

求解线性方程组的投影算法

Method of Solving Linear Equations Based on Residual Space

顾阿伦/GU A-lun¹, 孙永广/SUN Yong-guang¹, 鲁红/LU Hong²

1. 清华大学核能与新能源技术研究院, 北京 100084
2. 山东日照职业技术学院计算机系, 山东日照 276826

1. Institute of Nuclear and New Energy Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China
2. Shangdong Rizhao Vocation Technology School, Rizhao 276826, Shandong Province, China

[摘要] 分析了基于残差空间求解线性方程组的一维投影算法、最速下降法和最小剩余法。定义了长轴陷阱及陷阱深度,用它们刻划了2种算法迭代过程中锯齿现象的几何特征。给出了基于残差序列的避开长轴陷阱的扰动技巧,即投影算法。数值试验表明,投影算法要优于现在流行的主要求解线性方程组算法。

[关键词] 线性方程组;投影算法;长轴陷阱;陷阱深度

[中图分类号] O241.6

[文献标识码] A

[文章编号] 1000-7857(2006)07-0041-04

Abstract: The one-dimension projection algorithm, which is the steepest descent method, based on residual space for solving linear equations is analyzed in this paper. The definitions of long axis trap and trap depth are given. The geometrical feature of the algorithm is characterized. The method of perturbation based on residual series, which keeps residuals off the long axis trap, is presented in this paper. That is the multi-dimension projection method. The numerical experimentation shows that the method is superior to the present popular dominant algorithms.

Key Words: linear equations; project algorithm; long axis trap; trap depth.

CLC Number: O241.6

Document Code: A

Article ID: 1000-7857(2006)07-0041-04

1 引言

求解线性方程组问题本是一个非常古老的数学问题,已获得了大量的研究成果,但随着科学技术的发展,求解问题的系数矩阵的规模和条件数变得越来越大。目前,求解大规模(稀疏)病态线性方程组问题已经成为科学和工程计算中最重要的,也是最基本的问题之一。

求解线性方程组主要采用2种方法:直接法和迭代法。随着问题规模的增加,直接法求解越来越难,无论从存储空间还是计算时间上都存在很大的浪费。现在对直接法的研究主要集中在三对角、三对角块、带状线性方程组的并行求解上。近20年来,求解三对角线性方程组的并行算法都是基于分治策略,即通过将三对角线性方程组分解成 ρ 个小规模问题,求解这 ρ 个小规模问题,将其结合起来得到原三对角方程组的解^[1-4]。

求解线性方程组的迭代方法包括古典迭代法、共轭梯度法和投影算法。古典迭代法包括Jacobi、Gauss-Seidel、SOR、SSOR等方法^[5]。因其收敛速度比较慢,目前迭代方法很少用于直接求解大型稀疏线性方程组问题,而是作为预条件子与其他方法相结合使用。其中与各种预条件子相结合的共轭梯度方法是求解对称正定大型稀疏线性方程组的主要方法之一。投影算法^[6]通常不要求系数矩阵具有特殊性质,因而运用比较多。近20年来流行较多的是Krylov子空间投影算法^[6-7]。Krylov子空间方法具有存储量小、计算量少并且易于并行等优点,非常适合并行求解大型稀疏线性方程组问题,而且结合预条件子的Krylov子空间迭代法,是目前求

解线性方程组的最主要方法之一。

2 残差空间的2种一维算法

本文研究的线性方程组问题如下:

$$Ax=b, \quad (1)$$

其中 $A \in R^{n \times n}$ 且是非奇异矩阵, $x \in R^n, b \in R^n$ 。

2.1 算法一

一维残差空间算法(最速下降法)的迭代方程可以写成:

$$\begin{cases} w=u-Ad, \\ d=\frac{1}{q} \frac{A^T u u^T A}{q(u^T A A^T u)}(x_s - x_{k+1}) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $u=b-Ax_k, w=b-Ax_{k+1}, x_{k+1}=x_k+d; x^*$ 是问题的精确解; q 是待定参数; x_k 和 x_{k+1} 分别是第 k 次和第 $k+1$ 次迭代的近似解; u 和 w 分别是第 k 次和第 $k+1$ 次迭代近似解的残差; d 是第 $k+1$ 次迭代获得的对近似解的修正。上述联立方程组的第二式意味着 d 正比于 $(x_s - x_{k+1})$ 在 $A^T u$ 上的投影。

算法一的残差模平方的收敛比可以表示为

$$\frac{w^T w}{u^T u} = 1 - \frac{2}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} \frac{(u^T u)(u^T D D u)}{(u^T D u)^2}, \quad (3)$$

其中: $D=AA^T$ 。为了得到最小的收敛比,可以得到

$$q = \arg\{\min_q \varphi(u, q)\}, \quad (4)$$

$$\text{其中: } \varphi(u, q) = \frac{w^T w}{u^T u} = 1 - \frac{2}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} z_1(u),$$

收稿日期: 2006-04-20

作者简介: 顾阿伦,女,清华大学核能与新能源技术研究院,讲师,主要从事能源分析、能源政策、决策对策模型及算法研究;

E-mail: gal@mail.tsinghua.edu.cn

$z_1(u) = \frac{(u^T u)(u^T D D u)}{(u^T D u)^2}$, 函数 $\varphi(u, q)$ 的图像如图 1 所示。

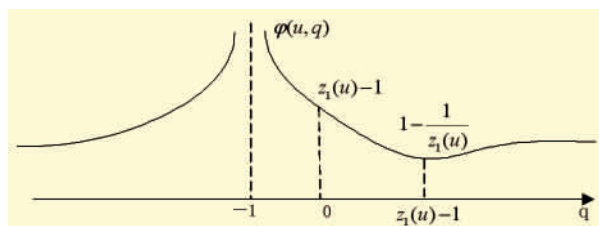


图 1 函数 $\varphi(u, q)$ 的图像

Fig. 1 Graph of function $\varphi(u, q)$

优化该函数之后有:

$$q = z_1(u) - 1, \quad (5)$$

得到最速下降法的最终迭代格式:

$$\begin{cases} w = u - \frac{(u^T D u)}{(u^T D D u)} D u, \\ d = \frac{(u^T D u)}{(u^T D D u)} A^T u \end{cases} \quad (6)$$

将式(5)代入, 得到(6)的收敛比为:

$$\frac{w^T w}{u^T u} = 1 - \frac{1}{z_1(u)} \quad (7)$$

而且得到 $w = [I - \frac{D u u^T D}{(u^T D^T D u)}] u$, 即 w 是 u 在 $D u$ 上的垂直投影。

定义 2.1: 记矩阵 D 的长轴陷阱为:

$$Trap_1 = \{v | v = \alpha (\frac{v_{\max}}{\sqrt{\omega_{\max}^2}} \pm \frac{v_{\min}}{\sqrt{\omega_{\min}^2}}), \alpha \in R, \omega_{\max}^2 \text{ 和 } \omega_{\min}^2 \text{ 分别是}$$

$$D \text{ 的最大和最小本征值}, D v_{\max} = \omega_{\max}^2 v_{\max}, D v_{\min} = \omega_{\min}^2 v_{\min}, \quad (8)$$

$$\text{且 } v_{\max}^T v_{\min} = v_{\min}^T v_{\max} = 1\}$$

定理 2.1: 若 $\forall v \in Trap_1$, 则 $z_1(v) = \sup_{u \in R^n} z_1(u)$ 。

证明: 根据定义(2.1)任取 $v = \alpha (\frac{v_{\max}}{\sqrt{\omega_{\max}^2}} \pm \frac{v_{\min}}{\sqrt{\omega_{\min}^2}})$, 代入 $z_1(u)$,

由于 $v_{\max}^T v_{\min} = 0$ 和 $v_{\max}^T v_{\max} = v_{\min}^T v_{\min} = 1$, 得:

$$\begin{aligned} z_1(v) &= \frac{(v^T v)(v^T D D v)}{(v^T D v)^2} \\ &= \frac{(\frac{1}{\omega_{\max}^2} + \frac{1}{\omega_{\min}^2})(\frac{\omega_{\max}^2}{\omega_{\max}^2} + \frac{\omega_{\min}^2}{\omega_{\min}^2})}{4} \\ &= \frac{2 + (\frac{\omega_{\max}^2}{\omega_{\min}^2} + \frac{\omega_{\min}^2}{\omega_{\max}^2})}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (\text{cond}(D) + \text{cond}^{-1}(D)). \end{aligned}$$

其中: $\text{cond}(D)$ 为矩阵 D 的条件数。证毕。

定理 2.2: 若 $u \in Trap_1$, 则由式(6)第一式确定的 $w \in Trap_1$ 。

证明: 若 $u = \alpha (\frac{v_{\max}}{\sqrt{\omega_{\max}^2}} \pm \frac{v_{\min}}{\sqrt{\omega_{\min}^2}})$, 由式(6)第一式得:

$$\begin{aligned} w &= u - \frac{(u^T D u)}{(u^T D D u)} D u \\ &= \alpha [(\frac{v_{\max}}{\sqrt{\omega_{\max}^2}} \pm \frac{v_{\min}}{\sqrt{\omega_{\min}^2}}) - \frac{2}{(\omega_{\max}^2 + \omega_{\min}^2)} (\sqrt{\omega_{\max}^2} v_{\max} \pm \sqrt{\omega_{\min}^2} v_{\min})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha [(1 - \frac{2\omega_{\max}^2}{(\omega_{\max}^2 + \omega_{\min}^2)}) \frac{v_{\max}}{\sqrt{\omega_{\max}^2}} \pm (1 - \frac{2\omega_{\min}^2}{(\omega_{\max}^2 + \omega_{\min}^2)}) \frac{v_{\min}}{\sqrt{\omega_{\min}^2}}] \\ &= \alpha [(\frac{\omega_{\min}^2 - \omega_{\max}^2}{(\omega_{\max}^2 + \omega_{\min}^2)}) \frac{v_{\max}}{\sqrt{\omega_{\max}^2}} \pm (\frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{(\omega_{\max}^2 + \omega_{\min}^2)}) \frac{v_{\min}}{\sqrt{\omega_{\min}^2}}] \\ &= \alpha (\frac{\omega_{\min}^2 - \omega_{\max}^2}{(\omega_{\max}^2 + \omega_{\min}^2)}) (\frac{v_{\max}}{\sqrt{\omega_{\max}^2}} \pm \frac{v_{\min}}{\sqrt{\omega_{\min}^2}}) \end{aligned}$$

即 $w \in Trap_1$ 。证毕。

u 空间中点 $u=0$ 对应于 x 空间中问题(1)的精确解, $\frac{v_{\max}}{\sqrt{\omega_{\max}^2}}$

和 $\frac{v_{\min}}{\sqrt{\omega_{\min}^2}}$ 分别对应 x 空间中问题 $\min_x \frac{1}{2} (Ax-b)^T (Ax-b)$ 目标函数

等值椭圆的最短轴和最长轴方向。当 $\frac{\omega_{\max}^2}{\omega_{\min}^2} \gg \omega_{\min}^2$ 时, u 空间中的 $Trap_1$ 非常靠近 $\frac{v_{\min}}{\sqrt{\omega_{\min}^2}}$ 方向, 其在 x 空间中的像就非常靠近

上述最长轴方向。定理 2.1 和定理 2.2 揭示了 $Trap_1$ 的陷阱特征, 所以 $Trap_1$ 被称为长轴陷阱。本小节的定义和定理刻画了最速下降法迭代过程中锯齿现象的几何本质。

以下将长轴陷阱的定义进行扩展。对于矩阵 $D (D=AA^T)$ 的任意 2 个本征向量 v_i (对应本征值为 ω_i^2) 和 v_j (对应本征值为 ω_j^2), 只要 $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ (必有 $v_i^T v_j = 0$), 即可定义一个长轴陷阱

$$Trap_1^{i,j} = \{v | v = \alpha (\frac{v_i}{\sqrt{\omega_i^2}} \pm \frac{v_j}{\sqrt{\omega_j^2}}), \alpha \in R\}, \quad (9)$$

及其深度

$$z_1^{i,j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [\frac{\omega_i^2}{\omega_j^2} + \frac{\omega_j^2}{\omega_i^2}], \quad (10)$$

显然 $Trap_1^{\max, \min} = Trap_1$ 和 $z_1^{\max, \min} = \sup_{u \in R^n} z_1(u)$ 。

求解问题(1)的一维残差空间算法二(最小剩余法)的迭代方程可以写成:

$$\begin{cases} w = u - A d, \\ A d = \frac{1}{q} \frac{A u u^T A A^T}{q u^T A^T A u} w \end{cases} \quad (11)$$

其中 $u = b - A x_k, w = b - A x_{k+1}, x_{k+1} = x_k + d; q$ 是待定参数; x_k 和 x_{k+1} 分别是第 k 次和第 $k+1$ 次迭代的近似解; u 和 w 分别是第 k 次和第 $k+1$ 次迭代近似解的残差; d 是第 $k+1$ 次迭代获得的对近似解的修正。 $A d$ 正比于 w 在 $A u$ 上的投影。

2.2 算法二

算法二的残差模平方的收敛比可以表示为:

$$\frac{w^T w}{u^T u} = 1 - \frac{2q+1}{(q+1)^2} \frac{(u^T A u)(u^T A^T u)}{(u^T u)(u^T A^T A u)}, \quad (12)$$

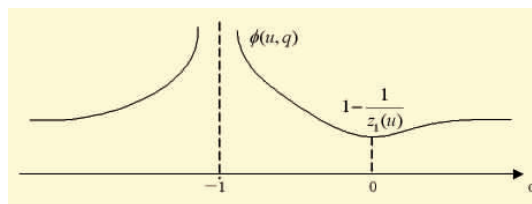


图 2 函数 $\phi(u, q)$ 的图像

Fig. 2 Graph of function $\phi(u, q)$

记为:

$$z_2(u) = \frac{(u^T u)(u^T A^T A u)}{(u^T A u)(u^T A^T A u)}, \quad (13)$$

$$\phi(u, q) = \frac{w^T w}{u^T u} = 1 - \frac{2q+1}{(q+1)^2} \frac{1}{z_2(u)}, \quad (14)$$

函数 $\phi(u, q)$ 的图像如图 2 所示。

为了得到最小的收敛比,可以得到:

$$q = \arg\{\min_q \phi(u, q)\}, \quad (15)$$

可知当 $q=0$ 时,函数 $\phi(u, q)$ 取得最小值,此时有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \phi(u, q) &= 2 \frac{q}{(q+1)^3} \frac{1}{z_2(u)} = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial q^2} \phi(u, q) &= \frac{2-4q}{(q+1)^4} \frac{1}{z_2(u)} \geq 0. \end{aligned}$$

得到该算法的最终迭代格式:

$$\begin{cases} w = u - \frac{(u^T A u)}{(u^T A^T A u)} A u, \\ d = \frac{(u^T A u)}{(u^T A^T A u)} u. \end{cases} \quad (16)$$

最后得到式(16)的收敛比为:

$$\frac{w^T w}{u^T u} = 1 - \frac{1}{z_2(u)} \quad (17)$$

$w = [I - \frac{A u u^T A^T}{(u^T A^T A u)}] u$, 即 w 是 u 在 $A u$ 上的垂直投影。

定义 2.2: 记矩阵 A 的长轴陷阱为:

$$Trap_2 = \{v | v = \alpha (\frac{v_{\max}}{\sqrt{\omega_{\max}}} \pm \frac{v_{\min}}{\sqrt{\omega_{\min}}}), \alpha \in R, \overline{\omega_{\max}} \text{ 和 } \overline{\omega_{\min}} \text{ 分别是}$$

$$A \text{ 的大和最小本征值}, A v_{\max} = \overline{\omega_{\max}} v_{\max}, A v_{\min} = \overline{\omega_{\min}} v_{\min}, \quad (18)$$

$$\text{且 } v_{\max}^T v_{\max} = v_{\min}^T v_{\min} = 1\}.$$

定理 2.3: 若 $\forall v \in Trap_2$, 则 $z_2(v) = \sup_{u \in R^n} z_2(u)$ 。

证明: 证明过程与定理 2.1 类似。证毕。

定理 2.4: 若 $u \in Trap_2$, 则由式(16)第一式确定的 $w \in Trap_2$ 。

证明: 证明过程与定理 2.2 类似。证毕。

u 空间中点 $u=0$ 对应于 x 空间问题(1)的精确解, $\frac{v_{\max}}{\sqrt{\omega_{\max}}}$

和 $\frac{v_{\min}}{\sqrt{\omega_{\min}}}$ 分别对应 x 空间问题 $\min_x \frac{1}{2} (Ax-b)^T (Ax-b)$ 目标函数

等值椭圆面的最短轴和最长轴方向。当 $\overline{\omega_{\max}} \gg \overline{\omega_{\min}}$ 时, u 空间中的

$Trap_2$ 非常靠近 $\frac{v_{\min}}{\sqrt{\omega_{\min}}}$ 方向, 其在 x 空间中的像就非常靠近上述最

长轴方向。定理 2.3 和定理 2.4 揭示了 $Trap_2$ 的陷阱特征, 所以被称为长轴陷阱。本小节的所有定义和定理刻画了最小剩余法迭代过程中锯齿现象的几何本质。

3 残差空间的投影算法

对于大规模病态问题, 最速下降法和最小剩余法的残差空间 u 中, 存在着数目众多的长轴陷阱, 其中很多陷阱的深度很大。在长轴陷阱平面上, 对于深度很大的长轴陷阱, 算法一和算法二不能使迭代点从长轴陷阱中自我摆脱; 即使迭代点远离长轴, 经过一次算法, 或者算法二过程, 迭代点也会落入长轴陷阱。必须设计出一种扰动技巧, 它能够使得每一步迭代之后, 在保证残差模不增加的情况下, 迭代点尽量重新远离长轴。

记为:

$$\begin{cases} U = (u_1, u_2, L, u_m) \in R^{n \times m}, \\ V = (A d_1, A d_2, L, A d_l) \in R^{n \times l} \end{cases} \quad (19)$$

其中 $u_i (i=1, 2, L, m)$ 是最新的 m 个近似解的残差序列, $d_j (j=1, 2, \dots, l)$ 是最新的 l 个位移序列, 且 $m=n, l=n$ 。记为:

$$\bar{u} = [I - V(V^T V)^{-1} V^T] U \alpha, \quad \alpha \in R, \quad <1> \alpha = 1,$$

其中 $V(V^T V)^{-1} V^T$ 是平行投影阵, $[I - V(V^T V)^{-1} V^T]$ 是垂直投影阵, 二者都是对称等幂矩阵, $<1> = [1, 1, \dots, 1]$, 所以, $\bar{u}$ 为 $U \alpha$ 在空间 $\text{span}\{V\}$ 上的垂直投影。构造如下优化问题

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \alpha^T U^T U \alpha, \\ \text{s.t.} \quad <1> \alpha = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

(20)的解记为:

$$\alpha = \arg\{\min_{\alpha} \alpha^T U^T U \alpha | <1> \alpha = 1, \alpha \in R^m\}, \quad (21)$$

$$\bar{u} = U \bar{\alpha}. \quad (22)$$

记为:

$$\bar{U} = \{U \alpha | <1> \alpha = 1, \alpha \in R^m\}$$

$\bar{U}$ 是张于 u_1, u_2, L, u_m 端点的 $(m-1)$ 维超平面, 一般 $m=n$ 。式(22)得到的 $\bar{u}$ 实际上就是坐标原点在 $\bar{U}$ 上的垂直投影, 随着 $(m-1)$ 维超平面的不断变化, 就可以得到不同的投影点。

若 $U^T U$ 为非奇异阵, 则(20)的目标函数是一个正定二次型, 约束是线性函数, 所以(20)是性质极好的二次凸规划问题, 其局部极值点就是全局最优点, 而且是最优解之一。

矩阵 U 的构成有很多方法, 如长度为 m 的 u_i 序列由 2 个先进先出的序列拼装而成。第一个序列长度为 s , 由式(22)补充新元素 s ; 第二个序列长度为 $\bar{u}$, 由第一个序列的最新元素经过一次一维投影算法得到(可利用算法一或者是算法二)。

将上述 2 个序列各更新一次称为一次迭代。 m, s 和 t 均为整数, 且 $m=s+t$ 。 s 和 t 可以有多种选择, 不同的选择就能够构造出不同的矩阵 U 。另外, s 和 t 的不同取值不仅会影响收敛速度, 也会直接影响迭代的计算量和存储量。

综上所述, 投影扰动技巧每一步使 $\bar{u}^T \bar{u}$ 最小, 即 $(m-1)$ 维超平面 $\bar{U}$ 上的残差最小, 而紧接的算法一使残差严格下降。因此, 投影算法得到的残差序列是一个严格下降的序列。

4 计算结果与结论

求解系数矩阵是中规模对称不定阵的问题, $n=500$ 。受计算机内存容量的限制, 选择 $A = \text{diag}[-1, 2, -3, \dots, (-1)^n n]$ 。迭代初始点 $x_0 = [0, \dots, 0]^T \in R^n$, 精确解为 $x_* = [0, \dots, 0]^T$, 右端项为 $b = A x_*$ 。本例使用投影算法(算法一; $s=2, t=1$)与广义最小剩余法 GMRES(10)方法和广义最小剩余法 GMRES(20)方法作比较。残差模收敛过程比较如图 3 所示。图 3 中投影算法得到的残差模曲线位于 GMRES(10)方法和 GMRES(20)方法的残差曲线之下。值得注意的是, 投影算法的截断长度仅为 3, 就已经优于循环长度为 20 的 GMRES 方法。

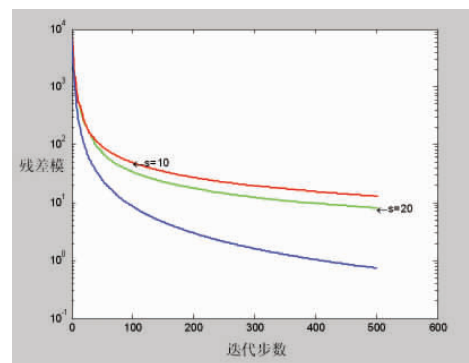


图 3 残差模收敛过程的比较

Fig. 3 Comparison of residual convergence

投影算法只涉及矩阵和向量相乘的基本运算, 存储空间小, 数值稳定性好, 且容易实行并行化。从基本原理上讲, 投影算法既

车内污染物的影响因素和测量技术研究

Study of the Influence Factors of In-car Air Pollution and its Measurement Technology

葛蕴珊/GE Yun-shan, 尤可为/YOU Ke-wei

北京理工大学机械与车辆工程学院, 北京 100081

School of Mechanical and Vehicular Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

[摘要] 车内空气污染问题已经成为对人体健康产生危害的一个重要因素,其测定结果的影响参数主要包括温度、湿度、车龄、空气交换率、通风模式和环境本底浓度等。深入讨论了这些影响参数以及国际上广泛采用的测定方法,旨在为我国目前的车内污染研究提供重要参考。

[关键词] 车内空气污染;挥发性有机化合物;空气取样/分析

[中图分类号] X820

[文献标识码] A

[文章编号] 1000-7857(2006)07-0044-04

Abstract: Air quality in auto-cabin has become a major concern to people's health. The main influence parameters that affect testing results include temperature, humidity, vehicle age, air exchange rate, ventilation mode and environmental concentration, etc. These influence parameters and testing methods are discussed in this paper in depth, for the purpose of providing important reference to our country's present research about in-vehicle air pollution.

Key Words: in-vehicle air pollution; volatile organic compounds; sample collection and analysis

CLC Number: X820

Document Code: A

Article ID: 1000-7857(2006)07-0044-04

车内空气污染已经成为危害人体健康的一个重要因素,车厢内高浓度的挥发性有机物(VOCs)会导致司乘人员头晕、恶心、记忆受损,甚至引发各种严重疾病,已经成为环境问题的社会焦点之一。因此,定性和定量研究由车内饰材料释放的VOCs引起的车内污染问题逐渐引起了人们的关注。国外文献显示,从20世纪八九十年代开始,世界各国开始注意车内污染问题,各类环保团体以及汽车公司采取了一系列措施来规范车内污染物的测量。但由于国内外均无官方的车内空气质量测量和限值标准,车内的空气质量的检测基本尚处于无法可依的状况。

基于以上原因,国家环境保护总局于2004年7月正式启动

了《车内污染物浓度限值和测量方法》国家标准的编制工作,这个标准将成为世界上第一个关于车内污染的正式官方标准。本文综述了国外在车内空气污染物浓度测量和分析方面的研究现状,旨在为我国目前的有关研究和标准制定工作提供参考。

1 车内污染的现状分析

1.1 车内污染的成因

一般而言,车内空气污染的成因主要包括以下3个方面。

1.1.1 车内装饰材料中的有害物质释放

汽车使用的黏合剂、密封胶、织物、塑料和橡胶部件、油漆涂

收稿日期:2006-04-20

作者简介:葛蕴珊,男,北京市中关村南大街5号北京理工大学汽车动力性与排放测试国家专业实验室,教授,主要研究方向为车辆污染控制;E-mail:geyunshan@bit.edu.cn

不同于经典的矩阵分裂法,也不同于目前流行的 Krylov 子空间方法。与目前流行的求解线性代数方程组的算法相同,投影算法也只需存储系数矩阵的原始形态,所以,投影算法也适合求解大规模稀疏问题。由于文章的篇幅限制,其他应用实例见笔者的其他文章。

参考文献(References)

- [1] CHAWLA M M, PASSI K. On recursive decoupling method for solving tridiagonal linear systems[J]. J Computer Math, 1991(40): 239-244.
- [2] EVANS D J, BEKAKOS M P, MARGARITIS K G. Systolic LU factorization of tridiagonal systems. Proc [J].Advances in Image

Processing, 1987(804):314-324.

- [3] SUN X H, ZHANG W. Proceeding of the International Parallel and Distributed Processing Symposium[C]. (出版者不详). 2002.
- [4] AMODIO P, BRUGNANO L. The parallel QR factorization algorithm for tridiagonal linear systems [J]. Parallel Computing. 1995(21):1097-1110.
- [5] 徐树方. 矩阵计算的理论与方法[M]. 北京:北京大学出版社, 1995.
- [6] SAAD Y. Iterative methods for sparse linear systems[M]. Boston: PWS Publishing Company, 1996.
- [7] FREUND R W, GOLUB G H, NACHTIGAL N M. Acta Numerica [M]. Cambridge: Cambridge University Press. 1991.

(责任编辑 王 芷)