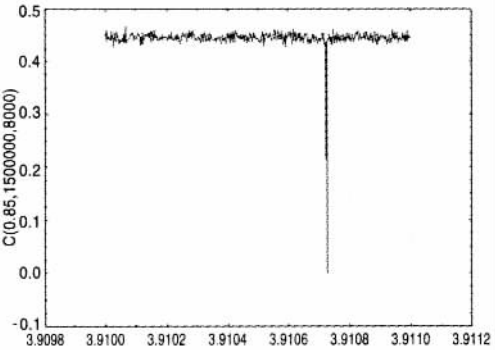


图4 窗口[3.910 3.911]上的瞬时混沌强度的变化

[3.900 3.901]的窗口内也搜索(搜索步长为0.0000025)到了周期窗口3.910725,窗口宽度小于0.000005。

由于混沌模型有遍历性,所以 $C(x_0, n_0, n, r)$ 中 x_0, n_0 的变化有一定的替代性。虽然如此,只变化一个是无法表现它的全部状态的,只有 x_0, n_0 取足够多的组合时,才能展现随机过程的全部状态。对于没有已知模型的随机序列而言(比如脑电、心电),可以假设初值是固定的,取到足够长的轨道点集后,对固定的 n 通过 n_0 的变化来获得对随机过程 $C(x_0, n_0, n, r)$ 的采样。

在实际的计算过程中发现, $C(x_0, n_0, n, r)$ 在周期窗口的端点附近有复杂的情况出现。

(1)当 r 值的变化从混沌进入周期窗口的过程中, $C(x_0, n_0, n, r)$ 出现振荡。然而振荡的窗口长度相对于周期窗口的长度而言特别短,将这一窗口称为振荡窗口。

$r=3.828426$
 $C(0.85, 3\ 000\ 000, 8\ 000, r)=0.3489961479$
 $C(0.85, 6\ 000\ 000, 8\ 000, r)=0.4532650387$
 $C(0.85, 9\ 000\ 000, 8\ 000, r)=0.4211096689$
 $C(0.85, 19\ 000\ 000, 8\ 000, r)=0.4407028793$
 $C(0.85, 16\ 000\ 000, 8\ 000, r)=0.003954728383$
 r 处于振荡窗口,该特性可用于识别周期窗口的存在。
 $r=3.828427$
 $C(0.85, 2\ 000\ 000, 8\ 000, r)=0.3544653798$
 $C(0.85, 3\ 000\ 000, 8\ 000, r)=0.004570163974$
 $C(0.85, 3\ 000\ 000, 10\ 000, r)=0.003624366987$
 $C(0.85, 4\ 000\ 000, 8\ 000, r)=0.004409192464$
 $C(0.85, 6\ 000\ 000, 8\ 000, r)=0.3737900547$
 r 处于振荡窗口,该特性可用于识别周期窗口的存在。

(2) r 值的变化从周期窗口进入混沌时, $C(x_0, n_0, n, r)$ 出现快速上升的狭窄窗口,其窗口的长度与周期窗口的长度呈比例,但宽度要小得多。这样的窗口称为增长窗口,这一现象从图1可以看到,图1的左边是最长的周期窗口。最长的周期窗口对应最长的增长窗口。这样的窗口与周期窗口相伴出现,这一特性可以用于识别周期窗口。

(3)除了周期窗口、振荡窗口、增长窗口之外的窗口,称为缓增窗口。

$r=3.8284$
 $C(0.85, 21\ 000\ 000, 8\ 000)=0.3876206747$
 $C(0.85, 19\ 000\ 000, 8\ 000)=0.3811305259$
 $C(0.85, 16\ 000\ 000, 8\ 000)=0.4259355946$
 $C(0.85, 13\ 000\ 000, 8\ 000)=0.385746692$
 $C(0.85, 23\ 000\ 000, 8\ 000)=0.3858786455$
 $C(0.85, 33\ 000\ 000, 8\ 000)=0.3865173258$
 $C(0.85, 43\ 000\ 000, 8\ 000)=0.4079826862$
 $V(7, 8\ 000)=0.394401734957143$
标准差为:0.0163841948176047
 r 处于缓增窗口。

表3 在图1的基础上加细搜索步长发现更多的周期窗口

r	$C(0.85, 1.5M, 8k, r)$	r	$C(0.85, 1.5M, 8k, r)$
3.8489	0	3.8524	5.37E-02
3.8494	0	3.8529	5.58E-02
3.8499	2.84E-02	3.8534	6.06E-02
3.8504	0	3.8539 0	0
3.8509	4.37E-02	3.8544	6.51E-02
3.8514	5.00E-02	3.8549	7.00E-02

表3说明了,在周期窗口的附近,只要缩小搜索步长,会发现很多的周期窗口。尽管如此,瞬时混沌强度还是保持了单调递增的特点。这一特点在增长窗口尤为明显。如果再加细搜索步长,搜索从混沌进入周期的过程则发现混沌强度的振荡。

4 瞬时混沌强度应用于 Henon 映射

Henon 映射可以表示为:

$$x_n=1+y_n-ax^2$$

$y_n = bx_n$

下面取 $a=1.4$, 探讨 b 的变化对模型混沌特性的影响。

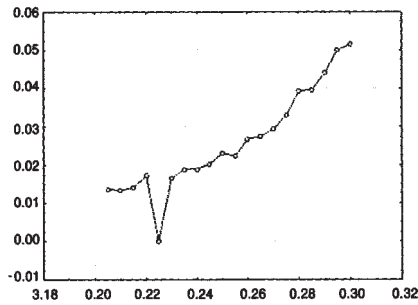


图 5 Henon 映射的参数 b 与瞬时混沌强度的关系
($x_0=0.5, y_0=0.5$)

从图 5 可见, 瞬时混沌强度在 $b \in [0.22 \ 0.24]$ 时出现了振荡, 对这一区间缩小尺度进行搜索, 果然发现了以 21 为基数的窗口系统; 在这一区间内窗口繁多, 混沌与周期窗口交错, 更为有趣的是发现了以 189 和 252 为基数的倍周期分岔窗口。

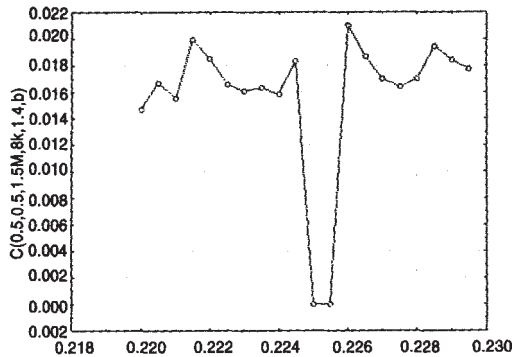


图 6 当 $a=1.4, b=0.2255$ 时, Henon 映射有周期 21 窗口

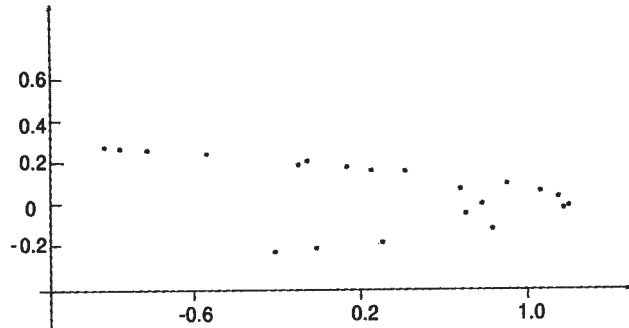


图 7 Henon 映射的周期 21 窗口 $b=0.2255$

$x=-1.0288025736, y=0.2706170323$ 为其中的 1 个周期点, 从这个周期点开始迭代就能找到其它的周期点。

从表 4 可见, 该窗口中倍周期分岔过程比 Logistic 模型要复杂得多。

$b=0.2257$ 又出现 1 个周期 21 窗口。

21 周期窗口 $[0.22492 \ 0.22496]$

42 周期窗口 $[0.22497 \ 0.22498]$

表 4 $b=0.2255$ 附近的最大的 21 周期窗口分岔谱

分岔序号	周期数	分岔位置	窗口宽度(ln)	l_{n+1}/l_n
0		0.2254700300000		
1	21	0.2255183400000	0.0000483100000	1.407224002
2	42	0.2255526700000	0.0000343300000	3.011403509
3	84	0.2255640700000	0.0000114000000	3.890784983
4	168	0.2255670000000	0.0000029300000	4.373134328
5	336	0.2255676700000	0.0000006700000	4.886943837
6	672	0.2255678071000	0.0000001371000	4.441205053
7	1 344	0.2255678379700	0.00000003087000	4.586924219
8	2 688	0.2255678447000	0.00000000673000	5.176923092
9	5 376	0.2255678460000	0.00000001300000	4.310344491
10	10 752	0.2255678463016	0.00000000030160	4.654321432
11	21 504	0.2255678463664	0.00000000006480	5.102370155
12	43 008	0.2255678463791	0.00000000001270	

84 周期窗口 $[0.22499 \ 0.22499]$

以 189 为基数的倍周期分岔

189 周期窗口 $[0.22578999994 \ 0.22579000002]$

378 周期窗口 $[0.22579000003 \ 0.22579000004]$

以 252 为基数的倍周期分岔

252 周期窗口 0.225796

其它周期窗口

84 周期窗口 0.225797

42 周期窗口 0.225798

168 周期窗口 $[0.225962 \ 0.225963]$

84 周期窗口 0.2257965

5 结论

(1) 发现了振荡窗口、增长窗口和缓增窗口, 这些窗口对没有模型的混沌序列的混沌性质的识别有很大的意义。

(2) 脑电和心电的混沌状态的识别在我国已有很多工作^[3-5], 使用混沌强度来识别也许是比较有利的。

(3) 李氏指数的每一项与独占线没有明显关系, 而加和之后却与瞬时混沌强度有较强的相关, 这方面的研究也许能找出离散模型与连续模型之间的关系。

(4) 由于瞬时混沌强度是针对于点集定义的, 它可以用于研究任意差分方程的稳定性。

(5) 已经从理论上证明, 瞬时混沌强度可以作为判别混沌的依据。但作为判别混沌程度的依据仍需要进一步的理论证明。

参考文献 (References)

- [1] 罗传文. 点空间分析——分维与均匀度 [J]. 科技导报, 2004 (10): 51~54
- [2] 罗传文. 均匀度理论在分形和混沌研究中的应用 [J]. 科技导报, 2004 (12): 31~35
- [3] 徐晓红, 谢正祥, 陈良迟, 等. 心动周期信号的混沌特征分析及应用 [J]. 中国生物医学工程学报, 1999, 18(1)
- [4] 游荣义, 陈忠, 徐慎初, 等. 一种脑电信号相空间分析的新方法 [J]. 中国生物医学工程学报, 2004, 23(4): 365~369
- [5] 杨红军, 彭凯润, 石尚金, 等. 癫痫患者脑电非线性动力学特征 [J]. 广东医学, 2003, 24(11): 1 257~1 258
- [6] 李水根. 分形[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004. 179~181

(责任编辑 苏 青)