

追赶法并行求解循环三对角方程组

李文强, 刘 晓

河南师范大学数学与信息科学学院, 河南新乡 453007

摘要 给出了求解循环三对角线性方程组的一种并行算法。在系数矩阵满足对角占优的条件下, 利用该方法能够快速、稳定地求解循环三对角线性方程组, 在单个进程上的计算量仅为 $O(17n)$, 与传统算法求解循环三对角线性方程组的计算量相同。而且, 本算法可以方便地实施分布式并行计算, 各进程仅需向主进程传递 8 个实数, 而主进程向各子进程传递 2 个实数, 通讯量较小。数值实验结果表明: 对于大规模的循环三对角线性方程组, 利用 16 个进程计算的并行效率均在 0.75 以上。求解三对角线性方程组的传统追赶法实则是本文算法的一种特例, 因此, 该算法也可用于求解三对角线性方程组。

关键词 追赶法; 循环三对角方程组; 并行计算

中图分类号 O241.6

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2009)18-0090-04

A Parallel Chasing Algorithm for Solving Cyclic Tridiagonal Equations

LI Wenqiang, LIU Xiao

College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxing 453007, Henan Province, China

Abstract A parallel algorithm for solving the cyclic tridiagonal equations is developed in this paper. This algorithm is mainly based on the matrix decomposition. Firstly, a lower order cyclic tridiagonal equation can be formed by extracting the first and the last equation in each process. Secondly, the lower order cyclic tridiagonal equation is solved to obtain the values of the key variables. Finally, the values of the key variables are used in the corresponding processes and the related equations are solved in parallel. The cyclic tridiagonal equations can be solved efficiently and stably by using this algorithm if the coefficient matrix is diagonally dominant, which condition is also required by the traditional chasing method, so, the parallel algorithm developed in this paper to solve the tridiagonal equations does not need additional conditions to restrict the coefficient matrix. The computational cost of the parallel algorithm in one process is only $O(17n)$ and equal to that of the traditional algorithm for solving the cyclic tridiagonal equations. Moreover, the distributed parallel computation can also be performed and the data communication cost is small. In fact, the data length for the communication from child processes to the

master process and from the master process to child processes is 8 real numbers and 2 real numbers, respectively. Therefore, the computational cost and the data communication cost are smaller than the traditional parallel algorithm for solving the cyclic tridiagonal equations. The numerical experiments indicate that, as far as large scale cyclical tridiagonal equations are considered, the parallel computational efficiency is greater than 0.75 if the rank number is less than 16. Indeed, the traditional chasing algorithm is a particular case of this algorithm. So, this algorithm can be used to solve the tridiagonal equations naturally.

Keywords chasing algorithm; cyclic tridiagonal equations; parallel computation

0 引言

在构造具有周期性边界条件的 3 次样条函数或用差分法求解具有周期性边界条件的微分方程问题时, 利用高精度的对称紧致差分格式对微分方程进行离散^[1-2], 经常会遇到如下的循环三对角线性方程组:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

对循环三对角方程组求解方法的研究一直是人们关注的问题^[3-5]。针对周期性三对角方程组的求解, 已有许多非常好的串行算法, 算术运算量可以减小到 $O(17n)$ ^[3-5]。但对于大型循环三对角方程组, 由于内存容量的限制, 方程组阶数 $n \geq 10^8$

收稿日期: 2009-05-18

基金项目: 河南师范大学青年基金项目(2008qk01)

作者简介: 李文强, 副教授, 研究方向为数值线性代数, 电子信箱: liwenqiangxx@126.com

时,在 1 GB 内存配置的微机上算法就无法实现。这就必须考虑进行分布式并行计算,一方面可以减少单个进程上的内存使用量,另一方面还可以有效地节约计算时间。

较为常用的并行求解循环三对角方程算法是将 x_n 看作参数,将式(1)分解成两个三对角方程组,用追赶法分别求解,最后再巧妙地将两个三对角方程组的解进行线性组合得到循环三对角方程组的解^[6-7]。

本文将给出一种求解循环三对角方程组的并行算法,该算法的算术运算量也是 $O(17n)$,但不需要将循环三对角方程组分成两个三对角方程组,而是直接对循环三对角线性方程组进行求解,并且该算法实现并行极为容易。

1 算法设计与分析

本文的目的是给出求解循环三对角方程的并行算法。为了分析算法的加速比和并行效率问题,首先给出单个进程上的串行算法。

1.1 串行算法设计分析

周期性三对角线性方程组(1)用矩阵表示为

$$c_n x_1 e_n + T x + a_1 x_n e_1 = d \quad (2)$$

其中, e_1, e_n 是 R^n 上第 1 个和第 n 个单位列向量, $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)^T$, $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$,

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

令 $y=T^{-1}d, u=T^{-1}e_1, v=T^{-1}e_n$, 并记 $w_1=c_n x_1, w_2=a_1 x_n$, 有

$$x=y-w_1 u-w_2 v \quad (3)$$

取式(3)的第 1 行和最后 1 行,整理得

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{c_n} + u_1 \right) w_1 + v_1 w_2 = y_1 \\ u_n w_1 + \left(\frac{1}{a_1} + v_n \right) w_2 = y_n \end{cases} \quad (4)$$

解出 w_1, w_2 并代入式(3),即可得到方程组的解。

至此,得到下面的求解循环三对角线性方程组的串行算法。

算法 1 求解循环三对角线性方程组的追赶法。

第 1 步:分解三对角矩阵 T 。

```
p1=b1, q1=c1/p1
do j=2, 3, ..., n-1
    pj=bj-ajqj-1
    qj=cj/pj
end do
pn=bn-an·qn-1
```

第 2 步:求解 $Ty=d$ 。

```
z1=d1/p1
do j=2, 3, ..., n
    zj=(dj-ajzj-1)/pj
```

```
end do
```

```
yn=zn
```

```
do j=n-1, n-2, ..., 1
```

```
yj=zj-qjyj+1
```

```
end do
```

第 3 步:求解 $Tu=e_1$ 。

```
z1=1/p1
```

```
do j=2, 3, ..., n
```

```
zj=-ajzj-1/pj
```

```
end do
```

```
un=zn
```

```
do j=n-1, n-2, ..., 1
```

```
uj=zj-qjuj+1
```

```
end do
```

第 4 步:求解 $Tv=e_n$ 。

```
vn=1/pn
```

```
do j=n-1, n-2, ..., 1
```

```
vj=-qjvj+1
```

```
end do
```

第 5 步:计算 w_1, w_2 。

$$w_1 = \frac{y_1(v_n + 1/a_1) - y_n v_1}{(u_1 + 1/c_n)(v_n + 1/a_1) - u_n v_1}$$

$$w_2 = \frac{y_n(u_1 + 1/c_n) - y_1 u_n}{(u_1 + 1/c_n)(v_n + 1/a_1) - u_n v_1}$$

第 6 步:计算原问题的解。

```
do j=1, 2, ..., n
```

```
xj=yj-w1uj-w2vj
```

```
end do
```

从以上计算过程中可以看出,该算法的算术运算量中,乘除法 $O(11n)$,加减法 $O(6n)$,总算术运算量为 $O(17n)$ 。与串行算法^[4]相比,没有增加计算的复杂性,而且容易实现分布式并行计算。

1.2 并行算法设计与分析

假定处理机台数为 m ,且 $n=mk$,方程组(1)写成如下形式进行分块:

$$\begin{bmatrix} T_1 & S_1 & & L_1 \\ L_2 & T_2 & S_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & L_{m-1} & T_{m-1} & S_{m-1} \\ S_m & & L_m & T_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{m-1} \\ d_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中,对 $i=1, 2, \dots, m$,有

$$L_i = a_{(i-1)k+1} e_i e_k^T \quad S_i = c_{ik} e_i e_1^T$$

$$T = \begin{bmatrix} b_{(i-1)k+1} & c_{(i-1)k+1} & & & \\ a_{(i-1)k+2} & b_{(i-1)k+2} & c_{(i-1)k+2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{(i-1)k+k-1} & b_{(i-1)k+k-1} & c_{(i-1)k+k-1} \\ & & & b_{ik} & a_{ik} \end{bmatrix}$$

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})^T = (x_{(i-1)k+1}, x_{(i-1)k+2}, \dots, x_{ik})^T$$



行计算时间 s 、加速比 S 以及并行效率 E 如表 2 所示。其中, 加速比 $S=T_1/T_m$, T_1 表示串行计算所用的时间, T_m 表示用 m 个进程进行并行计算所用的时间; 并行效率 $E=T_1/(T_m \cdot m)$ 。

表 2 计算时间及其加速比与并行效率
Table 2 Computational time its acceleration ratio and parallel efficiency

m	T/s	S	E
1	36.574		
2	18.703	1.956	0.978
4	10.387	3.521	0.880
8	6.046	6.049	0.756
16	3.027	12.081	0.755

3 结论

本文利用追赶法思想, 将循环三对角矩阵中右上角和左下角多出的非零元单独处理, 给出了求解循环三对角方程组并行算法。该并行算法在单个进程上的计算量仍然是 $O(17n)$, 与利用传统算法求解循环三对角方程组的计算量相同。另外, 该并行算法的数据通信量也较小。

通过具体实例测试, 并行计算效率和速度比还是比较满意的。由于本文提出算法的主体是人们熟知的求解三对角线性方程组的追赶法, 故在算法分析过程中, 没有误差分析, 也没有给出对循环三对角线性方程组本身应满足的条件。另外, 如果三对角线性方程组是 Toeplitz 的, 算法还能够进一步

简化。

参考文献 (References)

- [1] 马明书, 沈高峰, 谷淑敏, 等. 高维抛物形方程的高精度很稳定的 LOD 格式[J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2008, 36(4): 25-27.
Ma Mingshu, Shen Gaofeng, Gu Shumin, et al. *Journal of Henan Normal University: Natural Science Edition*, 2008, 36(4): 25-27.
- [2] Santhanam N, Lele S K, Ferziger J H. A robust high-order compact method for large eddy simulation [J]. *J Comput Phys*, 2003, 191: 392-419.
- [3] 王兴波, 钟志华. 求解周期性三对角方程组的广义 Thomas 算法[J]. 计算力学学报, 2004(1): 73-76.
Wang Xingbo, Zhong Zhihua. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2004, 21(1): 73-76.
- [4] 刘晓, 李文强. 追赶法在求解循环和拟循环三对角方程组中的一种推广[J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2009(1): 13-16.
Liu Xiao, Li Wenqiang. *Journal of Henan Normal University: Natural Science Edition*, 2009, 37(1): 13-16.
- [5] 李青, 王能超. 解循环三对角线性方程组的追赶法 [J]. 小型微型计算机系统, 2002, 23(11): 1393-1395.
Li Qing, Wang Nengchao. *Journal of Chinese Computer Systems*, 2002, 23(11): 1393-1395.
- [6] 迟利华, 刘杰, 李晓梅. 三对角线性方程组的一种有效并行算法[J]. 计算机学报, 1999(2): 218-321.
Chi Lihua, Liu Jie, Li Xiaomei. *Chinese Journal of Computers*, 1999(2): 218-321.
- [7] 刘培华, 李维国, 董彩云. 并行求解周期性三对角方程组的谢-莫方法 [J]. 计算力学学报, 2006(5): 606-610.
Liu Peihua, Li Weiguo, Dong Caiyun. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006(5): 606-610.

(责任编辑 杨书卷)

·学术动态·

“第 4 届中国智能计算大会”征文



为了推动智能计算理论、方法和应用的发展, 活跃学术领域研究, 交流总结我国智能计算研究工作者的最新成果, 由中国运筹学会智能计算分会主办, 安徽工程科技学院承办和安徽省数学会协办的“第 4 届中国智能计算大会”将于 2010 年 5 月 21-25 日在中国芜湖召开。会议主题如下。

1) 智能计算: 遗传算法, 模拟退火算法, 禁忌搜索算法, 进化算法, 启发式算法, 蚁群算法, 粒子群算法, 混合智能算法, 免疫算法, 人工智能, 神经网络, 机器学习, 生物计算, DNA 计算, 量子计算, 智能计算与优化, 模糊逻辑, 模式识别, 知识发现, 数据挖掘。

2) 不确定系统: 随机集, 模糊集, 粗糙集, 可信性理论, 机会理论。

3) 不确定理论: 不确定过程, 不确定分析, 不确定微分方程, 不确定逻辑, 不确定推理。

4) 不确定规划: 随机规划, 模糊规划, 混合规划。

5) 应用: 车辆调度问题, 可靠性问题, 存储问题, 排序问题, 选址问题, 分配问题, 更新问题, 图像处理, 电子商务, 信息安全, 风险分析与控制, 智能加工系统, 智能调度系统, 智能交通系统, 智能金融工程, 数理金融, 应用概率统计, 智能信息检索, 智能控制与自动化, 智能通讯工程等。

征文截止日期: 2010 年 1 月 10 日。详见会议网站: <http://www.auts.edu.cn/icc2010>。

联系方式: 安徽省芜湖市赭山东路 8 号安徽工程科技学院应用数理系 (241000) 刘宏建, 储慧琴; 电话: 0553-2871141; 电子信箱: icc2010@auts.edu.cn。

