

量子纯态与混合态的几何代数分析

Geometric Algebra Analysis of Quantum Pure State and Mixed State

丛 爽/CONG Shuang, 冯先勇/FENG Xian-yong

中国科学技术大学自动化系, 合肥 230027

Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China

[摘要] 采用几何代数的方法对两能级量子系统的状态进行描述与特性分析, 借助于量子系统的密度矩阵, 对量子纯态和混合态的几何表示进行了详细的推导, 对比 Bloch 矢量与几何代数的表示方法, 给出 2 种表示法之间的对应关系。

[关键词] 几何代数; 量子系统; 密度矩阵; 纯态系统; 混合态系统; Bloch 矢量

[中图分类号] O04

[文献标识码] A

[文章编号] 1000-7857(2006)10-0025-04

Abstract: In this paper, we use geometric algebra to describe the state of two levels quantum system and analysis its property. And we deduce the geometric algebra expression of quantum pure state and mixed state by making use of the density matrix. Then we can obtain the relationship of the Bloch vector and the geometric algebra description by contrasting the two descriptive methods.

Key Words: geometric algebra; quantum system; density matrix; pure state system; mixed state system; Bloch vector

CLC Number: O04

Document Code: A

Article ID: 1000-7857(2006)10-0025-04

1 引言

量子系统纯态通常用 Hilbert 空间中的矢量来表示, 即态矢, 记为 $|\psi\rangle$ 。态矢的元素均为复数, 这对我们分析量子系统是不方便的。几何代数中的量有非常直观的几何意义, 它可以用向量来代替复数, 用一些代数符号来代替矩阵和态矢, 并且可用于描述同时具有标量和有方向量的物理体系, 因而在量子系统中应用几何代数表示方法是很合适的。

几何代数有着非常广泛的应用, 在物理和工程领域已发挥了很大的作用, 由于直观性的形式使其在工程上受到青睐。几何代数是 Grassmann 代数和 Clifford 代数一个现代的发展。对于任意同维向量 a, b 和 c , 在几何代数中, 定义内积为 $a \cdot b$, 外积为 $a \wedge b$, 为了便于描述既有标量又有向量的物理体系, 引入几何积, 即 $ab = a \cdot b + a \wedge b$ 。在几何代数中, 称 $a \cdot b$ 为标量, $a \wedge b$ 为双向量, $a \wedge b \wedge c$ 为三向量或多向量^[1]。图 1 反映出各个量的几何意义。

在线性代数中内积包含两向量之间相对方向的信息, 为获取其他信息, 又引入叉积。内积的概念可以很容易推广到几何代数中, 而叉积仅可表示三维空间的信息, 对于高于三维的空间无法表示其信息, 因而在几何代数中用外积来代替叉积, 而叉积对于理解三维空间的属性是有益的。

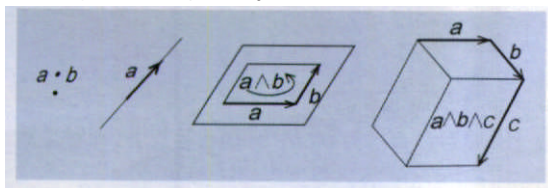


图 1 几何代数各量的空间表示

Fig. 1 Space representation of geometric algebra vectors

内积满足交换率 $a \cdot b = b \cdot a$, 外积则满足反交换率 $a \wedge b = -b \wedge a$ 。由几何积的定义有

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba), \quad a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba)$$

对于欧式空间的单位正交基 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 运算性质如下:

- 1) 平行向量的几何积为标量: $e_i^2 = e_i e_i = e_i \cdot e_i + e_i \wedge e_i = e_i \cdot e_i = 1$
- 2) 垂直向量的几何积为双向量: $e_i e_j = e_i \cdot e_j + e_i \wedge e_j = e_i \wedge e_j = 1 (i \neq j)$
- 3) 垂直向量的几何积满足反交换性: $e_i e_j = -e_j e_i (i \neq j)$
- 4) $e_i e_j = e_i e_j e_i e_j = -e_i e_j e_i e_j = -1 (i \neq j); (e_i e_j e_k)^2 = -1$
- 5) $e_1 e_2 e_3$ 的可交换性: $e_i (e_j e_k e_i) = (e_i e_j e_k) e_i$

由于 $e_1 e_2 e_3$ 具有可交换性, 且为空间中级数最高的元素, 则称 $e_1 e_2 e_3$ 为三向量体积元或伪标量。

几何代数中引入逆序的概念, 对于任意多向量 $A = e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n}$, A 的逆序为 $e_{i_n} e_{i_{n-1}} \dots e_{i_1}$, 记为 $\tilde{A}$ 。从而定义标量和向量的逆序为其本身。在线性代数中, 我们可以很自然地理解几何代数中逆序的概念, 将逆序影射到线性代数中, 就是将向量或矩阵求共轭转置。

在自旋 1/2 粒子的量子系统中, 通常采用 Pauli 矩阵 $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ 作为空间的一组标准正交基, 其中

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{定义}$$

$$I = \sigma_x \sigma_y \sigma_z = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

在几何代数中 $I = \sigma_x \sigma_y \sigma_z$ 为 3 向量体积元, 即伪标量。Pauli 矩阵的运算性质:

- 1) 平行向量的几何积为标量: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$

收稿日期: 2006-05-31

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50375148)

作者简介: 丛 爽, 女, 安徽合肥中国科学技术大学自动化系, 教授, 主要研究方向为先进控制策略在运动控制中的应用与实现, 人工神经网络、智能控制及量子系统控制等; E-mail: scong@ustc.edu.cn

2) 正交向量的几何积满足反交换性:

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x, \sigma_x \sigma_z = -\sigma_z \sigma_x, \sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y$$

3) $(\sigma_x \sigma_y)^2 = (\sigma_x \sigma_z)^2 = (\sigma_y \sigma_z)^2 = -1$; $(\sigma_x \sigma_x)^2 = 1$

$$4) \sigma_x (\sigma_x \sigma_y \sigma_z) = (\sigma_x \sigma_y \sigma_z) \sigma_x, \sigma_y (\sigma_x \sigma_y \sigma_z) = (\sigma_x \sigma_y \sigma_z) \sigma_y, \\ \sigma_z (\sigma_x \sigma_y \sigma_z) = (\sigma_x \sigma_y \sigma_z) \sigma_z$$

本文用几何代数的方法, 详细分析量子纯态和混合态, 并用这种表示方法和 Bloch 矢量表示方法相比较, 可以得出这两种表示方法的对应关系。

2 量子纯态的几何代数表示方法

量子系统的纯态能由一个波函数或一个态矢来描述, 即可表示为 $|\psi\rangle$, 且满足归一化条件。密度矩阵是与状态矢量相等的另外一种描述量子力学的方式。当量子纯态用态矢 $|\psi\rangle$ 表示时, 则系统的密度矩阵 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 。

为了便于后面的说明, 首先介绍密度算子的性质^[3]: 密度算子是厄米自厄的: $\rho^\dagger = \rho$; 密度算子的迹为 1: $\text{Tr}(\rho) = 1$; 密度算子是半正定算子。

密度算子以上 3 条性质无论对纯态量子系统还是混合态量子系统均成立。

下面考虑一个两能级纯态量子系统^[4], 系统的波函数:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1)$$

其中, 波函数满足归一化条件, 即 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$; $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 为二维 Hilbert 空间中的一组基, 转换为矩阵形式:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

系统波函数的更一般表示形式为:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} e^{i\varphi}$$

其中, $e^{i\varphi}$ 为外部相位因子, 可以不考虑其影响。为便于问题的分析, 令

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 \\ -a_2 + ia_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

显然有 $\psi_1 = a_0 + ia_3$, $\psi_2 = -a_2 + ia_1$, 这样可以十分方便地用几何代数的方法来描述量子态。纯态量子系统的几何代数描述为:

$$\psi = a_0 + a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z \quad (3)$$

其中, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 为 Pauli 矩阵, $I = \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

显然, 可以用几何代数的方式来描述态矢 $|0\rangle$, 此时式 (3) 中的参数有:

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, \psi = a_0 + a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z = 1 \text{ 即 } |0\rangle \leftrightarrow 1.$$

由此可得: 态矢 $|0\rangle$ 的几何代数表示形式为 1。同理可得: $|1\rangle \leftrightarrow -I\sigma_y$, 即态矢 $|1\rangle$ 的几何代数表示形式为 $-I\sigma_y$ 。

下面给出式 (3) 的证明:

$$\psi = a_0 + a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z \leftrightarrow \\ a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ + a_3 \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{bmatrix}$$

其中, $\psi_1 = a_0 + ia_3$, $\psi_2 = -a_2 + ia_1$ 。

证明的过程是将 Pauli 矩阵直接代入, 即可得到对应的矩阵表示形式。可见, 矩阵第二列的元素其实是由第一列元素所决定, 因此, 在处理问题时没有必要考虑矩阵后一列元素。

由于

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \leftrightarrow \frac{1}{2} (1 + \sigma_z) = E$$

因而, 我们可以得出以下的对应关系:

$$\psi E \leftrightarrow \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow |\psi\rangle$$

其中, ψE 为态矢 $|\psi\rangle$ 几何代数的另外一种表示形式, 可以认为 ψE 去掉了 ψ 中冗余自由度部分的影响, 这对用几何代数的方法表示密度矩阵是有利的。

左矢 $\langle\psi| \leftrightarrow \langle\psi|^\dagger = [\psi_1^* \quad \psi_2^*]$, 则左矢的几何代数表示形式为 $(\psi E)^\dagger$, 且对应关系如下:

$$(\psi E)^\dagger \leftrightarrow \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \langle\psi|$$

到此为止, 可以得到纯态密度矩阵的几何代数描述形式为 $(\psi E)(\psi E)^\dagger$, 对应关系如下:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow (\psi E)(\psi E)^\dagger$$

其中, $E = \frac{1}{2} (1 + \sigma_z)$, $\tilde{E} = \frac{1}{2} (1 + \sigma_z)$, $E\tilde{E} = \frac{1}{4} (1 + 2\sigma_z + \sigma_z^2) = \frac{1}{4} (1 + 2\sigma_z + 1) = \frac{1}{2} (1 + \sigma_z) = E$, 进一步有

$$\rho \leftrightarrow (\psi E)(\psi E)^\dagger = \psi E \tilde{E} = \frac{1}{2} \psi (1 + \sigma_z) \tilde{\psi} \\ = \frac{1}{2} \psi \tilde{\psi} + \frac{1}{2} \psi \sigma_z \tilde{\psi} = \frac{1}{2} (1 + \psi \sigma_z \tilde{\psi})$$

定义 $\psi \sigma_z \tilde{\psi}$ 为极化矢量, 极化矢量可以形象地描述量子系统的状态, 并且极化矢量与态矢是一一对应的。为了使极化矢量的几何意义更明确, 作以下推导。令系统的波函数

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 \\ -a_2 + ia_1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\cos(\phi/2) - i\cos(\theta/2)\sin(\phi/2) \\ \sin(\theta/2)e^{-i\phi/2} \cos(\phi/2) + i\sin(\theta/2)\sin(\phi/2) \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中 $a_0 = \cos(\theta/2)\cos(\phi/2)$, $a_3 = \sin(\theta/2)\sin(\phi/2)$,

$$a_2 = -\sin(\theta/2)\cos(\phi/2), a_1 = -\cos(\theta/2)\sin(\phi/2)$$

态矢 $|\psi\rangle$ 所对应的几何代数表达式:

$$\psi = a_0 + a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z \\ = \cos(\theta/2)\cos(\phi/2) + i\sin(\theta/2)\sin(\phi/2)\sigma_x \\ - \sin(\theta/2)\cos(\phi/2)I\sigma_y - \cos(\theta/2)\sin(\phi/2)I\sigma_z \\ = \cos(\theta/2)(\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)I\sigma_z) \\ - \sin(\theta/2)(\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)I\sigma_z)I\sigma_y \\ = e^{-i\sigma_z\phi/2} (\cos(\theta/2) - I\sigma_y\sin(\theta/2)) \\ = e^{-i\sigma_z\phi/2} e^{-i\sigma_y\theta/2} \\ = e^{-i\sigma_z\phi/2} e^{-i\sigma_y\theta/2} e^{-i\sigma_x\phi/2}$$

同理可得: $\tilde{\psi}$ 的逆序 $\tilde{\psi} = e^{-i\sigma_z\phi/2} e^{-i\sigma_y\theta/2} e^{-i\sigma_x\phi/2}$ 。

极化矢量可以表示为 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 的线性组合, 即有:

$$\psi \sigma_z \tilde{\psi} = e^{-i\sigma_z\phi/2} e^{i\sigma_z\phi/2} \sigma_z e^{-i\sigma_y\theta/2} e^{i\sigma_y\theta/2} \\ = e^{-i\sigma_z\phi/2} \sigma_z (\cos\theta + I\sigma_y\sin\theta) e^{i\sigma_z\phi/2} \\ = e^{-i\sigma_z\phi/2} (\sigma_z \cos\theta + \sigma_x \sin\theta) e^{i\sigma_z\phi/2} \\ = \sigma_z \cos\theta + \sin\theta e^{-i\sigma_z\phi/2} \sigma_x e^{i\sigma_z\phi/2} \\ = \sigma_z \cos\theta + \sin\theta \sigma_x (\cos\phi + I\sigma_z \sin\phi) \\ = \sin\theta \cos\phi \sigma_x + \sin\theta \sin\phi \sigma_y + \cos\phi \sigma_z$$

显然, 极化矢量 $\psi \sigma_z \tilde{\psi}$ 与 Bloch 矢量 $n = (\sin\theta \cos\phi \quad \sin\theta \sin\phi \quad \cos\theta)$

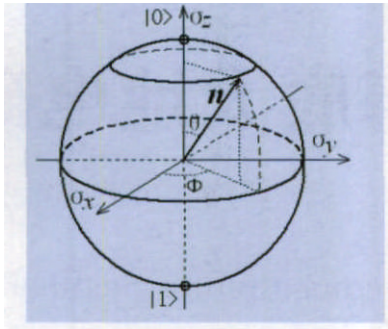


图2 纯态量子系统的 Bloch 矢量

Fig. 2 Bloch vector of pure state in quantum system

$\cos\theta$)是完全一致的。纯态时系统极化矢量的模为 1,即 Bloch 矢量分布在单位球面上,如图 2 所示。

3 量子混合态的几何代数表示方法

混合态系统需要用一组态矢及其概率来描述,而不能用某一个 $|\psi\rangle$ 来描述。因而,混合态系统只能用密度矩阵的形式来描述。

对于任意混合态系统的密度矩阵描述形式为 $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$;其

中, p_i 为对应状态 $|\psi_i\rangle$ 的几率,且有 $\sum_i p_i = 1$ 。此时系统的密度矩阵仍满足上述 3 条性质。并且,2 个不同的混合态量子系统可产生同一个密度矩阵。

假设有密度矩阵:

$$\rho = \frac{3}{4} |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4} |1\rangle\langle 1| \quad (5)$$

定义 $|m\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle + \frac{1}{2} |1\rangle$, $|n\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle$, 则可以验证:

$$\rho = \frac{3}{4} |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4} |1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2} |m\rangle\langle m| + \frac{1}{2} |n\rangle\langle n| \quad (6)$$

由式(6)可见,密度矩阵即可表示量子系统状态以 3/4 的几率处于状态 $|0\rangle$, 1/4 的几率处于状态 $|1\rangle$;也可以表示状态以 1/2 的几率处于状态 $|m\rangle$, 1/2 的几率处于状态 $|n\rangle$ 。

对于混合态密度矩阵 $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, $\sum_i p_i = 1$ 。类似于纯态,密度矩阵的几何代数表达式为:

$$\begin{aligned} \sum_i p_i (\psi_i E) (\psi_i E) &= \sum_i p_i \psi_i E \tilde{\psi}_i \\ &= \sum_i p_i \psi_i \frac{1}{2} (1 + \sigma_z) \tilde{\psi}_i = \frac{1}{2} \sum_i p_i \psi_i \tilde{\psi}_i + \frac{1}{2} \sum_i p_i \psi_i \sigma_z \tilde{\psi}_i \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_i p_i \psi_i \sigma_z \tilde{\psi}_i = \frac{1}{2} (1 + \sum_i p_i \psi_i \sigma_z \tilde{\psi}_i) \end{aligned} \quad (7)$$

定义 $\sum_i p_i \psi_i \sigma_z \tilde{\psi}_i$ 为极化矢量,由前面的分析可知对任意的 i ,

纯态量子系统的极化矢量 $\psi_i \sigma_z \tilde{\psi}_i$ 的模均为 1,且有 $\sum_i p_i = 1$,则混合态时极化矢量的模必然小于 1。混合态量子系统也可用 Bloch 球来表示。Bloch 球的北极表示状态 $|0\rangle\langle 0|$,南极表示状态 $|1\rangle\langle 1|$ 。当 Bloch 矢量处于单位球面内部时,则量子系统处于混合态;特别当 Bloch 矢量处于球心时,系统处于完全混合状态,此时可以获取系统的信息最少,系统的密度矩阵为 $I/2^{[9]}$,混合态量子系统 Bloch 球如图 3 所示。

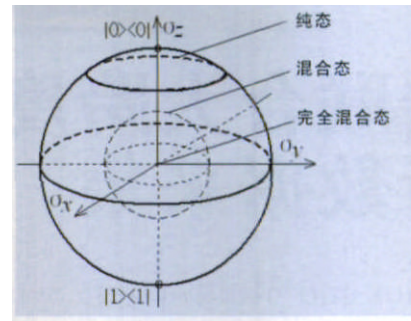


图3 混合态量子系统 Bloch 球

Fig. 3 Bloch ball of mixed state in quantum system

4 几何代数表示方法与 Bloch 矢量的对应关系

对于量子系统密度矩阵 ρ , Bloch 矢量定义为 n ,有

$$\rho = \frac{I + n \cdot \sigma}{2} = \frac{I + n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z}{2} \quad (8)$$

其中, $n=(n_x, n_y, n_z)$ 为 Bloch 矢量, $\sigma=(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 为 Pauli 矩阵, I 为二维单位阵。将 Pauli 矩阵代入(7)式:

$$\rho = \frac{I + n \cdot \sigma}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & 1 - n_z \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中, $n=(n_x, n_y, n_z)$ 为 Bloch 矢量, n_x, n_y 和 n_z 的值可以用待定系数法求得。

下面说明量子系统几何代数表示中的极化矢量与 Bloch 矢量的关系,对于混合态密度矩阵:

$$\rho = \frac{3}{4} |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4} |1\rangle\langle 1| \quad (10)$$

由于态矢 $|0\rangle$ 的几何代数表示为 $=1$, 态矢 $|1\rangle=1$ 的几何代数表示为 $\psi_z = -1\sigma_y$,由式(7)可得密度矩阵 ρ 的几何代数表示形式为:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (1 + \sum_i p_i \psi_i \sigma_z \tilde{\psi}_i) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \frac{3}{4} \psi_1 \sigma_z \tilde{\psi}_1 + \frac{1}{4} \psi_2 \sigma_z \tilde{\psi}_2) \end{aligned}$$

式(10)中的混合态密度矩阵所对应的极化矢量为:

$$\begin{aligned} \sum_i p_i \psi_i \sigma_z \tilde{\psi}_i &= \frac{3}{4} \psi_1 \sigma_z \tilde{\psi}_1 + \frac{1}{4} \psi_2 \sigma_z \tilde{\psi}_2 \\ &= \frac{3}{4} 1\sigma_z + \frac{1}{4} (-1\sigma_y) \sigma_z (-1\sigma_y) = \frac{3}{4} \sigma_z - \frac{1}{4} \sigma_z = \frac{1}{2} \sigma_z \end{aligned}$$

因而,该混合态密度矩阵所对应的几何代数表示的极化矢量为 $\frac{1}{2} \sigma_z$ 。

对于式(10)中的混合态密度矩阵:

$$\rho = \frac{3}{4} |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4} |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+1/2 & 0 \\ 0 & 1-1/2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

由(9)式和(11)式可得 $n_x=0, n_y=0$ 和 $n_z=\frac{1}{2}$;则 Bloch 矢量 $n=(0, 0, \frac{1}{2})$ 。

该密度矩阵所对应的几何代数表示的极化矢量为: $0 \cdot \sigma_x + 0 \cdot \sigma_y + \frac{1}{2} \sigma_z = \frac{1}{2} \sigma_z$,而对应的 Bloch 矢量 $n=(0, 0, \frac{1}{2})$,可见几何代数表示与 Bloch 球表示方法是完全一致的,即极化矢量中 n_x, n_y 和 n_z 所对应的系数构成 Bloch 矢量。图 4 给出了 Bloch 矢量 n 的直观表示。

海陆联合大跨度多点位海底大地电磁同步数据采集

Long-span and Multi-point Synchronizing Data Acquisition for Seafloor Magnetotelluric Based on Union of Marine and Land

邓 明/DENG Ming^{1,2}, 刘方兰/LIU Fang-lan³, 张启升/ZHANG Qi-sheng^{1,2}, 陈 凯/CHEN Kai^{1,2}

1. 地下信息探测技术与仪器教育部重点实验室, 北京 100083
2. 中国地质大学(北京)地球物理与信息技术学院, 北京 100083
3. 广州海洋地质调查局, 广州 510760

1. Geo-detection Laboratory, Ministry of Education, Beijing 100083, China
2. School of Geophysics and Information Technology, China University of Geosciences, Beijing 100083, China
3. Guangzhou Marine Geological Survey, Guangzhou 510760, China

[摘要] 海底电磁探测是研究海洋基础地质课题和海底矿产资源分布的重要地球物理方法之一。由于大地电磁场存在区域噪声, 因而, 为压制干扰并获得高质量的场源数据, 就需进行带远参考方式的数据采集。在采集过程中, 包括陆上基站和海底测网的多台仪器应遵循同一个时间基准和统一的方位坐标。海底大地电磁仪为满足上述要求, 其内部配备了高精度时钟源、姿态检测器件以及与海底电磁信息采集相关的自动信号测量与存储电路。海上作业时, 科考船沿预定航线, 实现仪器的逐点投放。海底测量结束后, 通过遥控方式改变海底仪器的浮力性质, 使其自动返回海面。近期的海洋试验表明, 中国的海底大地电磁探测技术已实现了实用化, 可为海洋勘查提供高技术支撑。

[关键词] 海洋探测; 大地电磁; 数据采集; 远参考测量

[中图分类号] P716

[文献标识码] A

[文章编号] 1000-7857(2006)10-0028-05

收稿日期: 2006-08-20

基金项目: 国家“863”计划课题(2002AA615020)

作者简介: 邓 明, 男, 北京市海淀区学院路 29 号中国地质大学地球物理与信息技术学院, 教授, 主要从事地球物理仪器、海洋电磁探测以及深部地电传感技术方面的研究; E-mail: dengming@cugb.edu.cn

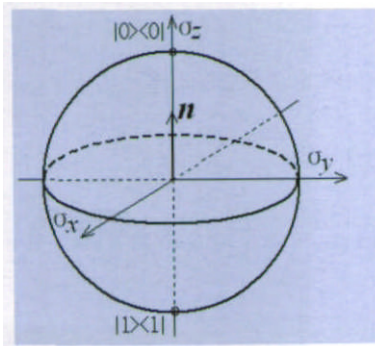


图 4 混合态量子系统 Bloch 矢量 n

Fig. 4 Bloch vector n of mixed state in quantum system

5 结论

几何代数在物理和工程领域得到越来越多的应用, 它直观的表现形式使其产生其他方法不可替代的效果。它在量子信息和量

子计算领域已有很广泛的应用。本文引入量子系统的密度矩阵, 并将其表示成几何代数的形式, 从而得到纯态量子系统和混合态量子系统的几何代数描述形式。通过几何代数中的极化矢量与 Bloch 矢量比较, 可以很容易得到它们之间的对应关系, 并得出它们在量子系统的描述上是完全一致的。

参考文献(References)

- [1] CHRIS DORAN, ANTHONY. Geometric algebra for physicists[M]. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2003.
- [2] 邹 晖, 陈万春, 殷兴良. 几何代数及其在飞行力学中的应用[J]. 飞行力学, 2004, 22(4): 60-64.
- [3] MICHAEL A NIELSEN, ISAAC L. CHUANG. Quantum computation and quantum information [M]. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2000: 101-105.
- [4] 丛 爽. 量子力学系统控制导论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

(责任编辑 胡春华)