

· 书评 ·

文/胡作玄 (中国科学院系统科学研究所)

面向新世纪的数学难题

稍微了解数学的人们都知道,1900年,德国数学家希尔伯特提出了23个数学问题。这些问题对20世纪的数学发展起了重要作用。到2000年,数学的领域已经扩大到1900年的50倍到100倍,由一位伟大的全才数学家提出能覆盖整个数学领域的问题已变得不太现实,国际数学联盟组织世界著名的数学家一起共同完成希尔伯特一人的工作,结果,提出的数学问题成百上千。《千年难题》所收录的只是其中最重要、最有意义的7个问题。

希尔伯特在他关于“数学问题”的演讲说:“只要一门科学分支能够提出大量的问题,它就充满着生命力,而问题的缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止。”实际上这已经是数学家的共识。数学家自己创造出许多对象并研究其中的问题,例如数学家定义素数,并由此提出哥德巴赫猜想和双生素数问题;数学家定义群,并由此发展成在数学中占有核心地位的群论,已经获得的知识足以写成10万页的多卷大书,而相应未解决的问题也成百上千。

素数和群只是数学中最简单的两个概念,而更为抽象、更为难解的术语又何止千万。这种情况造成了一般人乃至隔行的专家对于数学成果难以理解,甚至对有关术语也感到陌生。不过,近二三十年,抽象数学已大举侵入物理学和生物学等领域,从超弦理论到拓扑异构酶等,这使得各界人士开始想了解怪怪的数学家到底在搞什么名堂。

《千年难题》所讲的7个难题反映出当代数学的特点。它反映出信息时代的特征,也反映出学科的交叉互动。其中4个难题是纯数学的,但它们并不像哥德巴赫猜想那么纯,而且都与数学内外有着千丝万缕的联系。1个难题是计算机科学的,即 $P \neq NP$ 问题。2个难题是关于数学物理的,它们又与纯数学有着瓜葛。

黎曼猜想或黎曼假设是当前数学中最为重要的难题,至今已有150年历史。这个问题原是针对素数分布提出来的,它涉及一个简单的复变函数 $\zeta(s)$ (Zeta函数)的零点分布。数学家对实变量的实函数研究得很多,这里只是推广到复变量的复函数。20世纪上半叶,解析方法在数论领域取得一系列突破,但并没有臻于至

善,原因就在于黎曼猜想没有攻下来。如果攻下来,几乎所有数论问题都可以上一个大台阶。黎曼猜想还有众多推广,例如有限域上代数簇的零点问题,它由韦伊猜想,到1974年由比利时数学家德利涅证明,德利涅因此荣获1978年菲尔兹奖。就在前几年,密码学出现了一个最难破译的椭圆曲线密码体系,其中用到韦伊猜想最简单的特殊情形。

椭圆曲线不是椭圆,而是一组三次曲线,它的威力巨大。7个难题中的伯奇和斯温耐顿-戴尔猜想讲的是有理数域上椭圆曲线的秩与一个 L 函数(ζ 函数的推广)的零点的关系。椭圆曲线的方程十分简单:

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

其中 a, b 为有理数。这种非常简单的曲线有着巨大的威力,费马大定理就是靠它解决的。

拓扑与代数几何是20世纪的数学女王。7个难题中唯一已经获解的是1904年提出的庞加莱猜想。2006年,在西班牙召开的国际数学家大会上,几乎一致同意,俄国数学家佩雷尔曼已完全解决了它。另一个代数几何的难题是浩治猜想,它已有50多年的历史。它涉及一个代数簇,即自变量之间用多项式方程和方程组联系的图形,就像解析几何中,圆的方程为

$$x^2 + y^2 = 1$$

与上面的椭圆曲线一样。它的拓扑性质用上同调表示。浩治猜想,这些上同调类可由调和形式来表示。代数几何现在十分重要,例如量子场论、弦论、孤立子理论都要用它。

数学家过去只是证明定理,而对计算不太注意。计算机发展和普及之后,要求设计更有效的算法来解决问题。最简单的算法当然是步骤最少的算法,或者说花时间最少的算法,当然这与所输入的数据大小有关,也就是计算时间是输入数据大小的函数。如果这个函数是多项式,则它属于类 P 。如果这个函数是指数型,则在数据不太大的情况下,需要几十亿年才能执行完成,这显然是不可行的。 NP 表示介乎两者之间的算法类,虽然不知道它是否有多项式时间算法,但如果给出一个解,则存在一个多项式时间的判定方法,判定它是否是解。这类称为非决定性的多项式算



基恩·德夫林著,沈崇圣译
上海科技教育出版社出版
2007年1月第1版
定价:20.00元

法。显然 $P \subseteq NP$,但是没有找到任何一个 NP 中算法的例子,它不属于 P 。因此这个问题有两种可能: $P=NP, P \neq NP$ 。多数人倾向于后者。这个问题不仅在理论上重要,还涉及到诸如网络安全之类的大事。

自从300年前牛顿把力学、天文学、物理学的问题化为数学问题,也就是求解数理方程(大多是偏微分方程或方程组)的问题,科学家往往希望求出具体解来。然而,许多方程,数学家还无能为力。最典型的反映不可压缩流体运动的纳维-斯托克斯方程,不仅光滑解解不出来,甚至数学家研究的存在性、唯一性、正则性也没有结果。换言之,对于流体,理论上所知甚少,倚重的多是计算和实验。

杨振宁-米尔斯场方程可以看成是电磁场方程的推广,其特殊情形已有一些结果,然而量子杨振宁-米尔斯场必须满足一些不同于经典场论的条件,首先是质量间隙问题,否则不能保证核力是强作用的短程力。这样,首先要证明对于任意紧单李群 G ,在 R^4 (四维欧氏空间)上存在以 G 为规范群的有质量量子的杨振宁-米尔斯规范场,这是十分困难的问题。

《千年难题》对于这7个难题做了初步的解释,但要想了解细节,还要有相当的基础。无论如何,作者给我们提供了21世纪前沿数学的很好样本,足以使非专家对这个飞速发展的领域有一个初步的认识——虽然难,但还是可以一步一步接近它们。

栏目主持人:王洪波,《中华读书报》“书评周刊”执行主编。

(责任编辑 黄永明)