



一类带非线性对数项的拟线性椭圆方程解的存在性

崔周进, 徐 兵

解放军理工大学数理系, 南京 211101

摘要 研究了球内带非线性对数项的拟线性椭圆方程 $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \log u + h(x)u^q$ 带纽曼边值问题解的存在性, 推广了 De Queiroz 的相关结论, De Queiroz 研究的是 $p=2$ 时解的存在性。利用双摄动理论, 首先对参数 $0 < \varepsilon < 1$ 考虑一组逼近问题 $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \log\left(\frac{u^2 + \varepsilon u + \varepsilon}{u + \varepsilon}\right) + h(x)u^q$ 解的存在性。由于不能直接利用 Poincaré 不等式去求解上述逼近问题, 所以对于每个 $0 < r < R$, 定义另外一个区域 $A_{r\varepsilon} = B_R \setminus \bar{B}_r$, 考虑在 $A_{r\varepsilon}$ 上逼近问题解的存在性, 当 $r \rightarrow 0^+$ 时可以得到逼近问题解的存在性。最后令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 求出逼近问题解的极限, 得到所研究问题存在一个径向的正解 $u \in C^1(\bar{B}_R \setminus \{0\}) \cap C(\bar{B}_R)$ 。

关键词 奇异椭圆方程; 纽曼边值问题; 正则性; 双摄动理论

中图分类号 O175.23

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2009)02-0043-04

A Neumann Problem for Quasilinear Elliptic Equation with Logarithmic Nonlinearity in a Ball

CUI Zhoujin, XU Bing

Department of Applied Mathematics and Physics, PLA
University of Science and Technology, Nanjing 211101, China

Abstract The nonlinear quasilinear elliptic problem $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \log u + h(x)u^q$ in a ball $B_R \subset R^n$ with Neumann boundary conditions on ∂B_R are studied. For each $0 < \varepsilon < 1$, a family of approximate problems $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \log\left(\frac{u^2 + \varepsilon u + \varepsilon}{u + \varepsilon}\right) + h(x)u^q$ is considered. Then, it is natural to look for a family of solutions of this problem and then to pass the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$ to obtain a solution to the first problem. Because we cannot use Poincaré inequality to solve the second problem directly by variational methods, for each $0 < r < R$, $A_{r\varepsilon} = B_R \setminus \bar{B}_r$ is defined. Consider the third family of the problem, a solution to the second problem is obtained when $r \rightarrow 0^+$. By means of a double perturbation argument, a positive radial solution $u \in C^1(\bar{B}_R \setminus \{0\}) \cap C(\bar{B}_R)$ is obtained.

Keywords singular elliptic equation; neumann problem; regularity; double perturbation argument

0 引言

在本文中, 研究了如下形式的椭圆方程

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \log u + h(x)u^q & B_R \text{ 内} \\ u > 0 & B_R \text{ 内} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \partial B_R \text{ 上} \end{cases} \quad (1)$$

径向正解的存在性。其中, $B_R = B_R(0) \subset R^n$ 为球域, ν 为 ∂B_R 单位外法向量, $p \geq 2, n \geq 1$ 。本文中假设 $h \geq 0$ 是一个径向的 C^1 函数, 即 $h(x) = h(|x|)$ 。

这个问题产生于研究非牛顿湍流^[1-2]和非牛顿渗流^[3], 以及多孔介质中的气体渗流等问题。在非牛顿湍流理论中, 数量 p 用来描述介质的特征。 $p > 2$ 时, 媒质称为膨胀流; $p < 2$ 时, 媒质称为伪塑流; $p = 2$ 时, 称为牛顿流。

$p = 2$ 时, 许多作者研究过类似于方程(1)的 p -Laplace 问题。在文章中一般利用 Δ 算子一些好的性质, 如极大值原理以及比较原理等。另外 $p > 1$ 时, p -Laplace 方程在有界空间内解的存在性及结构也已进行过充分研究。对于 $p \neq 2$ 的情形, 最大的障碍是 $p = 2$ 时的一系列好的性质不再成立或者难以验证。

非线性奇异边值问题有相当丰富的背景, 例如热传导问题^[4], 人口增长问题^[5]以及多孔介质问题^[6]。近几十年, 对椭圆方程边界问题已经进行了比较充分的研究, 证明解的存在性及唯一性的方法可以参见文献[4~8]。最近, 在文献[7]中利用上下解方法研究了源于生态模式的强耦合椭圆系统古典解的存在性。但是, 绝大多数文献考查的都是 Dirichlet 边值问

收稿日期: 2008-11-18

基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金项目(08KJB110005)

作者简介: 崔周进, 助教, 研究方向为偏微分方程和应用, 电子信箱: cuizhoujin@126.com

题,对 Neumann 边值问题研究较少。文献[9~11]中,作者研究了带 Neumann 边值条件的椭圆问题。文献[9]中考查了如下形式的拟线性椭圆问题:

$$\begin{cases} \varepsilon^N \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) - u^{p-1} + f(u) = 0 & \Omega \text{ 内} \\ u > 0 & \Omega \text{ 内} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \quad (2)$$

作者利用山路引理得到了方程正解的渐近行为。 $p=2$ 时,方程(2)解的渐近行为在文献[10,11]中已进行了研究。

研究问题(1)的方法是采用双摄动理论。首先,类似于文献[12,13],对于每个 $0 < \varepsilon < 1$,考虑一组逼近问题

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \log \frac{u^2 + \varepsilon u + \varepsilon}{u + \varepsilon} + h(x)u^q & B_R \text{ 内} \\ u > 0 & B_R \text{ 内} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \partial B_R \text{ 上} \end{cases} \quad (3)$$

很自然地去寻求上述问题(3)的一组解,然后令 $\varepsilon \rightarrow 0$,求出解的极限,这样就可以得到问题(1)的解。

对于每个 $0 < r < R$,定义区域 $A_{rR} := B_R \setminus \bar{B}_r$ 。考虑另外一组问题:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \log \frac{u^2 + \varepsilon u + \varepsilon}{u + \varepsilon} + h(x)u^q & A_{rR} \text{ 内} \\ u > 0 & A_{rR} \text{ 内} \\ u = \theta & \partial B_r \text{ 上} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \partial B_R \text{ 上} \end{cases} \quad (4)$$

这里 $\theta > 0$ 是一个常数。当 $r \rightarrow 0^+$ 时,可以得到问题(3)的一个解。引入问题(4)是因为不能直接利用 Poincaré 不等式去求解(3)。

本文主要结论如下:

定理 1 假设 $h \geq 0$ 是一个径向 C^1 函数,那么问题(1)存在一个径向正解 $u \in C^1(\bar{B}_R \setminus \{0\}) \cap C(\bar{B}_R)$ 。

注记 1 如果把问题(1)右端的对数项变成一个更一般的奇异函数,定理 1 结论依然成立。实际上,假设函数 $g:(0,1) \rightarrow R$ 是一个光滑函数,使得 $\lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) = -\infty$ 和 $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{g(s)}{s^m} = 1$ 成立,这里 $m \in (0,1)$ 。那么,可以用一组关于参数 ε 连续递减的函数 g_ε 近似地代替 g ,使得 $g_\varepsilon(0) = 0$,并且当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,对于 $s \in (0, \infty)$ 有 $g_\varepsilon(s) \rightarrow g(s)$ 。对于 $\varepsilon_0 > 0$ 时 $g_{\varepsilon_0} \geq 0$ 的情况,这样的修改能够类似地进行下去,本文第 2 节的结论只要进行一些小修改依然成立。

本文的结构是,第 1 节寻求问题(4)的上下解并且得到上解的估计;第 2 节证明问题(4)解的存在性;第 3 节对于问题(4)令 $r \rightarrow 0^+$,得到问题(3)解的存在性;最后证明定理 1 的结论成立。

1 方程(4)的上下解

引理 2 假设 $\theta \geq 1$,那么 $\underline{u} \equiv 1$ 是问题(4)的下解,并且不

依赖于 $0 < \varepsilon \leq 1$ 和常数 θ 。

证明 很明显,既然在 B_R 内 $h \geq 0$,那么下面不等式对任意 $0 < \varepsilon \leq 1$ 和 $\theta \geq 1$ 都是成立的:

$$\log \frac{1 + \varepsilon + \varepsilon}{1 + \varepsilon} + h(x) \geq \log 1 = 0$$

证明完毕。

下面需要寻求(4)的上解。假设 X_r 为空间 $H^1(A_{rR})$ 的子空间,即

$$X_r := \{u \in H^1(A_{rR}) \mid \text{在 } \partial B_r \text{ 上 } u = 0\}$$

对任意 $v \in X_r$,定义表达式

$$|v|_r := \left(\int_{A_{rR}} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \quad (5)$$

注:表达式 $|\cdot|_r$ 定义了空间 X_r 上的一个范数,并有 $(X_r, |\cdot|_r)$ 为一个自反巴拉赫空间。进一步由文献[14]的式(7.44),在 X_r 上 Poincaré 不等式成立,即存在 $\eta > 0$,使得

$$\int_{A_{rR}} v^p dx \leq \eta \int_{A_{rR}} |\nabla v|^p dx$$

接下来考虑一种特殊情况,当 $\varepsilon = 1$ 时,问题(4)的径向形式为

$$\begin{cases} -(s^{n-1} \phi_p(u'))' = s^{n-1} \log \frac{u^2 + u + 1}{u + 1} + s^{n-1} h(s) u^q & r < s < R \\ u > 0 & r < s < R \\ u(r) = \theta \\ u'(R) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s$ 。注意到当 $u \geq 0$ 时,有 $\log \frac{u^2 + u + 1}{u + 1} \geq 0$ 。为了简单起见,定义

$$f(s, z) = \log \frac{z^2 + z + 1}{z + 1} + h(s)z^q$$

那么,如果 v 是

$$\begin{cases} -(s^{n-1} \phi_p(v'))' = s^{n-1} f(s, v + \theta) & r < s < R \\ v > 0 & r < s < R \\ v(r) = \theta \\ v'(R) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

的解,可以得到 $v + \theta$ 是方程(6)的解。下面通过寻求一个泛函极小值得到解 v 的存在性。假设 $S \subset X_r$ 为关于原点对称函数的集合。定义泛函 $\Phi: S \rightarrow R$ 为

$$\Phi(v) = \frac{1}{p} \int_r^R s^{n-1} |v'|^p ds + \int_r^R s^{n-1} F(s, v(s)) s^{n-1} ds$$

其中, $F(s, v(s)) = \int_0^v f(s, (z + \theta)^+) dz$, $z^+ := \max\{z, 0\}$ 。

定理 3 泛函 $\Phi \in C^1$ 弱下半连续,那么存在 $v \in X_r$,使得

$$\Phi(v) = \min_{u \in X_r} \Phi(u) \quad \Phi'(v) = 0$$

既然 v 是式(7)的弱解,可以得到

$$v(s) = \int_r^s \phi_p^{-1} \left[t^{1-N} \int_t^R z^{N-1} f(z, v(z) + \theta) dz \right] dt$$

其中

$$\phi_p^{-1}(u) = \begin{cases} u^{\frac{1}{p-1}} & u \geq 0 \\ -(-u)^{\frac{1}{p-1}} & u < 0 \end{cases}$$

定义 $u_r := v + \theta$ 。

引理 4 假设 $\theta \geq 1$, 那么函数 $\bar{u} = u_r$ 是方程 (4) 的一个上解, 并且不依赖于 $0 < \varepsilon \leq 1$ 。

证明 显然, 对任意 $0 < \varepsilon \leq 1$, 方程 (6) 的解是 (4) 的一个上解, 在 $[r, R]$ 上 u_r 是方程 (6) 的解, 并且 $u_r \geq \theta \geq u$ 。

既然函数 f 是光滑的,

$$u_r(s) = \theta + \int_r^s \phi_p^{-1} \left[t^{1-N} \int_t^R z^{N-1} f(z, u_r(z)) dz \right] dt \quad (8)$$

那么有 $u_r \in C^1[r, R]$ 。

引理 5 存在常数 $M > 0$, 使得 $|u_r|_\infty \leq M$, 并且常数 M 不依赖于 $r \in (0, R)$ 。进一步对任意 $\rho \in (0, R)$, 存在常数 C_ρ 和 $r_\rho \in (0, R)$, 使得对任意 $r \in (0, r_\rho)$, 下面的估计成立:

$$|u_r|_{C^0[\rho, R]}, |u_r|_{C^1[\rho, R]}, |\phi_p(u_r')|_{C^1[\rho, R]} \leq C_\rho$$

证明 由式 (8) 可得, 存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 以及 $q \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} u_r(s) &\leq \theta + \int_r^R \phi_p^{-1} \left[t^{1-N} \int_t^R z^{N-1} f(z, u_r(z)) dz \right] dt \\ &\leq \theta + C_1 \int_r^R \phi_p^{-1} \left[t^{1-N} \int_t^R z^{N-1} (u_r(z))^q dz \right] dt \\ &\leq C_2 + C_1 |u_r(z)|_\infty^{\frac{q}{p-1}} \int_r^R \phi_p^{-1} \left(t^{1-N} \int_t^R z^{N-1} dz \right) dt \end{aligned} \quad (9)$$

但对于某些不依赖于 r 的常数, 有

$$\int_r^R \phi_p^{-1} \left[t^{1-N} \int_t^R z^{N-1} dz \right] dt \leq C_3$$

那么, 有 $|u_r(z)|_\infty \leq C_2 + C_4 |u_r(z)|_\infty^{\frac{q}{p-1}}$, 也即 $|u_r(z)|_\infty \leq M$, 其中 $M > 0$ 不依赖于 r 。实际上, 既然

$$|u_r(z)|_\infty^{\frac{p-1-q}{p-1}} \leq C_2 |u_r(z)|_\infty^{\frac{-q}{p-1}} + C_4$$

那么, 当 $r \rightarrow 0$ 时, $|u_r(z)|_\infty \rightarrow \infty$, 得到矛盾。由 $|u_r(z)|_\infty$ 的估计, 可以得到关于 u_r 的其他相关估计。

2 方程 (4) 解的存在性

在本节中, 利用第 1 节得到的上下解 ($\underline{u}$ 和 u_r) 得到方程 (4) 的解。定义函数

$$g_\varepsilon(s, u) := s^{n-1} \log \frac{u^2 + \varepsilon u + \varepsilon}{u + \varepsilon} + s^{n-1} h(x) u^q + a u \quad s \in [r, R] \quad u \geq 0$$

其中, 选择常数 a , 使得对于任意 $s \in [r, R]$, $u \rightarrow g_\varepsilon(s, u)$ 递增。首先令 $u_0 = u$ 构造序列 u_n , 使得每个 u_n 满足

$$\begin{cases} -(s^{n-1} \phi_p(u_{n+1}'))' + a u_{n+1} = g_\varepsilon(s, u_n) & r < s < R \\ u_{n+1} > 0 & r < s < R \\ u_{n+1}(r) = \theta \\ u_{n+1}'(R) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

由文献 [9], 可以得到如下引理。

引理 6 (弱比较原理) 令 Ω 为 R^N ($N \geq 2$) 中的有界空间并且具有光滑边界 $\partial\Omega$, $\theta: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 为连续非减函数, 假设 $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$, 对于任意非负函数 $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 满足

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla \psi dx + \int_\Omega \theta(u_1) \psi dx \leq$$

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \nabla \psi dx + \int_\Omega \theta(u_2) \psi dx$$

那么, 由在 $\partial\Omega$ 上 $u_1 \leq u_2$ 可以得到在 Ω 内 $u_1 \leq u_2$ 。

引理 7 序列 $\{u_n\}$ 非减, 并且对于任意 $s \in [r, R]$, $n \in N$, 满足

$$u_0(s) \leq u_n(s) \leq u_{n+1}(s) \leq u_r(s)$$

证明 只需证明 $u_0 \leq u_1 \leq u_r$, 一般的结论可以类似地推得。

可知

$$\begin{cases} -(s^{n-1} \phi_p(u_0'))' + a(u_0) \leq -(s^{n-1} \phi_p(u_1'))' + a(u_1) & r < s < R \\ (u_0 - u_1)(r) \leq 0 \\ (u_0 - u_1)'(R) = 0 \end{cases}$$

因此, 由引理 6 可以得到在 $[r, R]$ 上 $u_0 \leq u_1$ 。又因为

$$\begin{cases} -(s^{n-1} \phi_p(u_1'))' + a(u_1) \leq -(s^{n-1} \phi_p(u_r'))' + a(u_r) & r < s < R \\ (u_1 - u_r)(r) \leq 0 \\ (u_1 - u_r)'(R) = 0 \end{cases}$$

所以, 类似可以得到在 $[r, R]$ 上 $u_1 \leq u_r$ 。

由引理 7 定义极限形式 $u^\varepsilon(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(s)$, $s \in [r, R]$, 可以得到

到

$$1 \leq u_r^\varepsilon \leq u_r(s) \quad s \in [r, R]$$

实际上, 函数 u_r^ε 是方程 (4) 的一个解。

引理 8 函数 u_r^ε 是方程 (4) 的一个解, 并有 $u_r^\varepsilon \in C^1[r, R]$ 。

证明 对于每个 $n \in N$, 有

$$u_n(s) = \theta + \int_r^s \phi_p^{-1} \left[t^{1-N} \int_t^R z^{N-1} \left(\log \frac{u_n^2 + \varepsilon u_n + \varepsilon}{u_n + \varepsilon} + h(x) u_n^q \right) dz \right] dt$$

既然对于任意 $n \in N$, $1 \leq u_n \leq M$, 则在 $C^1[r, R]$ 中有 $u_n \rightarrow u_r^\varepsilon$ 成立。

3 方程 (3) 解的存在性

在本节中令 $r \rightarrow 0^+$, 求方程 (4) 解的极限, 这样可以得到方程 (3) 的解。

引理 9 对于给定的 $0 < \varepsilon \leq 1$, 当 $r \rightarrow 0^+$ 时, 求 u_r^ε 的极限, 即可得到方程 (3) 的解 u^ε 。

证明 为简单起见, 对于 u_r^ε 略去要求 $\varepsilon > 0$ 。前面已经得到

$$u_r(s) = \theta + \int_r^s \phi_p^{-1} \left[t^{1-N} \int_t^R z^{N-1} \left(\log \frac{u_r^2 + \varepsilon u_r + \varepsilon}{u_r + \varepsilon} + h(x) u_r^q \right) dz \right] dt$$

并且已经知道 $s \in [r, R]$ 时 $1 \leq u_r \leq M$ 。类似于引理 5 可以证明, 对于任意 $\rho \in (0, R)$, 存在常数 $C_\rho > 0$ 和 $r_\rho \in (0, R)$, 使得对于任意 $r \in (0, r_\rho)$, 下列估计成立:

$$|u_r|_{C^0[\rho, R]}, |u_r|_{C^1[\rho, R]}, |\phi_p(u_r')|_{C^1[\rho, R]} \leq C_\rho$$

由紧嵌入 $C^1[\rho, R] \rightarrow C^0[\rho, R]$, 可知, 存在定义在 $(0, R]$ 上的序列 r_n 和 u^ε , 使得得到的新的序列 $w_n := u_{r_n}$ 有下面结论成立:

在 $C_{loc}^1(0, R)$ 上, $w_n \rightarrow u^\varepsilon$, 以及在 $C^1[\rho, R]$ 上, $w_n \rightarrow u^\varepsilon$ 。

4 定理 1 的证明

最后, 利用第 3 节中得到的一组解取极限得到方程 (1) 的解。为了得到结论, 类似于引理 5, 首先得到一系列估计, 这些估计也是不依赖于参数 ε 的。

首先, 得到在 $(0, R)$ 上成立的估计如下:

$$1 \leq u^\varepsilon \leq M \quad (11)$$

注意到序列 $(u^\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$ 满足当 $\varepsilon > 0$ 时 u^ε 解的性质, 因此有

$$u^\varepsilon(s) = u^\varepsilon(R/2) + \int_{R/2}^s \phi_p^{-1} \left[t^{1-N} \int_t^R z^{N-1} \left(\log \frac{u^{\varepsilon 2} + \varepsilon u^\varepsilon + \varepsilon}{u^\varepsilon + \varepsilon} + h(x) u^\varepsilon \right) dz \right] dt \quad s \in [R/2, R] \quad (12)$$

以及

$$u^\varepsilon(s) = u^\varepsilon(R/2) - \int_s^{R/2} \phi_p^{-1} \left[t^{1-N} \int_t^R z^{N-1} \left(\log \frac{u^{\varepsilon 2} + \varepsilon u^\varepsilon + \varepsilon}{u^\varepsilon + \varepsilon} + h(x) u^\varepsilon \right) dz \right] dt \quad s \in (0, R/2] \quad (13)$$

类似于引理 5, 由方程 (11)~(13) 可得, 对于每个 $\rho \in (0, R)$, 存在常数 $C_\rho > 0$ 和 $\varepsilon_\rho \in (0, R)$, 使得对任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\rho)$, 下述估计成立:

$$|u^\varepsilon|_{C^0[\rho, R]}, |u^\varepsilon|_{C^1[\rho, R]}, |\phi_p(u^\varepsilon)|_{C^1[\rho, R]} \leq C_\rho$$

所以, 类似于第 3 节的方法, 可以找到一个解 u , 满足

$$\begin{cases} -(s^{n-1} \phi_p(u'))' = s^{n-1} \log u + s^{n-1} h(s) u^q & r < s < R \\ u > 0 & r < s < R \\ u'(R) = 0 \end{cases}$$

即 u 是方程 (1) 的径向解, 并且可得到 $u \in C^1(0, R) \cap C(0, R]$ 。把解 u 连续延拓到整个区间 $[0, R]$ 。令 r_i 是 $(0, R/2)$ 上的序列, 并且 $i \rightarrow \infty$ 时有 $r_i \rightarrow 0$ 。从方程 (7) 可得

$$u(r_i) = u(R/2) - \int_{r_i}^{R/2} \phi_p^{-1} \left[t^{1-N} \int_t^R z^{N-1} (\log u + h(x) u^q) dz \right] dt$$

如果 $r_j > r_i$, 可知

$$|u(r_j) - u(r_i)| = \left| \int_{r_i}^{r_j} \phi_p^{-1} \left[t^{1-N} \int_t^R z^{N-1} (\log u + h(x) u^q) dz \right] dt \right|$$

由方程 (11) 可以得到存在常数 $C > 0$, 使得 $|u(r_j) - u(r_i)| \leq C |r_j - r_i|$, 所以 $u(r_i)$ 是 R 上的 Cauchy 列。定义 L 为此序列的极限, 可以得到, 如果 s_i 是 $(0, R/2)$ 上的另外一组收敛到 0 的序列, 那么也有 $u(s_i) \rightarrow L$ 。因此, 就得到了 $\lim_{r \rightarrow 0} u(r) = L$, 定理 1 证明完毕。

5 总结

本文研究了拟线性椭圆方程带纽曼边值问题解的存在性。纽曼边值问题研究的文献相对较少, 本文改进了相关文献的方法, 具有一定的新意。文中所利用的方法可以推广到类似的拟线性椭圆方程带纽曼边值问题解的研究中去, 例如可以考虑方程右端奇异项的改变, 或者可以考虑边值问题是非齐次的情况, 这些都是下一步研究所关注的方向。

参考文献 (References)

- [1] Astrita G, Marrucci G. Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics[M].

New York: McGraw-Hill, 1974.

- [2] Martison L K, Pavlov K B. Unsteady shear flows of a conducting fluid with a rheological power law[J]. *Magnitnaya Gidrodinamika*, 1971, 2: 50-58.
- [3] Kalashnikov A S. On a nonlinear equation appearing in the theory of non-stationary filtration[J]. *Trudy Sem Petrovsk*, 1978, 5: 60-68.
- [4] Bobisud L E. Existence of steady-state solutions for some one-dimensional conduction problems[J]. *J Math Anal Appl*, 1995, 195: 684-701.
- [5] Cantrell R S, Cosner C. Diffusive logistic equations with indefinite weights: Population models in disrupted environments II[J]. *SIAM J Math Anal*, 1991, 22: 1043-1069.
- [6] Aronson D G, Peletier L A. Large time behavior of solutions of the porous medium equation in bounded domain [J]. *J Differential Equations*, 1981, 39: 378-412.
- [7] Pao C V. Strongly coupled elliptic systems and application to Lotka-Volterra models with cross-diffusion [J]. *Nonlinear Anal*, 2005, 60: 1197-1217.
- [8] Pao C V. Asymptotic behavior of solutions for a parabolic equation with nonlinear boundary conditions [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1980, 80: 587-593.
- [9] Zhao Chunshan. Asymptotic behaviors of a class of N-Laplacian Neumann problems with large diffusion[J]. *Nonlinear Analysis*, 2008, 68: 2496-2524.
- [10] Lin C S, Ni W M, Takagi I. Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system[J]. *J Differential Equations*, 1988, 72: 1-27.
- [11] Ni W M, Takagi I. Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem [J]. *Duke Math J*, 1993, 70: 247-281.
- [12] De Queiroz O S. A Neumann problem with logarithmic nonlinearity in a ball[J/OL]. *Nonlinear Analysis*, 2008, doi:10.1016/j.na.2008.02.048.
- [13] Davila J, Montenegro M. Positive versus free boundary solutions to a singular elliptic equation[J]. *J Anal Math*, 2003, 90: 303-335.
- [14] Gilbar G D, Trudinger N S. Elliptic partial differential equations of second order[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [15] Lu Qishao, Yang Zuodong, E H Twizell. Existence of entire explosive positive solutions of quasilinear elliptic equations [J]. *Appl Math Comput*, 2004, 148: 359-372.

(责任编辑 朱宇)

《科技导报》“研究论文”栏目征稿

《科技导报》以发表国内外科学技术各学科专业原创性学术论文为主, 同时刊登阶段性最新科研成果报告, 以及国内外重大科技新闻, 快速、全方位、高密度、大容量提供科技信息。“研究论文”栏目专门发表自然科学、工程技术领域具有创新性的研究论文, 要求学术价值显著、实验数据完整、具有原始性和创造性, 同时应重点突出、文字精炼、引证及数据准确、图表清晰, 并附中、英文摘要以及作者姓名、所在单位、通信地址、关键词等信息。本栏目欢迎广大一线科技工作者投稿。投稿网址: www.kjdb.org; 投稿邮箱: kjdbbjb@cast.org.cn。