

一类带有纽结分支的内在链图

任秋萍¹, 王光辉²

1. 黑龙江科技学院数力系, 哈尔滨 150027

2. 黑龙江科技学院计算机与信息工程学院, 哈尔滨 150027

摘要 空间图理论是纽结拓扑理论的自然拓广, 是当前拓扑学中很活跃的分支。内在链图和内在纽结图是近年来比较新的一个研究领域, 也是空间图中的两类重要的图。本文结合内在链图和内在纽结图的性质, 构造了一类兼具内在链图与内在纽结图性质的图, 带有纽结分支的内在链图, 这个图的每个空间嵌入中都包含一个非分离的链, 且这个链中至少有一个分支是非平凡的纽结。针对 Petersen 图 P_8 , 本文利用两个 Petersen 图 $K_{3,3,1}$ 与中间边组成图的方法形成 Petersen 图中的 P_8 。得到了一类带有纽结分支的内在链图 $F(104)$, 并证明了图 $F(104)$ 是带有纽结分支的内在链图。

关键词 空间图; 内在链图; 内在纽结图; 带纽结分支的内在链图

中图分类号 O189.21

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2009)22-0099-03

A Kind of Intrinsically linked graphs with knotted components

REN Qiuping¹, WANG Guanghui²

1. Department of Mathematics and Mechanics, Heilongjiang Institute of Science and Technology, Harbin 150027, China

2. College of Computer & Information Engineering, Heilongjiang Institute of Science and Technology, Harbin 150027, China

Abstract The spatial graph theory is a natural generalization of the knotted topology theory, as an active branch of the topology. In recent years, intrinsically linked and intrinsically knotted graphs, as very important graphs in spatial graphs, are becoming targets of some relatively new research areas. The study of intrinsic linking and knotting began in 1983 when Conway and Gordon showed that every embedding of K_6 (the complete graph on six vertices) contains a non-trivial link, K_6 is an intrinsically linked graph, every embedding of K_7 (the complete graph on seven vertices) contains a non-trivial knot, K_7 is an intrinsically knotted graph. This paper combines the two properties of intrinsic linking and intrinsic knotting together, constructs a graph with those two properties, as an intrinsically linked graph with knotted components such that every spatial embedding of this graph contains a non-split link, where at least one of the components of this link is a nontrivial knot. To construct the Petersen graph P_8 , this paper uses the method of

forming the graph with two graphs $K_{3,3,1}$ and edges. A kind of intrinsically linked graphs with knotted components $F(104)$ is obtained.

Keywords spatial graphs; intrinsically linked graphs; intrinsically knotted graphs; intrinsically linked graphs with knotted components

0 引言

空间图理论是拓扑学中一个很重要的分支, 已经成为许多学科, 如计算机、化学和基因工程中的一个重要的研究工具。空间图理论的研究通常与链以及纽结联系得极为紧密。

空间图理论中一类比较重要的研究问题是图在 R^3 嵌入中的“内在”问题, 即: 不论怎样把图嵌入到 R^3 中, 它的每个空间嵌入中都包含非分离的链环, 或者非平凡的纽结。也就是说, 这是图“内在”的性质, 和它怎样嵌入是无关的。1983 年, Conway 和 Gordon^[1]首次得到 K_6 (6 个点的完全图) 的每个嵌入中包含了一个非分离的链, 即 K_6 是内在链图。 K_7 (7 个点的完全图) 的每个嵌入中包含了一个非平凡的纽结, 即 K_7 是内在纽结图。随着研究的广泛和深入, 得到了一系列的内在链图与内在纽结图。能否把内在纽结图和内在链图的性质联系在一起, 构造出同时具有这两种性质的图呢? T. Fleming^[2]构造出了带有纽结分支的内在链图, 用两个 Petersen 图 $K_{3,3,1}$ 与中间边组成的图形成 Petersen 图中的 K_6 和 $K_{3,3,1}$, 进而构造带有纽结分支的内在链图。本文针对 Petersen 图 P_8 进行研究, 得到了用两个 $K_{3,3,1}$ 与中间边组成的图形成 Petersen 图中的 P_8 , 同样也可以构造出一种带有纽结分支的内在链图。

本文在分片线性的范畴进行研究, 设图 G 是一个有限

收稿日期: 2009-08-06

作者简介: 任秋萍, 助教, 研究方向为低维拓扑学理论, 电子邮箱: xineraaa@tom.com

图,即图的边数和点数是有限的。用惯用方式,将图 G 看作一个拓扑空间,即一维 CW 复形。空间图指的是一个嵌入在三维欧氏空间 R^3 中的图,空间嵌入指的是一个图在三维欧氏空间 R^3 中的嵌入。

1 预备知识

定义 1 将图 G 嵌入在 R^3 中不交圈的有限集合,称为图 G 在 R^3 中的链。将图 G 嵌入在 R^3 中的圈,称为图 G 在 R^3 中的纽结^[3]。

在 R^3 中,若不存与链不相交的球面分离了链的分支,则称这个链为非分离的链。反之,称为分离的链。若图中的纽结在 R^3 中不能界定圆片,则称这个纽结为非平凡的纽结。反之,称为平凡的纽结。

定义 2 若图 G 在 R^3 的每个空间嵌入中都包含了不交的圈组成的非分离链,则称图 G 为内在链图^[4]。

定义 3 若图 G 在 R^3 的每个空间嵌入中都包含了圈形成的非平凡纽结,则称图 G 为内在纽结图^[4]。

定义 4 若一个图在 R^3 的每个空间嵌入中都包含一个非分离的链,且这个链中至少有一个分支是非平凡的纽结,则称这个图为带有纽结分支的内在链图^[2]。

下面介绍关于纽结的 α -不变量。

定义 5 纽结 K 的 Conway 多项式 $\nabla_K(z)$ 中的 z^2 的系数,称为纽结 K 的 α -不变量。记为 $\alpha(K) \in \mathbb{Z}_2^{[5]}$ 。

文献[1]中介绍了 α -不变量的应用,且知平凡纽结的 α -不变量是 0。

设 G 是一个有重边的图,如图 1 所示。令 $e_1 \sim e_8$ 表示 G 的 8 条边, C_1, C_2, C_3, C_4 表示 G 中长度为 2 的 4 个圈,并令 C_i 是由 e_{2i-1} 和 e_{2i} 组成的圈。 $lk(C_i, C_j)$ 表示圈 C_i, C_j 的链环数,且令

$$\sigma = \sum_{s \in S} \alpha(s) (\text{mod } 2).$$

引理 1 对于图 1 中 G 的一个嵌入, $\sigma \neq 0$, 当且仅当 $lk(C_1, C_3) \neq 0$ 和 $lk(C_2, C_4) \neq 0$ ^[6]。

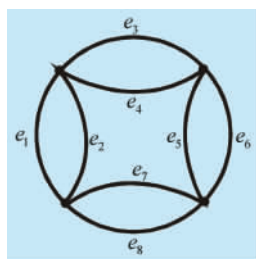


图 1 图 G
Fig. 1 Graph G

2 带有纽结分支的内在链图

由引理 1 知,由两个 Petersen 图 $K_{3,3,1}$ 与中间边组成的图 F 是内在纽结图,且对于图 F 中的任意空间嵌入,都至少存在一个包含直边 ab 的纽结,如图 2 所示。

于是,有

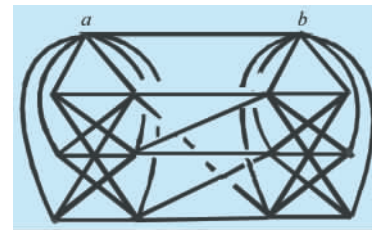


图 2 图 F
Fig. 2 Graph F

定理 图 $F(104)$ 是带有纽结分支的内在链图。

证明 首先,介绍本文构造图 $F(104)$ 的具体方法。

需要利用 Petersen 图 P_8, P_8 如图 3 所示。通过分析 P_8 中链的两个分支可知,在 P_8 中互不相交的圈为 PCD 与 $BOEFA$ 、 PCF 与 $BOEDA$ 、 PAF 与 $BOEDC$ 、 PAD 与 $BOEFC$ 、 $POED$ 与 $ABCF$ 、 $POEF$ 与 $ABCD$ 、 $POBC$ 与 $ADEF$,以及 $POBA$ 与 $CDEF$ 。因此,过点 P 的圈且存在与它不交的圈为 PCD 、 PCF 、 PAF 、 PAD 、 $POED$ 、 $POEF$ 、 $POBC$,以及 $POBA$ 。

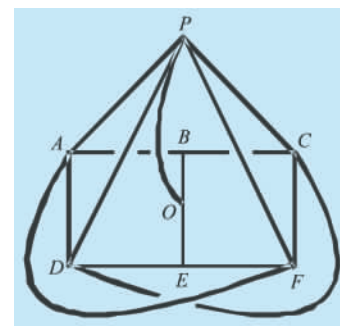


图 3 图 P_8
Fig. 3 Graph P_8

记 $\textcircled{F}$ 为图 F 去掉直边后得到的图,则图 F 可以简化为 F_0 。将图 F_0 中的直边连着的点进行一次点扩张得到的图记为 F_1 ,经过两次点扩张得到的图记为 F_2 ,如图 4 所示。然后,取 F_1 的 4 个拷贝,分别记为 $F_{1,1}, F_{1,2}, F_{1,3}$ 和 $F_{1,4}$,点分别标为 $A, P, D, C, P, F, A, P, F$ 和 C, P, D 。先将 $F_{1,1}$ 与 $F_{1,2}$ 的 P 点粘起,放置如下图 5 所示,再把 $F_{1,3}$ 的边 $A-P-F$ 粘到构造图中的边 $A-P-F$, $F_{1,4}$ 的边 $C-P-D$ 粘到构造图中的边 $C-P-D$ 。接下来,取 F_2 的 4 个拷贝,分别记为 $F_{2,1}, F_{2,2}, F_{2,3}$ 和 $F_{2,4}$,点分别标为 $E, O, P, D, E, O, P, F, A, P, O, B$ 和 C, P, O, B ,把 $F_{2,1}$ 的边 $P-D$ 粘到构造图中的边 $P-D$,把 $F_{2,2}$ 的边 $E-O-P-F$ 粘到构造图中的边 $E-O-P-F$,把 $F_{2,3}$ 的边 $A-P-O$ 粘到构造图中的边 $A-P-O$,把 $F_{2,4}$ 的边 $C-P-O-B$ 粘到构造图中的边 $C-P-O-B$ 。则得到的构造图即为 $F(104)$,如图 5 所示。

最后,考虑 $F(104)$ 的任意一个嵌入,由于点扩张不改变纽结圈的合痕类,因此图 F_1 、图 F_2 中的直边都落在纽结圈上。沿着这些纽结圈收缩 F_1, F_2 ,并删掉任何与它们平行的边,则图 $F(104)$ 可收缩为 Petersen 图 P_8 。由于 P_8 的任意嵌入中都包含

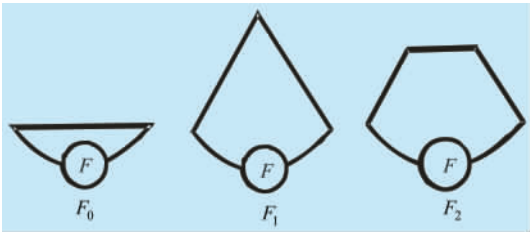


图 4 图 F 的简化图

Fig. 4 Simple graph of graph F

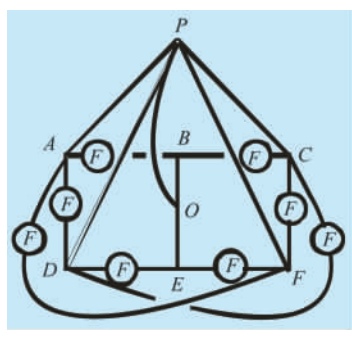


图 5 图 $F(104)$

Fig. 5 Graph $F(104)$

一对非分离的圈,且其中一个圈必包含 P 点;而过 P 点且存在不交圈的圈都是纽结圈的收缩,且点扩张和增加边不改变

纽结圈的合痕类,所以得到了图 $F(104)$ 的任意嵌入中都存在两分支的非分离的链,且至少其中一个分支是非平凡的纽结,即图 $F(104)$ 是带有纽结分支的内在链图。结论得证。

3 结论

本文结合内在链图和内在纽结图的性质,利用两个 Petersen 图 $K_{3,3,1}$ 与中间边组成的图的方法,形成 Petersen 图中的 P_8 ,进而得到了一类带有纽结分支的内在链图 $F(104)$ 。

参考文献 (References)

- [1] Conway J, Gordon C. Knots and links in spatial graphs [J]. *J Graph Theory*, 1983, 7(4): 445-453.
- [2] Fleming T, Diesl A. Intrinsically linked graphs and even linking number [J]. *Alg Geom Topology*, 2005, 5(3): 1419-1432.
- [3] Foisy J. Intrinsically knotted graphs [J]. *J Graph Theory*, 2002, 39(3): 178-187.
- [4] Adams C. The knot book [M] New York: W H Freeman and Company, 1994: 18-40.
- [5] Flapan E, Howards H, Lawrence D, et al. Intrinsic linking and knotting of graphs in arbitrary 3-manifolds [J]. *Alg Geom Topology*, 2006, 6(2): 1025-1035.
- [6] Robertson N, Seymour P D. Graph minors XX: wagner's conjecture [J]. *J Combin Theory Ser B*, 2004, 9(2): 325-357.

(责任编辑 代丽)

中国科学技术协会

“新观点新学说学术沙龙”

倡导大胆创新, 交流互动,争辩质疑

联系方式: 中国科学技术协会学会学术部 郭晓芹 联系电话: 010-68580342