

Cantor 集的 Hausdorff 维数证明

铁 勇

曲靖师范学院数学与信息科学学院, 云南曲靖 655011

摘要 利用符号系统中的字符串和字符串定义的度量空间, 结合集合有限覆盖原理和 Lipschitz 映射, 建立一个由字符串定义的度量空间到 Cantor 集的映射, 分析在此映射下的函数递推关系, 推导出该函数满足双向 Lipschitz 不等式, 由此得出了文中定义的度量空间的维数与 Cantor 集的 Hausdorff 维数相等, 从而给出了 Cantor 集的 Hausdorff 维数的另一种不同于运用质量分布原理证明的方法, 巧妙解决了 Cantor 集 Hausdorff 维数的证明问题, 在研究方法上为研究其他复杂的分形集提供了避免利用质量分布原理时需要分配一个适当的质量分布 (一般比较难找, 尤其对维数的下界估计) 在其分形集上的困难的尝试, 也为今后研究 Hausdorff 维数的理论和证明方法, 以及字符串和维数的关系提供了理论基础和依据。

关键词 Cantor 集; 字符串; 有限覆盖; Hausdorff 维数

中图分类号 O174.12

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2009)22-0102-03

A Proof of Hausdorff Dimension of Cantor Set

TIE Yong

College of Mathematics and Information Science, Qujing Normal University, Qujing 655011, Yunnan Province, China

Abstract This paper proposes a different method of proving Hausdorff dimension of Cantor set by considering character string or metric space. Using the principle of set finite covering and Lipschitz mapping, a mapping is constructed from the metric space that is defined by character string to Cantor set. The recurrence relationships are analyzed for the above mapping, which is shown to satisfy the biaxial Lipschitz inequality. It is proved that Hausdorff dimension of the metric space and that of Cantor set are equivalent. A method is found to prove Hausdorff dimension of Cantor set, which is different from the mass distribution principle, provides a way to avoid considering a suitable mass distribution, which is difficult, especially for the lower bound of the Hausdorff dimension, on its fractal set when applying the mass distribution principle for other complicated fractal sets, also has laid a theoretical foundation for studying the theories and methods for proving Hausdorff dimension, and the relations between character string and dimension.

Keywords Cantor set; character string; finite covering; Hausdorff dimension

0 引言

分形中 Hausdorff 维数的明显的上界^[1]经常就是维数的实际数值, 然而要给出证明却是困难的, 而对于 Hausdorff 维数的下界估计, 往往难度更大。因为得到一个维数的上界只要计算该集合的一个特殊覆盖 $\{U_i\}$ 的形式为 $\sum |U_i|^s$ 的值即可, 而为求维数的下界, 却必须证明对所有的 δ -覆盖, $\sum |U_i|^s$ 要比某个正常数大。这样, 在估计维数上界时那些有效的 $\sum |U_i|^s$, 在考虑下界时就不好用了。Cantor 集的 Hausdorff 测度已经得到了广泛的研究, 并且推广到了广义的结果^[2-3]。然而 Cantor 集的 Hausdorff 维数的研究却一直很少。肯尼思·法尔科内在文献[4]中利用质量分布原理和 Hausdorff 测度与维数的定义计算并证明了 Cantor 集的 Hausdorff 维数, 其关键在于所给出的覆盖集上做了一个质量分布, 这是值得肯定的证明技巧。本文利用符号系统中的字符串和度量空间, 结合集合覆盖和映射的原理, 探讨另一种不同的 Hausdorff 维数的证明方法。

1 字符串定义

首先考虑具有两个符号, 例如: a, b , 记 $E=\{a, b\}$, 由 E 中的

收稿日期: 2009-03-31

基金项目: 曲靖师范学院科学研究基金项目 (2008QN035)

作者简介: 铁勇, 讲师, 研究方向为分形, 电子信箱: tieyong11@126.com

字母构成字符串 α , 字符串形成的全体记为 E^* , α 中字母的个数称为 α 的长度, 记为 $|\alpha|$ 。

若 $\alpha, \beta \in E^*$, 则称 $\alpha\beta$ 为 α 与 β 的连接, α 称为 $\alpha\beta$ 的前缀, $\alpha 0$ 和 $\alpha 1$ 分别称为 α 的左仔和右仔。记字符串长度为 n 的字符串集合为 $E^{(n)}$, 则 $E^* = E^{(0)} \cup E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup \dots \cup E^{(n)} \cup \dots$ 。

若一个字符串 $\beta \in E^*$ 是由一个 $\alpha \in E^*$ 产生的, 那么存在 $\gamma \in E^*$, 使 $\beta = \alpha\gamma$, 即 α 一定是 β 的一个前缀。

为了更好地说明 Cantor 集的 Hausdorff 维数的另一种证明方法, 这里利用字符串定义一种新的度量空间。

2 字符串定义的度量空间

设 $F^{(w)}$ 是由 E 中的字符构成的, 对 $F^{(w)}$ 引入距离: 有两个字符串 $\sigma, \tau \in F^{(w)}$, 若它们有相同的前缀, 则可以认为它们是“靠近”的; 若 $\sigma = \tau$, 距离应为 0, 即 $\rho_{1/3}(\sigma, \tau) = 0$; 若 $\sigma \neq \tau$, 则它们含有的字符不相同。如: $\sigma = a_1 a_2 \dots a_i, \tau = b_1 b_2 \dots b_i$, 其中 $\sigma_i \neq \tau_i, i = 1, 2, \dots, n$, 设前 k 个字符相同, 而第 $k+1$ 个字符不相同, 则可以表示为 $\sigma = \alpha\sigma', \tau = \alpha\tau'$, 其中, $|\alpha| = k$, 则称 α 为 σ 和 τ 的最大公共前缀, 定义 $\rho_{1/3}(\sigma, \tau) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\alpha|} = \frac{1}{3^k}$ 。

下面在距离 $\rho_{1/3}$ 下, 引入集合 $F^{(w)}$ 定义度量空间。

命题 集合 $F^{(w)}$ 在距离 $\rho_{1/3}$ 下是一度量空间。

证明 1) 正性: $\rho_{1/3}(\sigma, \tau) \geq 0$;

2) 对称性: $\rho_{1/3}(\sigma, \tau) = 0 \Leftrightarrow \sigma = \tau, \rho_{1/3}(\sigma, \tau) = \rho_{1/3}(\tau, \sigma)$;

3) 三角不等式: $\rho_{1/3}(\sigma, \tau) \leq \rho_{1/3}(\sigma, \theta) + \rho_{1/3}(\theta, \tau)$, 对任意 σ, τ, θ 均成立。

1) 和 2) 的证明显然成立。下面证明 3)。

先证 $\rho_{1/3}(\sigma, \tau) \leq \max\{\rho_{1/3}(\sigma, \theta), \rho_{1/3}(\theta, \tau)\}$ 对任意的 σ, τ, θ 均成立。若 σ, τ, θ 中有两个相等, 则不等式显然成立, 所以可以假设三者都不相等时, 其两两的最大公共前缀的长度不为 0, 设 σ, θ 的最大公共前缀长度为 $k > 0$; 而 θ, τ 的最大公共前缀长度为 $m > 0$, 则 σ, τ, θ 的最大公共前缀长度 $n = \min\{m, k\} > 0$, 即 σ, τ, θ 的前 n 个字符均相同, 所以, σ 和 τ 的最大公共前缀的长度至少是 n , 因此,

$$\rho_{1/3}(\sigma, \tau) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{\min\{k, m\}} = \max\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^k, \left(\frac{1}{3}\right)^m\right\} = \max\{\rho_{1/3}(\sigma, \theta), \rho_{1/3}(\theta, \tau)\}$$

则 $\rho_{1/3}(\sigma, \tau) \leq \rho_{1/3}(\sigma, \theta) + \rho_{1/3}(\theta, \tau)$, 对任意的 σ, τ, θ 均成立。

3 Cantor 集的 Hausdorff 维数

下面通过字符串和字符串定义的度量空间的引入, 计算 $F^{(w)}$ 的 Hausdorff 维数。

设 $F = \{0, 1\}$, 对于空间 $\{F^{(w)}, \rho_{1/3}\}$, 定义集合函数 C 为

$$C: C([\alpha]) = (\text{diam}[\alpha])^s = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{|\alpha|}\right]^s = \left(\frac{1}{3}\right)^{s|\alpha|}$$

其中, s 表示 $F^{(w)}$ 集的 Hausdorff 维数, $[\alpha]$ 相当于 3 进制中的闭

区间 $\left[\frac{m}{3^k}, \frac{m+1}{3^k}\right]$, 其中 $m = 3^{k-1}x_1 + 3^{k-2}x_2 + \dots + 3x_{k-1} + x_k$, 且 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} =$

$0.x_1 \dots x_k \dots, x_k \in \{0, 1\}$ 。

对于集合函数 C 中的 x , 可以表示为 $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{2^n}, t_n \in \{0, 1\}$, 因此, Cantor 集就和 $F^{(w)}$ 形成对应。而距离为 $\rho_{1/3}(\sigma, \tau)$, 其中

$$\sigma = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \tau = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}, a_n, b_n \in \{0, 1\}, \text{ 则}$$

$$\frac{1}{3^{k+1}} \leq \rho(\sigma, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{3^n} \leq \frac{1}{3^k}$$

对于任意的 $0 < r < 1$, 由 $\{0, 1\}$ 构成的 $F^{(w)}$ 可以引入距离 $\rho_r(\sigma, \tau) = r^{|\alpha|}$ (其中 $\sigma, \tau \in F^{(w)}$), 具有最大的公共前缀 $\alpha, \sigma = \alpha\sigma', \tau = \alpha\tau'$, 现取 $r = \frac{1}{3}$, 对于 $\forall \alpha \in F^{(w)}$, 有

$$\text{diam}[\alpha] = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\alpha|}$$

因此, $\{[\alpha]: \alpha \in F^{(w)}\}$ 构成了度量空间 $\{F^{(w)}, \rho_{1/3}\}$ 的一个覆盖集。

$$C([\alpha]) = (\text{diam}[\alpha])^s = \left(\frac{1}{3}\right)^{s|\alpha|}, E = [0] \cup [1], F^{(w)} \text{ 由字符串构成,}$$

记为 $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$, 而

$$C([0]) = (\text{diam}[0])^s = \left(\frac{1}{3}\right)^s = \frac{1}{2}$$

$$C([1]) = (\text{diam}[1])^s = \left(\frac{1}{3}\right)^s = \frac{1}{2}$$

对任意的集合 $A (A \subseteq F^{(w)})$, 若 $\{[\alpha_i]\}$ 是 A 的一个覆盖, $\alpha_i \in A, i = 1, 2$, 则由 $\mu_{1/3}(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}[\alpha_i])^s = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^s = \frac{1}{2}$, 其中 μ 为集合 A 的测度, 则可得 $F^{(w)}$ 的 Hausdorff 维数 $s = \frac{\lg 2}{\lg 3}$ 。

下面利用以上结果证明 Cantor 集的 Hausdorff 维数。

定理 Cantor 集的 Hausdorff 维数是 $\dim C = \frac{\lg 2}{\lg 3}$ 。

证明 已知 Cantor 集中的点可以表示为

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n} \quad x_n \in \{0, 2\}, t_n \in \{0, 1\}$$

这就与 $F^{(w)}$ 中的字符串 $t_1 t_2 \dots t_n$ 形成一一对应, 即: 存在映射 h , 使得

$$h: F^{(w)} \rightarrow \text{Cantor 集}$$

设 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \in F^{(w)}$, 则 h 满足递推关系:

$$h(\sigma) = h(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n) = \frac{1}{3} h(\sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_n) + \frac{2}{3} \sigma_1$$

$$= \frac{1}{3^2} h(\sigma_3 \sigma_4 \dots \sigma_n) + \frac{2}{3} \sigma_1 + \frac{2}{3^2} \sigma_2$$

$$= 2 \sum_{n=1}^k \frac{\sigma_n}{3^n} + \frac{1}{3^k} h(\sigma_{k+1} \sigma_{k+2} \dots \sigma_n)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{3^n} \quad \sigma_n \in \{0, 1\}$$

下面证明 $h(\sigma)$ 满足双向 Lipschitz 不等式^[4]。

对任意 $\sigma, \tau \in F^{(w)}$, 有

$$\frac{1}{3} \rho_{1/3}(\sigma, \tau) \leq |h(\sigma) - h(\tau)| \leq \rho_{1/3}(\sigma, \tau)$$

而 $\sigma \neq \tau$, 因此, σ, τ 一定存在非空的公共前缀 α , 使得

$$\sigma = \alpha\sigma' \quad \tau = \alpha\tau'$$

设 $\alpha = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k$, 则

$$h(\sigma) = 2 \sum_{n=1}^k \frac{\sigma_n}{3^n} + \frac{1}{3^k} h(\sigma')$$

$$h(\tau) = 2 \sum_{n=1}^k \frac{\tau_n}{3^n} + \frac{1}{3^k} h(\tau')$$

因而,

$$|h(\sigma) - h(\tau)| = \frac{1}{3^k} |h(\sigma') - h(\tau')|$$

由于 σ' 和 τ' 的公共前缀为空集, 因此 $h(\sigma')$ 和 $h(\tau')$ 分别位于 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 中, 则

$$\frac{1}{3} \leq |h(\sigma') - h(\tau')| \leq 1$$

而

$$\frac{1}{3^k} \rho_{1/3}(\sigma, \tau) \Rightarrow \frac{1}{3} \rho_{1/3}(\sigma, \tau) \leq |h(\sigma) - h(\tau)| \leq \rho_{1/3}(\sigma, \tau)$$

所以, Cantor 集的 Hausdorff 维数和 $\{F^{(n)}, \rho_{1/3}\}$ 的维数相等, 为 $\frac{\lg 2}{\lg 3}$, 则 $\dim C = s = \frac{\lg 2}{\lg 3}$, 原定理成立。

4 结论

Cantor 集 Hausdorff 维数的分析和证明渗透了度量空间

的字符串理论, 并利用了符号系统中的字符串和度量空间, 结合集合覆盖和映射的原理, 解决了 Cantor 集的 Hausdorff 维数的另一种证明方法, 为 Hausdorff 维数的下界估计从不同的角度给出了新的研究方法, 也为今后研究 Hausdorff 维数的理论和证明方法, 以及字符串和维数的关系提供了理论基础和依据。

参考文献 (References)

- [1] 孙霞, 吴自勤. 分形原理及其应用 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2003: 25-26.
Sun Xia, Wu Ziqin. Fractal principle and its applications [M]. Hefei: Press of University of Science and Technology of China, 2003: 25-26.
- [2] 曾超益. 三分 Cantor 尘的 Hausdorff 测度估计[J]. 湖南人文科技学院学报, 2005(5): 4-6.
Zeng Chaoyi. Journal of Hunan Institute of Humanities Science and Technology, 2005(5): 4-6.
- [3] 曾超益, 许绍元. Cantor 尘的 Hausdorff 测度的初等证明 [J]. 数学的实践与认识, 2003(6): 76-82.
Zeng Chaoyi, Xu Shaoyuan. Mathematics in Practice and Theory, 2003 (6): 76-82.
- [4] 法尔科内·肯尼思. 分形几何-数学基础及其应用[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 1991: 149-159.
Falconer K J. Fractal geometry -mathematical foundations and applications [M]. Shenyang: Press of North East University, 1991: 149-159.

(责任编辑 代丽)

第6届国际稀土开发与 应用研讨会

时 间: 2010年8月
地 点: 北京

主办单位: 中国稀土学会

通信地址: 北京市海淀区学院南路76号
中国稀土学会办公室 (100081)
电 话: 010-62182748
传 真: 010-62173501
电子信箱: csre@cs-re.org.cn