

余树在图式流形拓扑分类中的应用

卢建立, 陈 清

河南师范大学数学与信息科学学院, 河南新乡 453007

摘要 图式流形是以一个无向图 G 为框架产生出的管形曲面 $M(G)$ 。本文讨论图式流形同胚分类的计数问题, 该问题可转化为图的一类 2-边着色问题, 提出一种新的观点, 探讨图式流形的等价分类, 以便推进已有的工作。图的计数理论分为两大部分: 标定图的计数与非标定图的计数。由于涉及同构判定, 非标定图的计数较难。本文运用图论中的向量空间, 包括圈空间及割空间, 建立基本的计数方法, 这一方面简化了群论方法的证明, 另一方面更深入地揭示出同胚分类与圈结构的关系。以余树的概念为基础, 提出“余树法”, 并得出结论: 以余树的所有边导出子图为黑边子图, 构成 T -等价类的一个横贯; 同时, 以余树中所有不同构的边导出子图为黑边子图, 构成 H -等价类的一个代表系。

关键词 图式流形; 同胚等价类; 圈空间; 割空间

中图分类号 O157.5

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2009)22-0105-03

Application of Cotree in Topological Classification of Graphlike Manifold

LU Jianli, CHEN Qing

College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan Province, China

Abstract The graphlike manifold $M(G)$ is a tubular surface with the frame of a simple connected graph G . This paper studies the enumeration problem of homeomorphic equivalence classes of the graphlike manifold, which can be transformed into a 2-edge-coloring enumeration problem for graphs. A new approach is proposed in this paper, based on the cut space and the cycle space in the graph theory. It is well known that the enumeration theory of graphs is composed of two parts: the enumeration of labeled graphs and that of unlabelled graphs. Generally speaking, the former is easier than the latter (as the latter involves isomorphism transformation). The enumeration formula and related results of labeled graphs are obtained by means of the group theory in the paper. The enumeration based on the cycle space and the cut space in the graph theory not only simplifies the proofs based on the group theory, but also better reveals the relation between homeomorphic classes and the cycle-structure of graphs. Based on the definition of

cotree a new kind, named "cotree scheme", is proposed. It is found that a transverse of T -classes can be constructed by taking all edge-induced subgraphs of the cotree as the black subgraphs. A representative system of H -classes can be constructed by taking all non-isomorphic edge-induced subgraphs of the cotree as the black subgraphs.

Keywords graphlike manifold; homeomorphic equivalence classes; cycle space; cut space

0 引言

文献[1]~[5]提出了图式流形概念以及同胚分类问题, 文献[6]、[7]转化为图 G 的着色计数问题。本文在此图论模型的基础上, 进一步讨论问题。

一个图 G 定义为一个偶对 (V, E) , 记作 $G=(V, E)$, 其中 V 是顶点的集合, E 是有序积 $V \times V$ 中边的集合。图 G 的一个 2-边着色是指边集 E 的一个划分 $\sigma=(E_0, E_1)$, 其中 E_0 的边染成白色, E_1 的边染成黑色。若在顶点 v 处执行一次扭转变换^[7], 则关联于 v 的白边变为黑边, 黑边变为白边。若一个着色 σ 经过若干次扭转变换为另一个着色 σ' , 则称 σ 与 σ' 是 T -等价的。若一个着色 σ 经过若干次扭转后与另一个着色 σ' 同构, 则称 σ 与 σ' 是 H -等价的。本文即求图 G 的这种 2-边着色的等价类数目。

图的计数理论分为两大部分: 标定图的计数与非标定图的计数。由于涉及同构判定, 非标定图的计数较难。文献[6]运用群论方法, 推导出标定图的计数公式及相关结果。本文运

收稿日期: 2009-06-04

基金项目: 河南省杰出青年计划项目(084100510013)

作者简介: 卢建立, 副教授, 研究方向为图论, 电子信箱: lujianli@htu.cn; 陈清, 研究方向为图论, 电子信箱: 0701080403cq@163.com

用图论中的向量空间,包括圈空间及割空间,建立基本的计数方法。这一方面简化了群论方法的证明,另一方面更深入地揭示出同胚分类与圈结构的关系。关于图的向量空间及其他图论术语参见文献[8]、[9]。

1 图式流形的等价分类

给定无向连通图 $G=(V, E)$, 其中 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 。对于图 G 的 2-边着色 $\sigma=(E_0, E_1)$, 用 $E_1(\sigma)$ 表示 σ 的黑边集, 直接用来表示着色 σ 。黑边集 $E_1(\sigma)$ 的导出子图记为 $G_1(\sigma)=G[E_1(\sigma)]$, 称为黑边子图。

定义 1 若存在图 G 的自同构映射 φ , 使得图 G 的两个黑边子图 $G_1(\sigma)$ 与 $G_1(\sigma')$ 在映射 φ 下是同构的, 则称 2-边着色 σ 及 σ' 是同构的, 记为 $\sigma \cong \sigma'$ 。

定义 2 图 G 的两个 2-边着色 σ 及 σ' , 若 σ 可经过若干个扭转变换后变为 σ' , 则称 2-边着色 σ 与 σ' 是 T -等价的, 记为 $\sigma \sim_T \sigma'$; 若 σ 可经过若干个扭转变换及自同构变换后变为 σ' , 则称 2-边着色 σ 与 σ' 是 H -等价的, 记为 $\sigma \sim_H \sigma'$ 。

定义 3 2-边着色 σ 与 σ' 的卷积 $\sigma * \sigma'$ 定义为 $E_1(\sigma * \sigma') = E_1(\sigma) \Delta E_1(\sigma')$, 其中 Δ 表示集合的对称差运算。

图 G 的形如 $[S, \bar{S}] = \{uv \in E | u \in S, v \in \bar{S}\}$ 的边子集称为 G 的边割集(余圈), 其中 S 是顶点集合 V 的非空子集, $\bar{S}$ 是 S 在 V 中的余集。图 G 中所有边割集的全体记为 B , 称为割空间。这里约定 B 包括空集(作为线性空间的单位元)。若一个着色 σ 的黑边集是一个边割集, 即 $E_1(\sigma) = [S, \bar{S}]$, 则称 σ 为正则着色。所有正则着色的集合记为 $T(G) = \{\sigma | E_1(\sigma) \in B\}$ 。

引理 1^[6] 着色 σ 与 σ' 是 T -等价的, 当且仅当在 $T(G)$ 中存在一个正则着色 τ , 使得 $\sigma' = \sigma * \tau$ ^[5]。着色 σ 与 σ' 是 H -等价的当且仅当存在正则着色 $\tau \in T(G)$, 使得 $\sigma' \cong \sigma * \tau$ 。

事实上, 若正则着色 τ 对应的边割集为 $E_1(\tau) = [S, \bar{S}]$, 则在 T -等价的情形下, $E_1(\sigma') = E_1(\sigma) \Delta [S, \bar{S}]$, 由对称差的性质有 $E_1(\sigma * \tau) = [S, \bar{S}]$ 。这里, S 就是执行扭转变换的顶点集。

判定 H -等价性是一个困难问题, 因为它归结为判定两个图 $G_1(\sigma)$ 与 $G_1(\sigma')$ 是否同构, 而图的同构问题是著名的未解问题。因此, 对一般图的同胚分类(H -等价类)不太可能存在有效算法。本文只能是研究一些特殊图类, 或 n 较小的情形。有时候可以运用同构的必要条件(如度序列相同), 判定两个图不同构。当 n 较小时, 可以借助于直观判断, 构造同构映射。

总之, 本文明确了两种等价性的不同特征。下面讨论如何确定图 G 的 T -等价类数目 $N_T(G)$ 及 H -等价类数目 $N_H(G)$ 。文献[1]~[7]已取得一系列成果, 本文提出一种新的观点, 运用图的圈空间和割空间, 探讨图式流形的等价分类, 以便推进已有的工作。

2 图的圈空间和割空间

对标定图 G , 其 m 条边 $e_1, e_2, \dots, e_m$ 可以排成一个序列。

因此一个 2-边着色 σ 可以用一个 m 维向量 x_σ 表示,

$$x_\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_m) \quad x_i = \begin{cases} 1 & e_i \in E_1(\sigma) \\ 0 & e_i \in E_0(\sigma) \end{cases}$$

x_σ 称为黑边子集 $E_1(\sigma)$ 的关联向量。

设 Σ 是所有 2-边着色的全体, 则 Σ 对应于一个 m 维向量空间。一般不对着色 σ 及其关联向量 x_σ 加以区别, 故认为 Σ 就是这个 m 维向量空间, 显然 $|\Sigma| = 2^m$ 。特别要注意的是, 这里向量空间是定义在二元域 $Z_2 = \{0, 1\}$ 之上的。边集合的对称差运算恰好对应于关联向量的模 2 运算。若着色 σ 及 σ' 对应的向量分别为 $x_\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 及 $x_{\sigma'} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$, 则 $\sigma * \sigma'$ 对应的关联向量为 $x_{\sigma * \sigma'} = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_m + x'_m) \pmod{2}$ 。这是 $E_1(\sigma * \sigma') = E_1(\sigma) \Delta E_1(\sigma')$ 的等价写法。

图 G 的所有边割集构成割空间 B 。其中每一个割集 $b \in B$ 对应于一个正则着色 $\tau \in T(G)$, 而一个正则着色 τ 对应于一个 m 维关联向量 x_τ , 并且边割集对于对称差运算是封闭的。所以 B 就是 m 维空间 Σ 的子空间(包括零向量)。另一方面, 割空间 B 的正交补空间是圈空间 C , 它由零向量及圈向量组成(圈向量是若干个边不交的圈的关联向量)。在图论中, 已知 B 的维数是 $n-1$, $|B| = 2^{n-1}$; C 的维数是 $m-n+1$, $|C| = 2^{m-n+1}$ 。维数的计算参见文献[8]、[9]。由此, 可以建立如下的计数方法。

3 计数定理

定理 1^[6] 对任意 n 个顶点及 m 条边的连通图 G , 流形 $M(G)$ 的 T -等价类数目为 $N_T(G) = |C| = 2^{m-n+1}$ 。

证明 根据引理 1, 每一个着色 $\sigma \in \Sigma$, 它所在的等价类(轨道)为 $\{\sigma * \tau | \tau \in T(G)\}$ 。而这个等价类包含的着色数目为 $|T(G)| = |B| = 2^{n-1}$ 。这就是说, 每一个着色 σ 都与 2^{n-1} 个着色等价。所以 Σ 中的 T -等价类数目为 $N_T(G) = |\Sigma| / |B| = |C| = 2^{m-n+1}$ 。证毕。

这样, 运用图论方法得到的结果与文献[6]中群论方法的结果一致。不仅如此, 图论方法还可以揭示出更多的结构性性质。

定义 4 T -等价类的一个“代表系”, 是指这样的着色集合 R , 它至少包含每一个 T -等价类的一个元素。 T -等价类的一个“横贯”, 是指这样的代表系 R^* , 它恰包含每个 T -等价类的一个元素。同样地, 定义 H -等价类的代表系及横贯。

因此, 若求出 T -等价类的一个横贯 R^* , 则 $N_T(G) = |R^*|$ 。同理, 若求出 H -等价类的一个横贯 R^* , 则 $N_H(G) = |R^*|$ 。由此得到确定 $N_T(G)$ 及 $N_H(G)$ 的一般方法。

对图 G 的一个支撑树 T , 树 T 关于图 G 的补图称为余树, 记为 $\bar{T}$ 。换言之, 在图 G 中将树 T 的边删去, 便得到余树 $\bar{T} = G - E(T)$ 。由于支撑树的边数为 $n-1$, 所以余树 $\bar{T}$ 的边数为 $\mu = m - n + 1$ 。对余树的每一条边 e , $T+e$ 的唯一圈称为 G 的基本圈; 所有这些基本圈构成圈空间 C 的基。因此圈空间 C 的维数是 $\mu = m - n + 1$ 。对偶地有基本余圈(基本边割集)的定义; 所有基本余圈构成割空间 B 的基^[8-9]。运用余树的概念, 建立如下的基本计数定理。

定理 2 对任意连通图 G 及其一个余树 $\bar{T}$, 有:

1) $N_T(G)$ 等于 $\bar{T}$ 中所有边导出子图的数目。

2) 以 $\bar{T}$ 的所有边导出子图为黑边子图, 构成 T -等价类的一个横贯。

证明 根据定理 1, $N_T(G)=2^\mu$, 其中 $\mu=m-n+1$ 。另一方面, $\bar{T}$ 的边数也是 μ , 故它的所有边导出子图的数目为 $\binom{\mu}{0}+\binom{\mu}{1}+\cdots+$

$\binom{\mu}{\mu}=2^\mu$ 。所以定理的第一个结论得证。其次, 设 E_1 及 E_2 是余树 $\bar{T}$ 的两个不同的边子集。由于 $G-(E_1\Delta E_2)$ 包含支撑树 T , 所以它是连通图, 从而 $E_1\Delta E_2$ 不是边割集。因此, 根据引理 1, E_1 及 E_2 对应的 2-边着色 σ_1 及 σ_2 (分别以 E_1 及 E_2 为黑边子集) 不是 T -等价的。这样一来, 由 $\bar{T}$ 的所有 2^μ 个边导出子图对应的着色是两两不等价的, 从而它们构成 T -等价类的一个横贯 R^* 且 $N_T(G)=|R^*|$ 。证毕。

对 H -等价类的情形, 由于涉及困难的同构变换, 不能得到这样完整的结果。类似的方法只能得到 $N_H(G)$ 的一个上界。

定理 3 对任意连通图 G 及其一个余树 $\bar{T}$, 设 $y(\bar{T})$ 表示 $\bar{T}$ 中所有不同构的边导出子图的数目。 $N_H(G)\leq y(\bar{T})$ 。同时, 以 $\bar{T}$ 中所有不同构的边导出子图为黑边子图, 构成 H -等价类的一个代表系。

证明 根据定理 2, $\bar{T}$ 的所有边导出子图对应的着色, 构成 T -等价类的横贯, 因而也是 H -等价类的代表系。注意到这

些着色均不 T -等价, 但可能同构 (并且经过同构变换之后还可能是 T -等价的)。将这些互相同构的着色看成同一种着色, 在这种情况下, 剔除同构的着色之后, 得到 $\bar{T}$ 中所有不同构的边导出子图, 仍然是 H -等价类的代表系, 于是 $N_H(G)\leq y(\bar{T})$ 。证毕。

下面以 n 个顶点的轮图 $W_n=K_1\vee C_{n-1}$ 为例, 说明求轮图 H -等价类的横贯的具体方法。

取轴心处的星 $K_{1,n-1}$ 为支撑树 T , 则相应的余树为 $\bar{T}=C_{n-1}$ 。 $N_H(W_n)\leq y(C_{n-1})$ 。经简单计算, 可以确定出至多 7 个顶点的圈 C_n 中不同构的子图数 $y(C_n)$, 分别为: $y(C_3)=4, y(C_4)=6, y(C_5)=8, y(C_6)=13, y(C_7)=17$ 。

由此得到: $N_H(W_4)\leq 4, N_H(W_5)\leq 6, N_H(W_6)\leq 8, N_H(W_7)\leq 13, N_H(W_8)\leq 17$ 。其实, 除了 $N_H(W_4)=3<4$ 之外, 其他各式均有等号成立。事实上, 当 $n\geq 5$ 时, 轮图 W_n 的同构变换只有绕轴旋转及翻转 (即自同构群是二面体群)。因此, 周边的圈 C_{n-1} 总是变到这个圈自己。如果两个着色在圈 C_{n-1} 中是不同构的, 则它们对图 G 而言也是不同构的。现在取这样的着色, 其黑边子图在圈 C_{n-1} 中是不同构的, 因而对整个图 G 也是不同构的 (也不会同构变换之后又出现 T -等价)。因此, 这样选择的代表系就是一个横贯。

由此得到: $N_H(W_5)=6, N_H(W_6)=8, N_H(W_7)=13, N_H(W_8)=17$ 。于是推进了已有文献[3]、[6]、[7]中的结果。并且按照这种办法可以一直做下去, 只是计算量会越来越大。图 1 是 $n=6$ 的横贯。



图 1 轮图 W_6 的横贯

Fig. 1 Transverse of wheel-graph W_6

4 结论

由于图式流形同胚分类的计数问题可转化为图的 2-边着色问题, 而着色在扭转变换下是 T -等价的, 因此可进一步根据割集空间与圈空间的理论, 将 2-边着色的扭转变换转化为着色与正则着色的对称差运算。最终得出结论: 与某着色 T -等价的全体着色就是该着色与割集空间的乘积, 它们构成了该着色 T -等价类的一个横贯。剔除 T -等价类横贯中同构的着色后就是 H -等价类的一个横贯。

参考文献 (References)

- [1] Liu Yaxing, Li Qisheng. Graphlike manifolds [J]. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 1994, 9(4): 46-51.
- [2] Liu Xiaozhen. Graphlike manifolds with contraction[J]. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 1995, 10(1): 103-110.
- [3] Yuan Fuyong. The homeomorphism classification of $G. M. (2k+1 - vertices)$ [J]. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 1996, 11(2): 60-63.

- [4] Liu Yaxing. Graphlike manifold with contraction $\Delta \times \Delta$ [J]. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 1996, 11(1): 74-75.
- [5] Liu Yaxing. Graphlike manifold with contraction $\Delta \times \Delta$ (correction)[J]. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 1996, 11(2): 64.
- [6] Lin Yixun, Wang Qin. A combinatorial approach for topological classification of graphlike manifolds [J]. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 1998, 13(3): 1-11.
- [7] 林谔勋, 邓俊强. 图式流形拓扑分类中的图着色计数问题 [J]. 郑州大学学报: 理学版, 1999, 31(2): 1-6.
- Lin Yixun, Deng Junqiang. A graph coloring enumeration problem in topological classification of graphlike manifolds [J]. *Journal of Zhengzhou University: Natural Science Edition*, 1999, 31(2): 1-6.
- [8] 田丰, 马仲蕃. 图与网络流理论[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- Tian Feng, Ma Zhongfan. *Theory of graphs and network flows* [M]. Beijing: Science Press, 1987.
- [9] Bondy J A, Murty U S R. *Graph theory with applications* [M]. London: Macmillan Press Ltd, 1976.

(责任编辑 杨书卷)