

连续推力最优轨道规避

岳新成, 耿志勇

北京大学工学院力学与空天技术系; 湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京 100871

摘要 应用非线性规划方法研究了连续推力时间最优和燃料最优航天器规避问题。航天器空间飞行中, 为了避免与其他航天器或空间碎片相撞, 需采取措施实施规避策略。由于航天器最优规避问题是典型的具路径约束的轨迹优化问题, 间接法即应用极大值原理难于处理。考虑航天器推进系统为固定比冲发动机, 用改进的轨道根数描述航天器动态, 在给定最大推力幅值和中间过渡轨道时, 将规避问题划分为转移和返回两个阶段, 然后应用非线性规划方法统一考虑时间最优和燃料最优航天器最优规避问题。数值仿真结果表明, 最优规避任务能够完成; 在时间最优或燃料最优规避情形时, 航天器均以最大推力工作, 且时间最优规避时消耗燃料最少。

关键词 连续推力; 时间最优; 燃料最优; 规避; 非线性规划

中图分类号 V412.4

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2009)19-0019-05

Continuous-thrust Optimal Orbital Avoidance

YUE Xincheng, GENG Zhiyong

State Key Laboratory of Turbulence and Complex Systems;
Department of Mechanics and Aerospace Engineering, College
of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China

Abstract The nonlinear programming method is used to study the continuous -thrust minimum -time and the minimum -fuel -consumption orbital avoidance in this paper. During the spacecraft mission lifetime, a encounter with other space objects is possible and to avoid collision, some maneuver strategy is required. The optimal orbital avoidance is a typical trajectory optimization problem with path constraints, but is difficult to be solved by indirect methods. The dynamics of the spacecraft is described by the modified elements. Given the optimal parking orbit, the orbital avoidance mission is divided into transfer and roundtrip phases. Considering the minimum-time or the minimum-fuel-consumption performance, the optimal orbital avoidance problem can be formulated. Furthermore, the nonlinear programming method is applied to deal with the two phase orbital transfer problem. The simulations demonstrate that the minimum time/fuel-consumption

orbital avoidance mission is well accomplished. The simulation results also show that the spacecraft flies around the earth with the maximum thrust magnitude during its whole time history both in the minimum-time and the minimum-fuel-consumption cases.

Keywords continuous thrust; optimal time; minimum fuel-consumption; avoidance; nonlinear programming

0 引言

连续推力航天器最优轨道机动问题近年来是航天领域的一个研究热点, 轨道机动任务主要包括轨道转移、拦截和交会, 最优轨道机动则要求任务完成时间最短或者消耗燃料最少。研究最优轨道机动的方法主要有间接法和直接法两种, 间接法通常是利用极大值原理将轨迹优化问题转化为两点边值问题; 直接法则是将原来的最优控制问题转化为参数优化问题, 然后利用数学规划求解^[1-2]。

描述卫星运动的方程通常有三种, 一种是在笛卡儿坐标系下用位置和速度表示的开普勒方程; 一种是在高斯坐标系下用改进赤道轨道根数表示的高斯方程; 另一种是在球坐标系下用球半径、幅角及速度表示的运动学方程^[1]。文献[3]和[4]应用高斯方程, 分别研究了时间最优和燃料最优轨道转移问题, 应用极大值原理将最优轨道转移问题转化为两点边值问题, 然后利用打靶法求解相应的边值问题。文献[5]在太阳系系统中, 采用球坐标方程, 同样应用极大值原理研究了地球航天器与可能碰撞地球目标的拦截与交会问题。John T. Betts

收稿日期: 2009-07-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(10832006, 60874001); 《科技导报》博士生创新研究资助计划项目(kjdb20090101-5)

作者简介: 岳新成, 博士研究生, 研究方向为航天动力学与控制、机电系统控制, 电子信箱: xy916@pku.edu.cn; 耿志勇(通信作者), 教授, 研究方向为鲁棒控制, 航天动力学与控制、路径规划等, 电子信箱: zyeng@pku.edu.cn

主要应用非线性规划方法研究航天器轨道机动问题,系统地总结了轨迹优化方法的研究进展^[2],并应用非线性规划方法研究了小推力轨道转移问题^[6]。

航天器在太空飞行中,存在一定的与其他航天器或者空间碎片相撞的概率^[7]。航天器需要采取一定的措施,以避免类似美俄卫星相撞^[8]这样的事故再次发生。通常有两种方法,一是实施规避,二是发射拦截器实施拦截^[5]。因此,轨道规避问题可以描述为:已知航天器和障碍航天器的轨道根数和初始位置,航天器实施轨道机动,要求时间最短或者燃料消耗最小,以与障碍航天器相距一定的安全距离避开障碍,然后返回到原始轨道。目前的文献调研表明,连续推力规避问题并未得到广泛研究,仅在航天器编队研究中考虑了避障问题或考虑脉冲推力控制^[9]。

应用极大值原理研究规避问题,由于转化后的两点边值问题对初值的敏感性,而且考虑路径约束时需要猜测约束弧的个数和切换点,使得问题变得异常难于求解。文献[10]应用开普勒型方程和极大值原理研究了多段火星探测及返回问题。本文受文献[10]启发,应用改进的赤道轨道根数描述的运动学方程,假设存在最优中间过渡轨道,将轨道规避问题划分为转移和返回两段非线性规划问题求解,数值仿真结果表明该方法能够完成时间或燃料最优轨道规避问题。

1 问题描述

为简化问题研究,假设存在最优中间过渡轨道,航天器从初始轨道转移到过渡轨道,然后再返回原始轨道,将两段轨道转移统一考虑,研究时间或燃料最优轨道规避问题。

假设航天器为点质量体,推进系统为固定比冲常值推力发动机,则连续推力最优轨道规避问题可以具体描述为:设计最优控制器使得性能指标

$$J = \int_0^{t_f} 1 dt \text{ 或 } J = -m(t_f) \quad (1)$$

最小,即最终飞行时间 t_f 最短或任务完成时卫星质量 $m(t_f)$ 最大;同时满足航天器运动学方程^[3]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \frac{T}{m} \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \quad (2)$$

和航天器质量 m 变化方程^[3]

$$\dot{m} = -\beta T \quad (3)$$

其中, β 为与发动机比冲相关的常数, T 为发动机推力幅值。

规避问题的初始条件和终端条件分别定义为

$$\Phi_0 = (\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^0, m(0) - m^0) = 0 \quad (4)$$

$$\Phi_f = (\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}^0) = 0 \quad (5)$$

而中间过渡轨道满足约束

$$\Phi_s = (\mathbf{x}(t_s) - \mathbf{x}^s) = 0 \quad (6)$$

其中 $(\mathbf{x}^0, m^0)$ 为初始状态参数值, $\mathbf{x}^s$ 为中间过渡轨道根数值。同时,控制项推力幅值 T 和推力在轨道坐标系中的方向分量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 满足约束

$$0 \leq T \leq T_{\max} \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \quad (7)$$

航天器运动学方程常用改进的轨道根数描述, $\mathbf{x} = [P \quad e_x \quad e_y \quad h_x \quad h_y \quad L]^T$, 前 5 个参数描述航天器轨道大小和形状, 第 6 个参数确定航天器在轨道上位置。其中, P 为角动量; (e_x, e_y) 为偏心率向量, 在轨道平面, 指向近地点; (h_x, h_y) 为旋转向量, 在赤道平面, 过轨道和赤道平面的交点; L 为累积赤经。改进的轨道根数与经典轨道根数 $(a, e, i, \omega, \Omega, \theta)$ 的关系为

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{a(1-e^2)\mu} & e_x &= e \cos(\omega + \Omega) & e_y &= e \sin(\omega + \Omega) \\ h_x &= \tan \frac{i}{2} \cos \Omega & h_y &= \tan \frac{i}{2} \sin \Omega & L &= \Omega + \omega + \theta \end{aligned}$$

其中, μ 为地球引力常数, a 为半主轴, e 为偏心率, i 为轨道倾角, ω 为近地点幅角, Ω 为升交点赤经, θ 为真近点角。

若推力在轨道坐标系下沿径向-法向坐标系分解, 式(2)中定义的航天器动态的 4 个向量场为

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &= \frac{W^2}{\mu P^3} \frac{\partial}{\partial L} \\ \mathbf{f}_1 &= \frac{P}{W} \left(W \sin L \frac{\partial}{\partial e_x} - W \cos L \frac{\partial}{\partial e_y} \right) \\ \mathbf{f}_2 &= \frac{P}{W} \left(2P \frac{\partial}{\partial P} + (W \cos L + \eta_x) \frac{\partial}{\partial e_x} + (W \sin L + \eta_y) \frac{\partial}{\partial e_y} \right) \\ \mathbf{f}_3 &= \frac{P}{W} \left(-Z e_y \frac{\partial}{\partial e_x} + Z e_x \frac{\partial}{\partial e_y} + \frac{C}{2} \cos L \frac{\partial}{\partial h_x} + \frac{C}{2} \sin L \frac{\partial}{\partial h_y} + Z \frac{\partial}{\partial L} \right) \end{aligned}$$

其中的参数为

$$\begin{aligned} W &= 1 + e_x \cos L + e_y \sin L & C &= 1 + h_x^2 + h_y^2 \\ \eta_x &= e_x + \cos L & \eta_y &= e_y + \sin L & Z &= h_x \sin L - h_y \cos L \end{aligned}$$

2 非线性规划求解最优规避问题

标准的非线性规划问题可描述为:寻找向量 $\mathbf{x}$, 使得性能指标 J 最小化, 同时满足状态约束 $c_L \leq c(\mathbf{x}) \leq c_U$, 以及有界约束 $\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U$ ^[2]。对于最优控制问题, 通常采用的直接法的做法是, 先将微分方程离散化, 将原最优控制问题转化为一个参数优化问题, 从而利用非线性规划求解。本文应用配点法, 先将时间域分成 n 等份时间间隔

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_f$$

每个间隔的端点称之为配点 (collocation point), 从而每个配点上的状态和控制

$$\mathbf{y} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n\}$$

作为非线性规划变量, 再通过多项式插值得到整个最优控制过程的控制和状态参数, 根据这些参数积分状态方程形成约束条件, 从而得到一个数学规划问题。

根据上节最优规避问题的描述, 将时间最优规避问题划分为转移阶段 (p1) 和返回阶段 (p2)。令转移阶段和返回阶段需要的时间分别为 t_{p1}, t_{p2} , 则在转移阶段, 非线性规划问题满足的两端边界条件为

$$\begin{aligned} \Phi(0)_{p1} &= (P(0)_{p1} - P^0, e_x(0)_{p1} - e_x^0, e_y(0)_{p1} - e_y^0, h_x(0)_{p1} - h_x^0, \\ &h_y(0)_{p1} - h_y^0, L(0)_{p1} - L^0, m(0)_{p1} - L^0) = 0 \end{aligned}$$

$$\Phi(t_{p1})_{p1} = (P(t_{p1})_{p1} - P^s, e_x(t_{p1})_{p1} - e_x^s, e_y(t_{p1})_{p1} - e_y^s, h_x(t_{p1})_{p1} - h_x^s, h_y(t_{p1})_{p1} - h_y^s) = 0$$

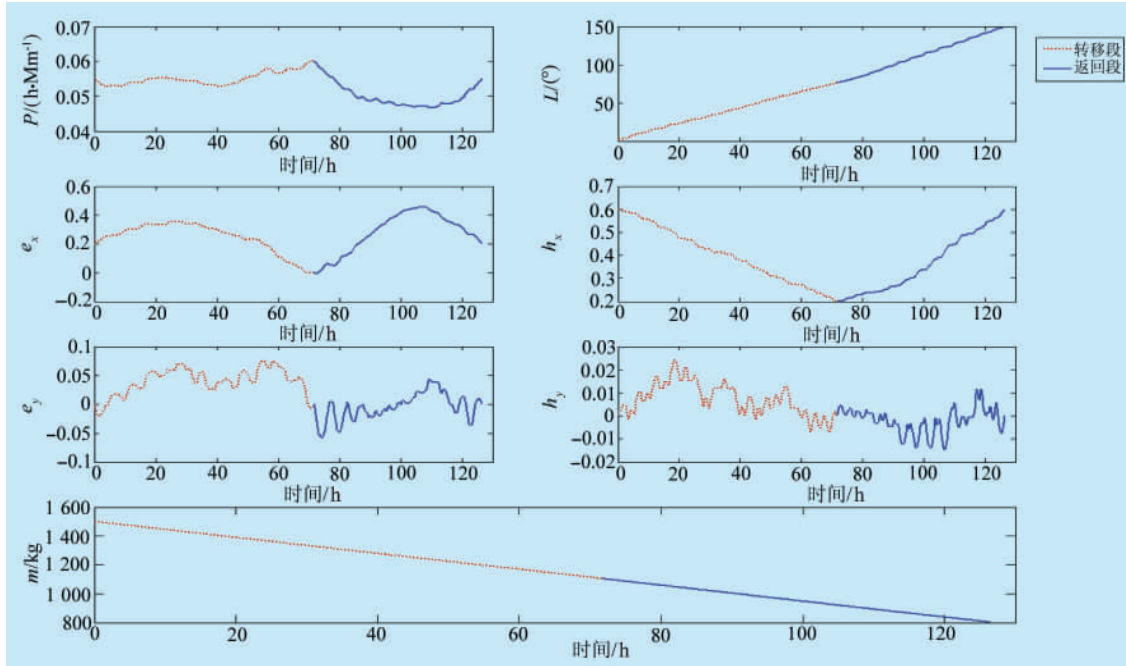


图3 状态最优变化轨迹-时间最优规避情形

Fig. 3 Optimal solution of states: the minimum time orbital avoidance case

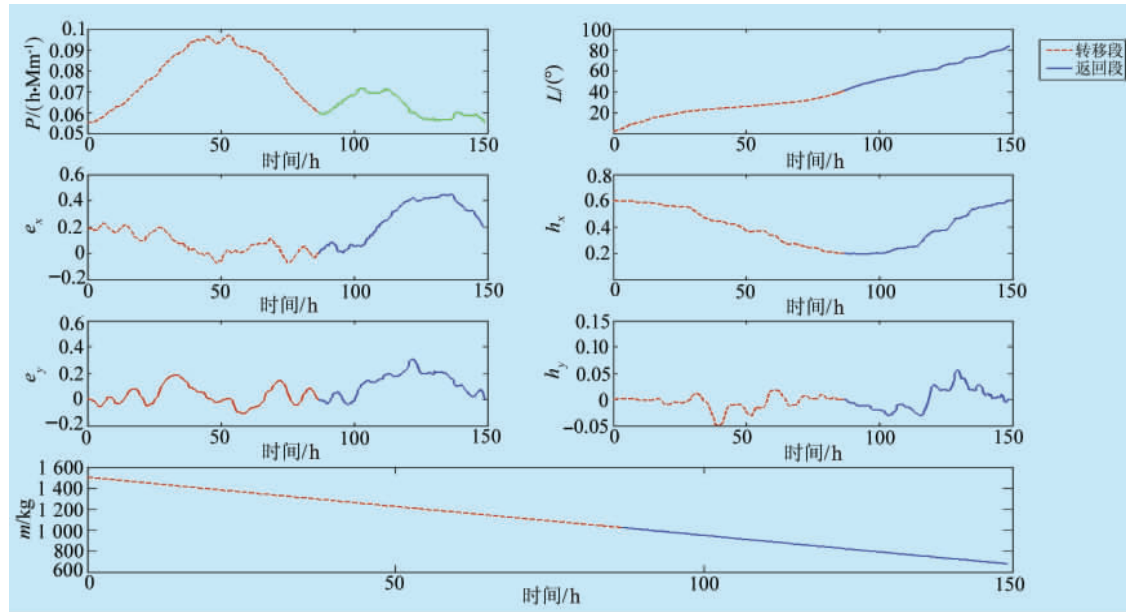


图4 状态最优变化轨迹-最小燃料消耗规避情形

Fig. 4 Optimal solution of states: the minimum fuel-consumption orbital avoidance case

出,转移阶段要比返回阶段用时较多。

第一个根数 P 可确定航天器飞行轨道的大小, (e_x, e_y) 确定椭圆轨道的偏心率, (h_x, h_y) 确定轨道倾角。由图可以看出, 根数 P 在时间最优时的转移阶段变化比较缓慢; 而在燃料最优时的转移阶段变化较大, 即航天器飞行实时椭圆轨道的半长轴变化较大; 由图 1 和图 2 的三维飞行轨迹也可以明显看出这点。轨道倾角在时间最优和燃料最优时的变化轨迹比较

相似, 而且转移阶段和返回阶段的变化几乎是对称的。根数 L 确定航天器在飞行轨道上的实时位置, 根据

$$N = \text{mod} \left(\frac{L_t - L_0}{2\pi} \right)$$

可以确定航天器绕地球的圈数 N, mod 为向下取整。时间最优规避时, 终端时刻 $L_t = 148.5^\circ$, 绕飞地球圈数约为 23; 最少燃料消耗规避时, 终端时刻 $L_t = 83.958^\circ$, 绕飞地球圈数约为 13。

由图 3 和图 4 可以看出,航天器质量与时间呈线性关系,根据质量变化方程,可知在时间最优或燃料最优时,航天器均以最大推力工作,因此航天器质量可以表示为

$$m(t)=m^0-\beta T_{\max}t$$

根据上面的表达式可知,时间最优规避时,航天器消耗的燃料也最少,但是在考虑最少燃料消耗时,航天器完成任务的飞行时间不一定是最短的。

4 结论与展望

研究常值连续推力时间最优和燃料最优规避问题,在中间过渡轨道已知的条件下,将规避问题划分为转移和返回两个阶段,然后应用非线性规划方法统一考虑时间或燃料最优规避问题。数值仿真结果表明,对于同一最大发动机推力幅值,时间最优情形与燃料最优情形相比较,航天器完成规避任务历经的飞行时间短,飞行轨迹的椭圆轨道半长轴变化较小,但是绕飞地球的圈数多。数值仿真同时也表明,在考虑时间最优或燃料最优轨道规避时,航天器均以最大推力工作。

但是,上述结论仅是数值仿真结果,并未得到理论证明。由于非线性规划方法本身的局限性,选择配点较多时,运算时间过长,而配点选择较少时,最优轨迹则非常不光滑;对于更小的最大推力幅值(如 10 N 以下),运用非线性规划方法则无法得到数值仿真结果。因此在非线性规划方法的基础上,寻求改进或者其他算法来研究最优规避问题将是进一步研究的方向。本文的数值仿真算例中,中间过渡轨道的轨道根数是随意选取的,完成规避任务的中间过渡轨道的优化选取也是一个有意义的研究方向;更进一步地,在不预先给定中间轨道情况下,研究最优航天器规避问题在理论与算法上都是一个巨大的挑战。

参考文献 (References)

- [1] Gao Yang. Advances in low-thrust trajectory optimization and flight mechanics[D]. Louisiana: University of Missouri-Columbia, 2003.
- [2] Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, 21(2): 193-207.
- [3] Bonnard B, Caillaud J-B, Trélat E. Geometric optimal control of elliptic Keplerian[J]. *Discrete and Continuous Dynamical System, Series B*, 2005, 5(4): 926-956.
- [4] Gergaud J, Haberkorn T. Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem [J]. *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, 2006, 12: 294-310.
- [5] Park S Y, Choi K H. Optimal low-thrust intercept/rendezvous trajectories to earth-crossing objects[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2005, 28(5): 1049-1055.
- [6] Betts J T. Using sparse nonlinear programming to compute low thrust orbit transfer [J]. *Journal of the Astronautical Science*, 1993, 41: 349-371.
- [7] Matney M J, Anz-Meador P, Foster J L. Covariance correlations in collision avoidance probability calculations [J]. *Advances in Space Research*, 2004, 34: 1109-1114.
- [8] US Satellite Destroyed in Space Collision [R/OL]. <http://www.space.com/news/090211-satellite-collision.html>. [2009-02-11].
- [9] Sánchez-Ortiz N, Belló-Mora M, Klinkrad H. Collision avoidance maneuvers during spacecraft mission lifetime: Risk reduction and required ΔV [J]. *Advances in Space Research*, 2006, 38: 2107-2116.
- [10] Ranieri C L, Ocampo C A. Optimization of roundtrip, time-constrained, finite burn trajectories via an indirect method [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2005, 28(2): 306-314.
- [11] Rutquist P E, Edvall M M. PROPT-Matlab Optimal Control Software [R]. Tomlab Optimization Inc, 2009.

(责任编辑 代丽)

·学术动态·

“第 7 届天津青年科技论坛”征文

为促进青年科技人才成长、推动自主创新与科技进步,天津市科协搭建了学术交流平台——“天津青年科技论坛”。论坛旨在调动青年科技人员的积极性、主动性和创造性,凝聚广大青年科技工作者的智慧和力量,服务天津经济社会又好又快发展。自 1995 年创办以来,每两年举办一次,至今已连续举办 6 届。“第 7 届天津青年科技论坛”将于 2010 年 5 月举办。现面向全市青年科技工作者征集科技论文。全部应征论文将由论坛执行委员会专家进行评审,并选择其中的优秀论文编辑出版《第 7 届天津青年科技论坛论文集》(天津科技出版社出版,ISBN 书号)。

论文申报截止日期为 2009 年 12 月 31 日。

联系方式:天津市和平区和平路 287 号(300041) 王黎明,苏雅宁;电话:022-27122522;传真:022-27121601;电子邮箱:tjskxhnb@yahoo.com.cn。