

平均最优控制在量子系统中的应用

Applications of Averaging Optimal Control in Quantum System

东 宁/DONG Ning, 丛 爽/CONG Shuang

中国科学技术大学自动化系, 合肥 230027

Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China

[摘要] 在假设控制时间相对很大的情况下,利用平均理论对量子系统进行简化得到平均系统,对平均系统利用经典的最优控制理论进行控制场的设计,获得系统在能量达到最优情况下的控制场的解析解,避免了利用迭代求解二值边界条件的常规求解方式。最后通过一个 3 能级量子系统的实例进行仿真实验,根据实验结果得到相关结论。

[关键词] 最优控制,量子系统,平均理论

[中图分类号] TP13

[文献标识码] A

[文章编号] 1000-7857(2006)01-0023-05

Abstract: The control time is supposed to be relative large, the averaged system is obtained by using of the averaging theorem in the quantum system. The control field of averaged system is designed by classical optimal control theorem, then analytic expression for the control field is acquired within optimal energy. As a result, the normal iterative solution of a two-point boundary value problem is avoided by the use of averaging optimal control. At last, the method is used to a three-level quantum system. The some analysis are given according to the simulation test results.

Key Words: optimal control, quantum system, averaging theorem

CLC Number: TP13

Document Code: A

Article ID: 1000-7857(2006)01-0023-05

1 引言

最优控制是经典控制理论中非常重要的一个内容。目前把最优控制应用到量子系统中已成为一个非常热门的研究方向^[1]。量子系统的最优控制是指在满足一定的性能指标最优的情况下,驱动量子系统从初始态到达期望的终态^[1],或者是从初始概率分布到达期望的概率分布^[2-3],所以性能指标的选取是实现量子系统最优控制非常关键的一步。控制量子系统的用途不同,其性能指标的选取就不同,相应的最优控制律的设计也不同。目前研究量子系统的最优控制所采用的性能指标主要包括:所需的转换时间最小^[4-5];所对应控制场的 L^2 范数最小^[6-8];量子系统受外部环境的影响最小^[9-10],以及量子系统获得么正转换的效率最高^[11-12]等等。在以上的性能指标下,所采用的控制方法主要是解析与数值计算相结合的方法。此外,所有最优控制场的设计都是基于给定的量子系统的结构来完成的。

对于最优控制的设计,首先需要给出量子系统的数学模型,一个满足薛定谔方程的多能级量子系统的数学模型为^[13]:

$$i\dot{\psi} = (H_0 + H_1 u(t))\psi \quad (1)$$

其中, H_0 是系统内部的哈密顿, H_1 是系统外部的哈密顿, $u(t)$ 是控制场, 状态 ψ 可以写成列向量 $(\psi \ [c_1, c_2, \dots, c_N]^T)$ (N 表示系统的能级), $c_j (j=1, 2, \dots, N)$ 是复数, 并且满足关系: $\sum_{j=1}^N |c_j|^2 = 1$ 。

最优控制的目的是寻找到控制场 $u(t) \in L^2[0, T]$, 使得如下性能指标最小, 性能指标定义为:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt \quad (2)$$

同时, 系统 (1) 要实现在规定时间为 T 的情况下从初始态 ψ 到达期望状态的几率分布 $\{ |c_j(T)|^2 = p_j, j=1, 2, \dots, N \}^T$, 其中 $[p_1, p_2, \dots, p_N]$ 是在不同能级之间期望的几率分布。

在性能指标为 (2) 式的情况下, 根据最优控制的理论, 可以对系统 (1) 构造哈密顿函数:

$$H(\psi, \lambda, u) = \frac{1}{2} u^2(t) + i\psi^* (H_0 + H_1 u(t)) \lambda - i\lambda^* (H_0 + H_1 u(t)) \psi \quad (3)$$

其中 ψ^* 表示 ψ 的共轭转置, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T$ 是拉格朗日乘子, 而且 $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T$ 是复数。此外, 在最优控制轨迹的条件下, ψ 和 λ 满足关系: $\lambda^* \psi = 0$ 。通过变分原理可以得到如下关系:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \psi}, \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (4)$$

把 (3) 式代入 (4) 式得到:

$$\dot{\psi} = -i(H_0 + H_1 u(t))\psi \quad (5)$$

$$\dot{\lambda} = -i(H_0 + H_1 u(t))\lambda \quad (6)$$

收稿日期: 2005-10-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50375148)

作者简介: 东 宁,男,安徽合肥中国科学技术大学自动化系,硕士研究生,主要研究方向为量子力学系统可控性、状态操控及其反馈控制的研究; E-mail: dongning@mail.ustc.edu.cn

丛 爽(通讯作者),女,安徽合肥中国科学技术大学自动化系,教授,主要研究方向为先进控制策略在运动控制中的应用与实现、人工神经网络、智能控制及量子系统控制等; E-mail: scong@ustc.edu.cn

$$u(t)=i[\lambda^*H_1\psi - i\psi^*H_1\lambda] \quad (7)$$

把(7)式代入(5)和(6)式得到:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= i(H_0+H_1u(t))\psi \\ &= (H_0+iV[\lambda^*H_1\psi - i\psi^*H_1\lambda])\psi \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -i(H_0+H_1u(t))\lambda \\ &= (H_0+iH[\lambda^*H_1\psi - i\psi^*H_1\lambda])\lambda \end{aligned} \quad (9)$$

为了达到目标,需给出最优控制的边界条件

$$\psi(0)=\psi_0, |c_j(T)|=p_j, \text{Im}(c_j^*\lambda_j)=0 \quad (10)$$

其中, $\text{Im}(\cdot)$ 表示取虚数, c_j^* 表示 c_j 的共轭, 并且 $j=1, 2, \dots, N$ 。

为了分析方便,首先定义反哈密顿 Ω :

$$\Omega=i\psi^*[\lambda^*H_1\psi - i\psi^*H_1\lambda] \quad (11)$$

联合利用(5)、(6)、(7)式可以得到关系式:

$$\dot{\Omega}=-i[H_0+H_1u(t), \Omega] \quad (12)$$

所获得的控制场为:

$$u(t)=i[\lambda^*H_1\psi - i\psi^*H_1\lambda]=\text{itr}(H_1\Omega) \quad (13)$$

其中, $\text{tr}(H_1\Omega)$ 为对 $H_1\Omega$ 求迹。

从以上的求解过程中可以看出,系统(1)最优控制的求解过程过于复杂,所以,在假设时间相对很大的情况下,采用(6)中提出的平均理论对最优控制器重新进行设计:通过直接求解微分方程,得到最优控制场的解析解,避免了迭代求解二值边界条件的常规求解方式。本文详细地给出了整个求解过程,并在此基础上比较平均状态和实际状态的几率分布随时间演化的曲线,以及不同参数条件下的量子系统之间的对比,给出了相关的结论。

2 利用平均方法进行最优控制

采用平均方法的基本思想是:首先通过变换消除量子系统(1)的漂移项,然后再采用平均方法对其进行简化,由此得到近似于原系统(1)的平均系统,此时可以利用最优控制理论对所获得的平均系统进行解析求解来得到最优控制场。其具体求解过程如下。

2.1 系统(1)中漂移项的消除

令:

$$x=\exp(iH_0t)\psi \quad (14)$$

对上式两边进行微分得:

$$\dot{x}=iH_0\exp(iH_0t)\psi +\exp(iH_0t)\dot{\psi} \quad (15)$$

把(1)式代入上式得:

$$\dot{x}=iH_0\exp(iH_0t)\psi -\exp(iH_0t)(H_0+H_1u(t))\psi \quad (16)$$

化简(16)式得:

$$\dot{x}=-i\exp(iH_0t)H_1u(t)\psi \quad (17)$$

又由(14)式可以得: $\psi=\exp(-iH_0t)$, 代入(17)式得:

$$\dot{x}=-i\exp(iH_0t)H_1u(t)\exp(-iH_0t)x \quad (18)$$

为了书写方便,记为:

$$F(t)=\exp(iH_0t)H_1\exp(-iH_0t) \quad (19)$$

根据多能级量子系统内部哈密顿 H_0 的特点,可以得到如下关系:

$$F_{ij}(t)=H_{ij}\exp(i(E_i-E_j)t)=H_{ij}\exp(i\omega_{ij}t) \quad (20)$$

其中(20)式中 ω_{ij} 表示能级之间的跃迁频率。

根据以上分析,(18)式可记作:

$$\dot{x}=-iu(t)F(t)x \quad (21)$$

2.2 系统(21)简化为平均系统

平均方法的原理是:在系统微分方程式右边的函数含有小变化量函数的情况下,该函数在任一时刻的值,可以近似地由函数从该时刻到时间无穷大处的平均值来表示。

为了使得系统(21)可以利用平均方法,并且保持量子系统产

生共振,可以令控制场为:

$$u(t)=\varepsilon\left(u_0(\varepsilon\cdot t)+\sum_{i\neq j}^N\exp(i\omega_{ij}t)u_{ji}(t)\right) \quad (22)$$

其中, u_0 是实函数,并且 $u_{ji}=u_{ji}^*$, 表示很小的值。

把(22)式代入(21)式得到:

$$\dot{x}=-i\varepsilon\left(u_0(\varepsilon\cdot t)+\sum_{i\neq j}^N\exp(i\omega_{ij}t)u_{ji}(t)\right)F(t)x \quad (23)$$

由(23)式并结合(20)式可得:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -i\varepsilon\left(u_0(\varepsilon\cdot t)+\sum_{i\neq j}^N\exp(i\omega_{ij}t)u_{ji}(t)\right) \\ &\quad \times\left(\sum_{j=1}^NH_{ji}\exp(i\omega_{ij}t)x_j\right) \end{aligned} \quad (24)$$

为了利用文献[6]的平均理论,首先令 $\bar{x}$ 表示对 x 的平均值,为了书写方便,根据(24)式可以令:

$$\begin{aligned} f(x,t,\varepsilon t,\varepsilon) &= \left(u_0(\varepsilon\cdot t)+\sum_{i\neq j}^N\exp(i\omega_{ij}t)u_{ji}(t)\right) \\ &\quad \times\left(\sum_{j=1}^NH_{ji}\exp(i\omega_{ij}t)x_j\right) \end{aligned} \quad (25)$$

对(25)式求平均为:

$$f_{av}(x,\varepsilon t)=\lim_{\tau\rightarrow\infty}\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}f(x,t',\varepsilon t,0)dt' \quad (26)$$

经过计算得到(24)式的最终平均表达式为:

$$\dot{\bar{x}}=-i\varepsilon\left(H_{ji}u_0(\varepsilon\cdot t)+\bar{x}_i+\sum_{i\neq j}^NH_{ji}u_{ji}(\varepsilon t)\bar{x}_j\right) \quad (27)$$

令 $\varepsilon=\frac{1}{T}$, $s=\varepsilon t=\frac{t}{T}$, 则(27)式可以写为:

$$\frac{d\bar{x}_i}{ds}=-i\left(H_{ji}u_0(s)+\bar{x}_i+\sum_{i\neq j}^NH_{ji}u_{ji}(s)\bar{x}_j\right) \quad (28)$$

把系统(1)得到的平均表达式(28)写成向量形式,其简写形式为:

$$\frac{d\bar{x}}{ds}=-i\tilde{H}_1[u_0, u_{ji}]\bar{x} \quad (29)$$

其中,

$$\tilde{H}_1[u_0, u_{ji}]=\begin{bmatrix} H_{11}u_0(s) & H_{12}u_{21}(s) & \dots & H_{1N}u_{1N}(s) \\ H_{21}u_{21}(s) & H_{22}u_0(s) & M & H_{2N}u_{2N}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1}u_{N1}(s) & H_{N2}u_{N2}(s) & \dots & H_{NN}u_{NN}(s) \end{bmatrix} \quad (30)$$

2.3 控制器的设计

在得到原系统的平均系统(29)后,可以利用最优控制理论对系统(29)求其最优控制场,其具体过程如下。

首先将(22)式代入性能指标(2):

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T u^2(t)dt = \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(u_0(\varepsilon\cdot t) + \sum_{i\neq j}^N \exp(i\omega_{ij}t)u_{ji}(t)\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^1 \left(u_0(s) + \sum_{i\neq j}^N \exp(i\omega_{ij}st)u_{ji}(st)\right)^2 ds \\ &= \frac{1}{T} \int_0^1 \left(u_0^2(s) + \sum_{i\neq j}^N u_{ji}(s)u_{ji}(s)\right) ds + \frac{1}{T^2} B(T) \end{aligned} \quad (31)$$

由于(31)式中的第二项 $\frac{1}{T^2}B(T)$ 只与时间 T 有关,在时间 T 确定的情况下,为了使得性能指标 J 最小,可以不考虑 $\frac{1}{T^2}B(T)$ 项,只需考虑式中的第一项,所以简化性能指标的形式为:

$$J = \frac{1}{T} \int_0^1 \left(u_0^2(s) + \sum_{i\neq j}^N u_{ji}(s)u_{ji}(s)\right) ds$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^1 \left(u_0^2(s) + \sum_{i \neq j} |u_{ij}(s)|^2 \right) ds \quad (32)$$

根据(3)式对系统(29)定义哈密顿函数为:

$$H(\bar{x}_i, \bar{z}_i, u_{ij}) = \frac{1}{2} u_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} |u_{ij}|^2 - i \bar{z}^* \bar{H}_1 [u_0, u_{ij}] \bar{x} + i \bar{x}^* \bar{H}_1 [u_0, u_{ij}] \bar{z} \\ = \frac{1}{2} u_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} u_0, u_{ij} - i H_{1ij} u_{ij} (\bar{x}_i \bar{z}_i^* - \bar{z}_i \bar{x}_i^*) - i u_0 \sum_i H_{1i} (\bar{x}_i \bar{z}_i^* - \bar{z}_i \bar{x}_i^*) \quad (33)$$

同样根据变分原理的(4)式得到如下关系:

$$\frac{d\bar{x}_i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}^*} = -i \left(H_{1ij} u_0 \bar{x}_i + \sum_{j \neq i} H_{1ij} u_{ij} \bar{x}_j \right) \quad (34)$$

$$\frac{d\bar{z}_i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \bar{x}^*} = -i \left(H_{1ij} u_0 \bar{z}_i + \sum_{j \neq i} H_{1ij} u_{ij} \bar{z}_j \right) \quad (35)$$

$$u_{ij} = i H_{1ij} (\bar{x}_i \bar{z}_i^* - \bar{z}_i \bar{x}_i^*) \quad (36)$$

$$u_0 = i \sum_i H_{1i} (\bar{x}_i \bar{z}_i^* - \bar{z}_i \bar{x}_i^*) \quad (37)$$

同样可以把(36)和(37)代入(34)和(35)式得到如下关系:

$$\frac{d\bar{x}_i}{ds} = H_{1ij} \bar{x}_i \sum_k H_{1ik} (\bar{x}_k \bar{z}_k^* - \bar{z}_k \bar{x}_k^*) + \sum_{j \neq i} |H_{1ij}|^2 (\bar{x}_i \bar{z}_i^* - \bar{z}_i \bar{x}_i^*) \bar{x}_i \quad (38)$$

$$\frac{d\bar{z}_i}{ds} = H_{1ij} \bar{z}_i \sum_k H_{1ik} (\bar{x}_k \bar{z}_k^* - \bar{z}_k \bar{x}_k^*) + \sum_{j \neq i} |H_{1ij}|^2 (\bar{x}_i \bar{z}_i^* - \bar{z}_i \bar{x}_i^*) \bar{z}_i \quad (39)$$

其边界条件是:

$$\bar{x}(0) = |\psi_0\rangle, |\bar{x}_i(1)|^2 = p_i, \text{Im}(\bar{x}_i^*(1) \bar{z}_i(1)) = 0 \quad (40)$$

$$\text{为了解问题方便,令: } L = \bar{x} \bar{z}^* - \bar{z} \bar{x}^* \quad (41)$$

$$\text{则: } L_{ij} = \bar{x}_i \bar{z}_j^* - \bar{z}_j \bar{x}_i^* \quad (42)$$

定义反哈密顿矩阵 $K = K(L)$, 其中:

$$K_{ij} = |H_{1ij}|^2 L_{ij} (i \neq j) \quad (43)$$

$$K_{ii} = H_{1ij} \sum_k H_{1ik} L_{kk} \quad (44)$$

所以(38)和(39)式可以简化为:

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = K(L) \bar{x} \quad (45)$$

$$\frac{d\bar{z}}{ds} = K(L) \bar{z} \quad (46)$$

根据(45)和(46)对 L 进行微分计算如下:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{ds} &= \bar{x} \bar{z}^* \bar{x} \bar{z}^* - \bar{z} \bar{x}^* \bar{z} \bar{x}^* \\ &= K(L) \bar{x} \bar{z}^* + \bar{x} (K(L) \bar{z})^* - K(L) \bar{z} \bar{x}^* - \bar{z} (K(L) \bar{x})^* \\ &= K(L) \bar{x} \bar{z}^* - K(L) \bar{z} \bar{x}^* + \bar{x} (K(L) \bar{z})^* - \bar{z} (K(L) \bar{x})^* \\ &= K(L) L - L K(L) = [K(L), L] \end{aligned}$$

所以得到以下关系式:

$$\frac{dL}{ds} = [K(L), L] \quad (47)$$

同样可以计算得出 $\frac{dL_{ii}}{ds} = 0$, 且由(40)式可得:

$$L_{ii}(s) = L_{ii}(1) - 2i \text{Im}(\bar{x}_i^* \bar{z}_i) = 0 \quad (48)$$

根据(44)和(48)式可以得到:

$$K_{ii} = H_{1ij} \sum_k H_{1ik} L_{kk} = 0 \quad (49)$$

根据以上分析对(38)和(39)式简化, 结果为:

$$\frac{d\bar{x}_i}{ds} = \sum_{j \neq i} |H_{1ij}|^2 (\bar{x}_i \bar{z}_j^* - \bar{z}_j \bar{x}_i^*) \bar{x}_i \quad (50)$$

$$\frac{d\bar{z}_i}{ds} = \sum_{j \neq i} |H_{1ij}|^2 (\bar{x}_j \bar{z}_i^* - \bar{z}_i \bar{x}_j^*) \bar{z}_i \quad (51)$$

根据(22)、(36)、(37)、(41)以及(42)式得到最优控制场是:

$$u(t) = \frac{1}{T} \sum_{kl} H_{1kl} \exp(i\omega_{kl} t) L_{kl} \left(\frac{t}{T} \right) \quad (52)$$

实际状态与平均状态之间的近似关系为:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t} \bar{x} \left(\frac{t}{T} \right), \{ \lambda(t) \} = \frac{1}{T} e^{-iH_0 t} \bar{z} \left(\frac{t}{T} \right) \quad (53)$$

利用平均方法获得的最优控制律与直接利用最优控制理论迭代所获得的最优控制律的最大不同点在于: 后者可以直接求出获得简单的解析解, 而前者必须通过不断的迭代来求解。

3 仿真实验及其结果分析

我们以一个分子系统中的三能级量子系统的群演化为例来进行最优控制, 该量子系统的方程为:

$$i\hbar \dot{\psi} = \left(\begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{111} & H_{112} & H_{113} \\ H_{121} & H_{122} & H_{123} \\ H_{131} & H_{132} & H_{133} \end{bmatrix} u(t) \right) \psi \quad (54)$$

3.1 共振频率较小的量子系统的数值仿真

为了分析简便, 设定 $|H_{112}| = |H_{121}| = 1$, $|H_{123}| = |H_{132}| = 1$, $H_{113} = H_{131} = 0$, 而且 $H_{1ij} = H_{1ji}^*$, 同时能级之间的差设定为 $\omega_{21} = E_2 - E_1 = 1$, $\omega_{32} = E_3 - E_2 = 1.5$. 设计最优控制器使得系统在规定时间内从初始态 $\psi_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ 到达期望的能级概率分布为 $[p_1 \ p_2 \ p_3]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$.

首先根据(48)式可以得到 $L_{11} = L_{22} = L_{33} = 0$; 再由(49)式可以得到 $K_{11} = K_{22} = K_{33} = 0$; 由(42)式可以得到: $L_{ij} = -L_{ji}^*$, $i \neq j$; 由(43)式可以得到 $K_{12} = L_{12}$, $K_{21} = L_{21}$, $K_{23} = L_{23}$, $K_{32} = L_{32}$, $K_{13} = L_{13}$; 由(47)式和以上关系式可得:

$$\frac{dL_{12}}{ds} = L_{13} \quad (55)$$

$$\frac{dL_{13}}{ds} = 0 \quad (56)$$

$$\frac{dL_{23}}{ds} = -L_{12}^* L_{13} \quad (57)$$

由(56)可以得到 $L_{13} = \omega \exp(i\phi_{12} + i\phi_{23})$, (ω 是常数, ϕ_{12} , ϕ_{23} 是相位), 然后根据(55)和(57)式得到其解为:

$$L_{12}(s) = \exp(i\phi_{12}) A \cos(\omega s) \quad (58)$$

$$L_{23}(s) = -\exp(i\phi_{23}) A \sin(\omega s) \quad (59)$$

由于 $L_{12}(1) = 0$, 所以 $\omega = (n + \frac{1}{2})\pi$ (n 是整数), 根据(45)式得到微分方程为:

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = K(L) \bar{x} \quad (60)$$

其中:

$$K(L) = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\phi_{12}} \cos(\omega s) & 0 \\ -e^{-i\phi_{12}} A \cos(\omega s) & 0 & -e^{i\phi_{23}} A \sin(\omega s) \\ 0 & e^{i\phi_{23}} A \sin(\omega s) & 0 \end{bmatrix}$$

边界条件是 $\bar{x}(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\bar{x}(1) = [0 \ 0 \ e^{i\phi}]^T$, 变换变量 $\bar{x}$ 为 y , 即满足如下关系:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega s) & 0 & \sin(\omega s) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\omega s) & 0 & \cos(\omega s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ e^{i\phi_{12}} \bar{x}_2 \\ e^{i\phi_{12} + i\phi_{23}} \bar{x}_3 \end{bmatrix} \quad (61)$$

则微分方程(60)简化为:

$$\frac{dy}{ds} = \begin{bmatrix} 0 & A & \omega \\ -A & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} y \quad (62)$$

此时的边界条件根据(61)得到:

$$y(0)=[1 \ 0 \ 0]^T, y(1)=[\pm 1 \ 0 \ 0]^T \quad (63)$$

由(62)和(63)得到微分方程(62)的解为:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{A^2 + \omega^2} s) \\ (-A/\sqrt{A^2 + \omega^2}) \sin(\sqrt{A^2 + \omega^2} s) \\ (-\omega/\sqrt{A^2 + \omega^2}) \sin(\sqrt{A^2 + \omega^2} s) \end{bmatrix} \quad (64)$$

由 $y_1(1) = \pm 1$ 可得 $\cos(\sqrt{A^2 + \omega^2} s) = \pm 1$, $\sqrt{A^2 + \omega^2} = m\pi$ (m 是整数), 所以:

$$A = \sqrt{(m\pi)^2 - \omega^2} = \sqrt{(m\pi)^2 - (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2},$$

其中 m, n 是整数, 并且 $m \geq n + \frac{1}{2}$ 。

根据式(32)和(52)可以得到性能指标为 $J = 2\pi^2(m^2 - (n + \frac{1}{2})^2)$, 如

果要使得性能指标 J 最小, 则 $n=0, m=1$, 由此得到(52)式的控制场为:

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{2}{T} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \cos(\frac{\pi}{2} x \frac{t}{T}) \sin(t + \phi_{12} - \alpha_{12}) \\ & + \frac{2}{T} x \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \sin(\frac{\pi}{2} x \frac{t}{T}) \sin(1.5t + \phi_{23} - \alpha_{23}) \end{aligned} \quad (65)$$

其中, ϕ_{12}, ϕ_{23} 是任意相位, $\alpha_{ij} = \arg(V_{ij})$ 。

取时间 $T=20\pi$, 任取相位, 根据控制场(65)以及量子系统(58)进行控制系统仿真实验, 所得结果如图1所示。其中图1a为系统群几率演化曲线, 实线表示实际状态的几率曲线的变化, 虚线表示平均状态的几率曲线的变化; 图1b为控制场的曲线图。从图1可以看出, 平均状态的几率演化曲线与实际状态的几率演化曲线非常相近, 由平均理论所得到的最优控制场作用到实际量子系统中, 可以近似获得期望目标。实验中若改变作用时间, 观察曲线的变化, 如果作用时间 T 变长, 则实际曲线与平均曲线更接近, 即两者之间的误差更小; 反之则相反。

3.2 共振频率较大的量子系统的数值仿真

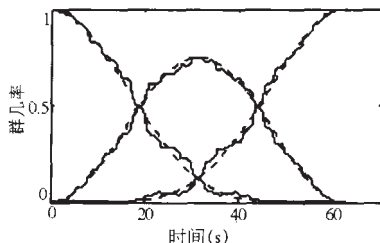


图 1a 系统群几率演化曲线

Fig. 1a Population evolution of states

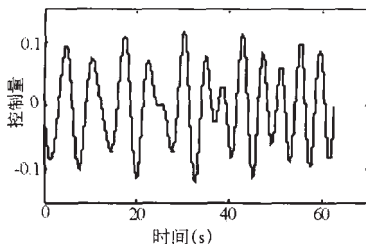


图 1b 控制场的曲线图

Fig. 1b The curve of control field

对于量子系统模型(54), 在3.1节所示的参数中, 只改变量子系统能级之间的差, 即所对应的共振频率 ω_{21} 和 ω_{32} , 令 $\omega_{21}=100$, $\omega_{32}=150$, 而其它参数保持不变, 按照同样的方法利用平均理论以及最优控制理论得到最优控制场为:

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{2}{T} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \cos(\frac{\pi}{2} x \frac{t}{T}) \sin(100t + \phi_{12} - \alpha_{12}) \\ & + \frac{2}{T} x \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \sin(\frac{\pi}{2} x \frac{t}{T}) \sin(150t + \phi_{23} - \alpha_{23}) \end{aligned} \quad (66)$$

经过仿真可得知: 所选取的作用时间 T 可以很小, 所以在时间 $T=0.3\pi$ 时, 控制场为(66)式, 其相应控制场的曲线以及概率分布演化曲线如图2所示。其中图2a为系统群几率演化曲线, 实线表示实际状态的几率曲线, 虚线表示平均状态的几率曲线。

从仿真结果图2可以看出, 与频率较小的量子系统相比, 在要求误差相同情况下, T 变小, 相应的控制场的幅值从 ± 0.1 变大到 ± 10 。

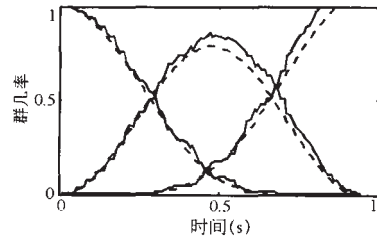


图 2a 系统群几率演化曲线

Fig. 2a Population evolution of states

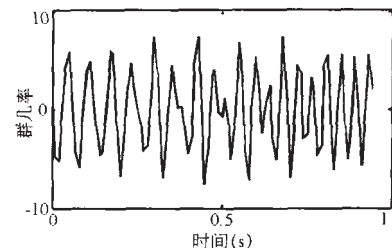


图 2b 控制场的曲线图

Fig. 2b The curve of control field

不同量子系统, 其共振频率不同, 共振频率越大, 实现给定目标所需时间就越少; 但是对同一个量子系统而言, 作用时间越长, 其平均曲线与实际曲线之间的仿真误差越接近, 此时利用平均理论和最优控制理论所得到的最优控制场, 在应用到实际物理实验中实现的幺正演化的效率越高。

4 结论

同一能级、参数不同的量子系统, 在相同的作用时间条件下, 共振频率越大, 其实际状态与平均状态之间的误差越小。参数相同的量子系统, 控制时间越短, 其实际状态与平均状态之间存在的误差越大, 反之亦然, 并且利用最优控制场所获得的终态值与期望值越接近, 即系统的幺正转换效率越高。

不过当量子系统的能级越高, 利用平均方法简化量子系统的难度越大, 相应地获得最优控制场的难度也越大, 即获得解析的最优控制场几乎不可能, 所以, 利用平均方法对量子系统进行最优控制只适用于低能级的量子系统。

参考文献 (References)

- [1] TESCH C M, DE VIVIE- RIEDLE R. Quantum computation with vibrationally excited molecules [J]. Phys.Rev.Lett., 2002, 89 (15): 157 901.
- [2] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum Computation and Quantum Information [M]. Cambridge University press, Cambridge, 2000.

电刺激小脑顶核对大鼠心肌梗死后心脏神经再生的影响

Effects of Fastigial Nucleus Electro- Stimulation on Cardiac Nerve Regeneration after Myocardial Infarction in Rats Hearts

张润峰/ZHANG Run- feng^{1,3}, 陈运贞/CHEN Yun- zhen², 唐克新/TANG Ke- xin³, 马国中/MA Guo- zhong³, 黄宣银/HUANG Xuan- yin³, 罗再贵/LUO Zai- gui³, 冯 瑾/FENG Jin³

1. 同济大学管理科学与工程博士后流动站, 上海 200092
2. 重庆医科大学附属第一医院心内科, 重庆 400016
3. 四川省绵阳市第三人民医院, 四川绵阳 621000

1. Post- Doctoral Research Center of Management Science and Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China
2. Department of Cardiology, First Affiliated Hospital, Chongqing Medical University, Chongqing 400016, China
3. Third Mianyang People 's Hospital, Mianyang 621000, Sichuan Province, China

[摘要] 探讨预先电刺激小脑顶核(FNS)对大鼠心肌梗死(MI)后心脏神经再生的干预作用。将 90 只 Wistar 大鼠随机分为: MI 组, 结扎左冠状动脉前降支(LAD); 预先电刺激小脑顶核后再予以 LAD 结扎组(FNS+MI 组); 毁损小脑顶核后电刺激该部位, 再行 LAD 结扎组(FNL+FNS+MI 组)。各组又分 MI 后 1,7,21 d 3 个时间点。另设假手术组(Sham 组)。应用免疫组织化学方法显示心脏组织胆碱乙酰转移酶(CHAT)和酪氨酸羟化酶(TH)。检测各时间点梗死区与非梗死区 TH、CHAT 阳性神经纤维分布密度, MI 组与 Sham 组相比显著减少($P<0.01$); FNS+MI 组较 MI 组显著增多($P<0.05$); FNL+FNS+MI 组与 MI 组比较无显著性差异 ($P>0.05$)。因此, 电刺激小脑顶核可增加梗死区和非梗死区心肌组织 TH、CHAT 染色阳性神经纤维密度, 促进 MI 后心脏神经纤维再生。

[关键词] 小脑顶核, 电刺激, 心肌梗死, 神经再生

[中图分类号] R542.2

[文献标识码] A

[文章编号] 1000- 7857(2006)01- 0027- 04

收稿日期: 2005- 09- 06

基金项目: 四川省科技攻关研究计划项目(04SG022- 022)

作者简介: 张润峰, 男, 上海市同济大学同济新村 563 号 402 信箱, 博士后研究人员, 主要研究方向为心血管疾病管理;

E- mail: zrf71@shu.com

- [3] BOSCAIN U, CHAMBRION T. On the K+P Problem for a Three-level Quantum System [C]. Proceeding of the 41th IEEE Conference on Decision and Control Las Vegas, Nevada USA, December 2002. 34- 39.
- [4] KHANEJA N, BROCKETT R, GLASER S. Time optimal control in spin systems[J]. Phys. Rev. A. 2001, 63: 032 308.
- [5] D'ALESSANDRO D. The optimal control problem on so(4) and its applications to quantum control [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2002,47(1):87- 92.
- [6] GRIVOPOULOS S, BAMIEH B. Optimal population transfers for a quantum system in the limit of large transfer time [C]. Proceeding of the 2004 American Control Conference Boston, Massachusetts, June 30- July 2,2004.2 481- 2 486.
- [7] BOSCAIN U, CHAMBRION T, GAUTHIER J, et al.. Optimal control in laser - induced population transfer for two- and three- level quantum systems [J]. Mathematical Physics, 2002, 43:2 107- 2 115.

- [8] SHEN L, SHI S, RABITZ H. Control of coherent wave function: A linearized molecular dynamics view[J]. Physical Chemistry, 1993, 97:8 874- 8 881.
- [9] KHANEJA N, REISS T, LUY B, GLASER S J. Optimal control of spin dynamics in the presence of relaxation [J]. Journal of Magnetic Resonance, 2003,161:1- 9.
- [10] D'ALESSANDRO D, DOBROVITSKI V. Control of a two level open quantum system [C]. Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control Las Vegas, Nevada USA, 2002. 40- 45.
- [11] PALAO JOSE 'P, KOSLOFF R. Optimal control theory for unitary transformations [J]. Physical Review A, 2003,68: 062 308.
- [12] PALAO JOSE 'P, KOSLOFF R. Quantum computing by an optimal control algorithm for unitary transformations [J]. Phys. Rev. Lett. 2002,89: 188 301.
- [13] 丛爽. 量子系统控制中状态模型的建立 [J]. 控制与决策, 2004, 19 (10): 1 105- 1 108.

(责任编辑 李慧政)

- 27 -