



时间分数阶 Klein-Gordon 型方程的解析近似解

郭 鹏¹, 王艺红^{1,2}, 陶春兴^{1,3}, 李常品¹

1. 上海大学数学系, 上海 200444
2. 浙江林业大学数学系, 杭州 311300
3. 越南河内矿业地质大学数学系, 河内 100803, 越南

摘要 采用 Adomian 分裂方法, 给出在 Caputo 导数意义下的时间分数阶 Klein-Gordon 方程的解析近似解, 并举例说明了 Adomian 分裂方法在求解上的高效性, 通过 4 个表给出的近似解和精确解的误差, 可以看出 Adomian 分裂方法在求解时间分数阶 Klein-Gordon 方程时能得到很高的精度。

关键词 近似解析解; Adomian 分裂方法; Klein-Gordon 方程; Caputo 导数

中图分类号 O241.82

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2009)02-0047-06

An Approximate Analytical Solution to the Family of Time Fractional Klein-Gordon Equations

GUO Peng¹, WANG Yihong^{1,2}, TAO Chunxing^{1,3},
LI Changpin¹

1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China
2. Department of Mathematics, Zhejiang Forest University, Hangzhou 311300, China
3. Department of Mathematics, Hanoi University of Mining and Geology, Hanoi 100803, Vietnam

Abstract In this paper, the Adomian decomposition method is used to obtain an approximate analytical solution to the time fractional Klein-Gordon equation, where the fractional derivatives are in Caputo sense. Some examples are given to show the efficiency of the method, the approximate solution and exact solution of the error are given by four tables, and it is shown that the Adomian decomposition method in solving the time fractional Klein-Gordon equation can be very high precision.

Keywords approximate analytical solution, Adomian decomposition method, Klein-Gordon equation, Caputo derivative

0 引言

相对于经典的整数阶微分方程, 分数阶微分方程能更好地描述物理和工程上的一些问题。近几十年里, 分数阶微分方程已被广泛用于描述光学和热学系统、流变力学及材料和力学系统、电磁学、电化学、控制和机器人及其他应用领域中的问题。Oldham 和 Spanier^[1], Miller 和 Ross^[2], Podlubny^[3], Gorenflo^[4]等均给出了分数阶微分方程的应用; Sabatier 等^[5]给出了分数阶微分方程在物理和工程上的发展和应用; Das^[6]将分数阶微分方程应用于系统识别和信号处理; 分数阶微积分方程的其他应用可参考文献[7-19]。

直接求解分数阶微分方程并不是一件容易的事, 因此需要一种更为可靠、高效的方法。

Klein-Gordon 方程在物理学上, 特别是在量子力学的发展过程中起着非常重要的作用。但目前考虑时间分数阶 Klein-Gordon 方程的研究不多。本文即给出时间分数阶 Klein-Gordon 方程的解析近似解。时间分数阶 Klein-Gordon 方程形式如下

$${}_0^C D_{0,t}^\alpha u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial V(u)}{\partial u} = 0 \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (1)$$

初始条件为

$$u(x, 0) = f_1(x) \quad u_t(x, 0) = f_2(x) \quad (2)$$

其中, $V(u)$ 是系统的势能, 不同的 $V(u)$ 对应不同类型的 Klein-Gordon 方程; ${}_0^C D_{0,t}^\alpha$ 是 Caputo 意义下的分数阶导数, 其定义为

$${}_0^C D_{0,t}^\alpha x(t) = J^{n-\alpha} D^n x(t)$$

其中, $n = [\alpha]$ 是不小于 α 的最小整数; D^n 是 n 阶经典导数; J^μ 是

收稿日期: 2008-11-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(10872119)

作者简介: 郭鹏, 研究方向为分数阶动力学, 电子信箱: pengguo7909@yahoo.com.cn; 李常品 (通信作者), 教授, 研究方向为分数阶动力学、复杂网络动力学, 电子信箱: lcp@shu.edu.cn



Riemann-Liouville 积分算子, 定义如下

$$J^\mu x(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t-\tau)^{\mu-1} x(\tau) d\tau$$

虽然在纯数学角度上, Riemann-Liouville 导数比 Caputo 导数更受欢迎, 但 Caputo 导数在工程和数值计算上有着广泛的应用。Riemann-Liouville 导数需给出未知解在初始条件下的一些分数阶导数的具体值, 但在处理具体的物理问题时, 分数阶导数可能没有合适的物理意义; Caputo 导数只需给出在初始条件下的经典导数的值, 这样导数就有明确的物理意义。且在齐次条件下, Caputo 导数和 Riemann-Liouville 导数是等价的。故选择 Caputo 导数意义下的算子。

基于问题(1)及其初始条件(2), 等价于 Volterra 积分方程为

$$u(x, t) = f_1(x) + t f_2(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial V(u)}{\partial u} \right) d\tau$$

此时, 可考虑用 Adomian 分裂方法求解。Adomian 分裂法对于求解许多类型的方程, 特别是非线性方程是一个强有力的工具。

1 Adomian 分裂方法的基本原理

首先考虑非线性方程

$$u - N(u) = f \quad (3)$$

其中 N 是将 Hilbert 空间 H 映射成 H 的非线性算子。求解目标即为寻找一个 $u \in H$ 满足方程(3)。

由 Adomian 分裂方法, 假设方程(3)的解能够用一个无穷级数表示

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \quad (4)$$

非线性部分能够被表示成如下形式

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (5)$$

其中, A_n 's 为 Adomian 多项式, 可通过如下形式获得

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right] \Big|_{\lambda=0} \quad n=0, 1, 2, \dots$$

其中, λ 是一个参数。

将式(4)和式(5)代入式(3), 可得

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i - \sum_{n=0}^{\infty} A_n = f$$

则 u_i 和 A_n 的关系为

$$u_0 = f \quad u_1 = A_0 \quad u_2 = A_1 \quad \dots \quad u_{n+1} = A_n$$

Adomian 方法的收敛性已由 Cherruault^[20-22], Ouedraogo^[23], Abbaoui^[24-25], Himoun^[26] 给出。

2 Klein-Gordon 型方程的近似解

2.1 $\frac{\partial V(u)}{\partial u} = -u$ 时

方程(1)为

$$D_{0,t}^\alpha u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0 \quad 1 < \alpha \leq 2$$

初值条件为

$$u(x, 0) = 1 + \sin x \quad u_x(x, 0) = 0$$

将所考虑的问题写成如下形式

$$D_{0,t}^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$

应用第 1 节的方法, 有

$$u = u(x, 0) + t u_x(x, 0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (u_{xx}(x, \tau) + u(x, \tau)) d\tau$$

用 $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ 代替 u , 得

$$u_0 = 1 + \sin x \quad u_1 = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad u_2 = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \quad u_3 = \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \quad \dots$$

则获得近似解的级数形式为

$$u^* = 1 + \sin x + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots$$

当 $\alpha=2$ 时, 其近似解为

$$u^* = 1 + \sin x + \frac{t^2}{\Gamma(3)} + \frac{t^4}{\Gamma(5)} + \frac{t^6}{\Gamma(7)} + \dots$$

图 1(a) 为 $\alpha=2$ 时, 精确解的图像, 图 1(b) 为取前 3 项作为近似解的图像, 表 1 为近似解和精确解的误差。

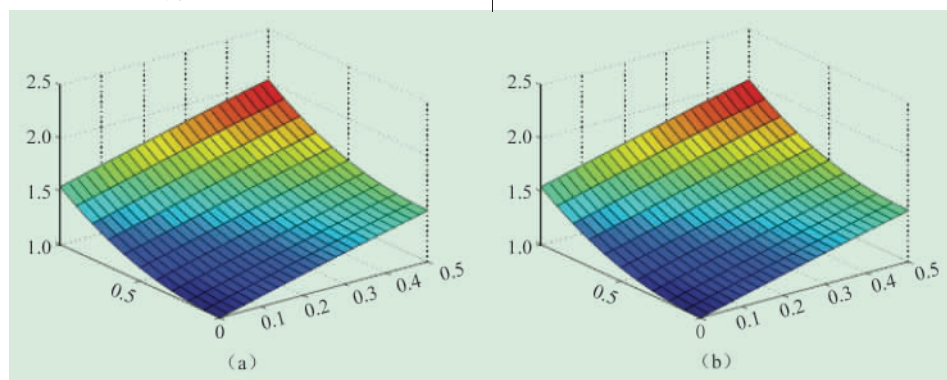


图 1 $\frac{\partial V(u)}{\partial u} = -u$ 时, 精确解的图像(a)及取前 3 项作为近似解的情况(b) ($x \in [0, 0.5]$, $t \in [0, 1]$)

Fig. 1 When $\frac{\partial V(u)}{\partial u} = -u$, Fig.(a) is the exact solution, Fig.(b) is the approximate solution ($x \in [0, 0.5]$, $t \in [0, 1]$)

表 1 $x=2$ 时近似解与精确解的误差

Table 1 When $x=2$, the error between the approximate solution and the exact solution

t	精确解	近似解	误差
0.1	1.914 301 594 881 485 213 4	1.914 301 593 492 348 185 7	1.389×10^{-9}
0.2	1.929 364 182 444 757 602 7	1.929 364 093 492 348 386 5	8.895×10^{-8}
0.3	1.954 635 940 954 542 183 7	1.954 634 926 825 681 739 9	1.014×10^{-6}
0.4	1.990 369 798 664 136 657 9	1.990 364 093 492 348 551 7	5.705×10^{-6}
0.5	2.036 923 392 032 062 629 6	2.036 901 593 492 348 450 1	2.179×10^{-5}
0.6	2.094 762 645 067 949 513 6	2.094 697 426 825 681 496 6	6.522×10^{-5}
0.7	2.164 466 432 456 624 733 7	2.164 301 593 492 348 185 8	1.648×10^{-4}
0.8	2.246 732 373 130 526 205 8	2.246 364 093 492 348 335 0	3.683×10^{-4}
0.9	2.342 383 812 274 456 467 2	2.341 634 926 825 681 528 5	7.489×10^{-4}
1.0	2.452 378 061 640 925 643 9	2.450 964 093 492 348 450 1	1.414×10^{-3}

2.2 $\frac{\partial V(u)}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial t} + u$ 时

方程(1)为

$$D_{0,t}^{\alpha} u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + u = 0 \quad 1 < \alpha \leq 2$$

初值条件

$$u(x, 0) = e^x \quad u_t(x, 0) = -e^x$$

同样,有

$$\begin{aligned} u_0 &= e^x - t e^x & u_1 &= \frac{e^x}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} & u_2 &= -\frac{e^x}{\Gamma(2\alpha)} t^{2\alpha-1} \\ u_3 &= \frac{e^x}{\Gamma(3\alpha-1)} t^{3\alpha-2} & u_4 &= -\frac{e^x}{\Gamma(4\alpha-2)} t^{4\alpha-3} \dots \end{aligned}$$

近似解 u^* 的级数表示形式为

$$u^* = e^x - t e^x + \frac{e^x}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} - \frac{e^x}{\Gamma(2\alpha)} t^{2\alpha-1} + \frac{e^x}{\Gamma(3\alpha-1)} t^{3\alpha-2} - \frac{e^x}{\Gamma(4\alpha-2)} t^{4\alpha-3} + \dots$$

当 $\alpha=2$ 时,精确解(图 2(a))为

$$u(x, t) = e^{x-t}$$

近似解(图 2(b))为

$$u^* = e^x \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \dots \right)$$

表 2 为 $x=3$ 时精确解和近似解的误差,取 Adomian 多项

式的前 5 项作为近似解。

2.3 $\frac{\partial V(u)}{\partial u} = \sin u$ 时

方程(1)为

$$D_{0,t}^{\alpha} u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0 \quad 1 < \alpha \leq 2$$

初值条件为

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad u_t(x, 0) = 0$$

同样可得

$$u_0 = \sin(\pi x)$$

$$u_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} ((u_0)_{xx} - A_0) d\tau =$$

$$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} (-\pi^2 \sin(\pi x) - \sin(\sin(\pi x)))$$

$$u_2 = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} ((u_1)_{xx} - A_1) d\tau =$$

$$\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} (\pi^4 \sin(\pi x) + \pi^2 \sin(\sin(\pi x)) \cos^2(\pi x) + 2\pi^2 \sin(\pi x) \cdot$$

$$\cos(\sin(\pi x)) + \cos(\sin(\pi x)) \sin(\sin(\pi x)))$$

⋮

其中

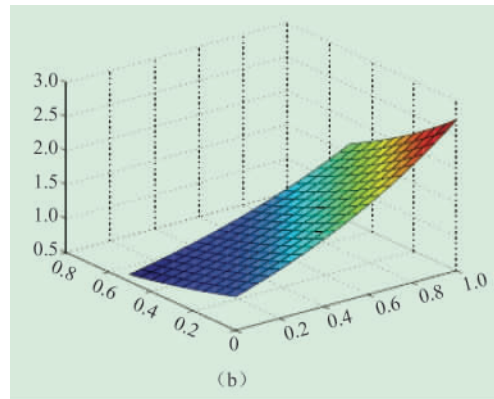
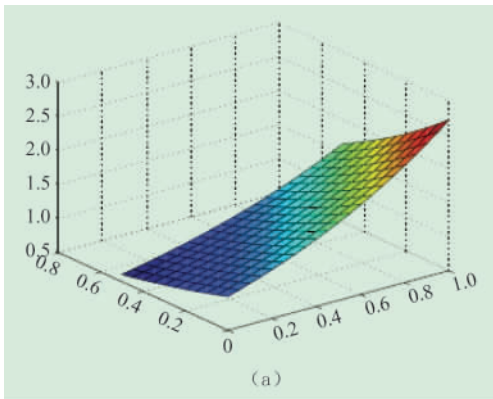


图 2 $\frac{\partial V(u)}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial t} + u$ 时的精确解(a)和近似解(b) ($x \in [0, 1], t \in [0, 0.5]$)

Fig. 2 When $\frac{\partial V(u)}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial t} + u$, Fig.(a) is the exact solution, Fig.(b) is the approximate solution ($x \in [0, 1], t \in [0, 0.5]$)

表 2 $x=3$ 时近似解与精确解的误差

Table 2 When $x=3$, the error between the approximate solution and the exact solution

t	精确解	近似解	误差
0.05	19.105 953 728 231 651 000 0	19.105 953 727 798 855 000 0	$4.328\ 0\times 10^{-10}$
0.10	18.174 145 369 443 060 000 0	18.174 145 341 940 079 000 0	$2.750\ 3\times 10^{-8}$
0.15	17.287 781 840 567 639 000 0	17.287 781 529 491 724 000 0	$3.110\ 8\times 10^{-7}$
0.20	16.444 646 771 097 048 000 0	16.444 645 035 479 390 000 0	$1.735\ 6\times 10^{-6}$
0.25	15.642 631 884 188 171 000 0	15.642 625 309 343 559 000 0	$6.574\ 8\times 10^{-6}$
0.30	14.879 731 724 872 837 000 0	14.879 712 228 209 350 000 0	$1.949\ 7\times 10^{-5}$
0.35	14.154 038 645 375 801 000 0	14.153 989 820 156 196 000 0	$4.882\ 5\times 10^{-5}$
0.40	13.463 738 035 001 692 000 0	13.463 629 987 487 565 000 0	$1.080\ 5\times 10^{-4}$
0.45	12.807 103 782 663 029 000 0	12.806 886 230 000 698 000 0	$2.175\ 5\times 10^{-4}$
0.50	12.182 493 960 703 473 000 0	12.182 087 368 256 269 000 0	$4.065\ 9\times 10^{-4}$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \sin(\sin(\pi x)) \\
 A_1 &= u_1 \cos(u_0) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (-\pi^2 \sin(\pi x) \cos(\sin(\pi x)) - \\
 &\quad \cos(\sin(\pi x)) \sin(\sin(\pi x))) \\
 &\quad \vdots \\
 \text{取前 3 项作为近似解(图 3(b)), 则} \\
 u^* &= u_0 + u_1 + u_2 = \\
 &\quad \sin(\pi x) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (-\pi^2 \sin(\pi x) - \sin(\sin(\pi x))) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} (\pi^4 \sin(\pi x) + \pi^2 \sin(\sin(\pi x)) \cos^2(\pi x) + \\
 &\quad 2\pi^2 \sin(\pi x) \cos(\sin(\pi x)) + \cos(\sin(\pi x)) \sin(\sin(\pi x))) \\
 \alpha=2 \text{ 时, 精确解(图 3(a)) 为} \\
 u(x, t) &= \frac{1}{2} (\sin(\pi(x+t)) + \sin(\pi(x-t)))
 \end{aligned}$$

表 3 为不同 t 和 x 的精确解和近似解(取前 3 项)之间的误差。

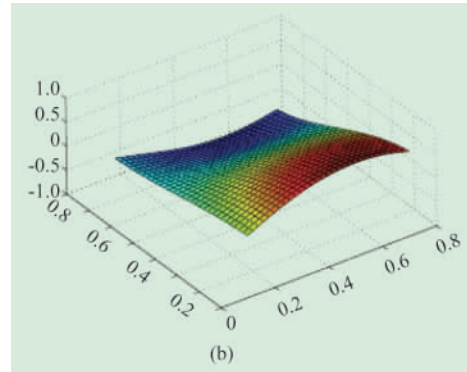
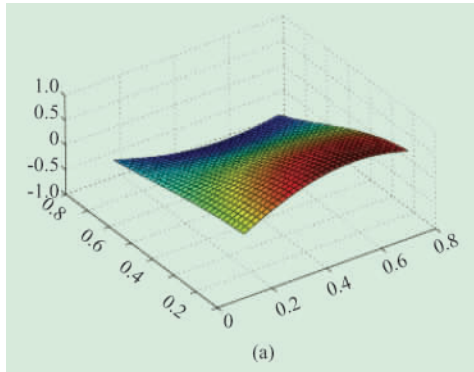


图 3 $\frac{\partial V(u)}{\partial u} = \sin u$ 时的精确解(a)和近似解(b) ($x \in [0.1, 0.7], t \in [0.1, 0.7]$)

Fig. 3 When $\frac{\partial V(u)}{\partial u} = \sin u$, Fig.(a) is the exact solution, Fig.(b) is the approximate solution ($x \in [0.1, 0.7], t \in [0.1, 0.7]$)

表 3 $\alpha=2$ 时不同的 t 和 x 时的误差。

Table 3 When $\alpha=2$, the error between the approximate solution and the exact solution with different values of t and x

t	误差 ($x=0.2$)	误差 ($x=0.5$)	误差 ($x=0.8$)	误差 ($x=0.9$)
0.01	$2.883\ 68\times 10^{-4}$	$4.855\ 09\times 10^{-4}$	$2.883\ 68\times 10^{-4}$	$1.522\ 33\times 10^{-4}$
0.02	$1.153\ 12\times 10^{-3}$	$1.941\ 49\times 10^{-3}$	$1.153\ 12\times 10^{-3}$	$6.087\ 39\times 10^{-4}$
0.03	$2.593\ 19\times 10^{-3}$	$4.366\ 35\times 10^{-3}$	$2.593\ 19\times 10^{-3}$	$1.368\ 94\times 10^{-3}$
0.04	$4.606\ 85\times 10^{-3}$	$7.757\ 39\times 10^{-3}$	$4.606\ 85\times 10^{-3}$	$2.431\ 87\times 10^{-3}$
0.05	$7.191\ 60\times 10^{-3}$	$1.211\ 08\times 10^{-2}$	$7.191\ 60\times 10^{-3}$	$3.796\ 17\times 10^{-3}$
0.06	$1.034\ 43\times 10^{-2}$	$1.742\ 19\times 10^{-2}$	$1.034\ 43\times 10^{-2}$	$5.460\ 12\times 10^{-3}$
0.07	$1.406\ 11\times 10^{-2}$	$2.368\ 46\times 10^{-2}$	$1.406\ 11\times 10^{-2}$	$7.421\ 58\times 10^{-3}$
0.08	$1.833\ 73\times 10^{-2}$	$3.089\ 19\times 10^{-2}$	$1.833\ 73\times 10^{-2}$	$9.678\ 05\times 10^{-3}$
0.09	$2.316\ 78\times 10^{-2}$	$3.903\ 58\times 10^{-2}$	$2.316\ 78\times 10^{-2}$	$1.222\ 66\times 10^{-2}$
0.10	$2.854\ 65\times 10^{-2}$	$4.810\ 73\times 10^{-2}$	$2.854\ 65\times 10^{-2}$	$1.506\ 40\times 10^{-2}$

$$2.4 \quad \frac{\partial V(u)}{\partial u} = u^2 + 6xt(t^2 - x^2) - x^6 t^6 \text{ 时}$$

方程 (1) 为

$$cD_{0,t}^\alpha u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2 + 6xt(t^2 - x^2) - x^6 t^6 = 0 \quad 1 < \alpha \leq 2$$

初值条件为

$$u(x, 0) = 0 \quad u_t(x, 0) = 0$$

同样得

$$u = u(x, 0) + tu_t(x, 0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (u_{xx} - u^2 - 6xt(t^2 - x^2) + x^6 t^6) d\tau$$

用 $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ 分别代替 u 和非线性部分 u^2 , 即得

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = u(x, 0) + tu_t(x, 0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (u_i)_{xx} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u^2) - 6xt(t^2 - x^2) + x^6 t^6 \right) d\tau$$

因此有

$$u_0 = u(x, 0) + tu_t(x, 0)$$

$$u_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} ((u_0)_{xx} - A_0(u^2) - 6xt(t^2 - x^2) + x^6 t^6) d\tau$$

$$u_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} ((u_1)_{xx} - A_1(u^2) - 6xt(t^2 - x^2) + x^6 t^6) d\tau$$

$$u_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} ((u_2)_{xx} - A_2(u^2) - 6xt(t^2 - x^2) + x^6 t^6) d\tau$$

⋮

其中 $A_i(u^2)$ 是 Adomian 多项式, 可按如下形式给出

$$A_0(u^2) = u_0^2$$

$$A_1(u^2) = 2u_0 u_1$$

$$A_2(u^2) = 2u_0 u_2 + u_0 u_1^2$$

⋮

取前 3 项作为近似解 (图 4(b)), 即

$$u^* = u_0 + u_1 + u_2 =$$

$$0 + \left(\frac{6x^3}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} - \frac{36x}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3} + \frac{\Gamma(7)x^6}{\Gamma(\alpha+7)} t^{\alpha+6} \right) + \left(\frac{36x}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} + \frac{30\Gamma(7)x^4}{\Gamma(2\alpha+7)} t^{2\alpha+6} + \frac{6x^3}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} - \frac{36x}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3} + \frac{\Gamma(7)x^6}{\Gamma(\alpha+7)} t^{\alpha+6} \right) =$$

$$\frac{12x^3}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} - \frac{72x}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3} + \frac{2\Gamma(7)x^6}{\Gamma(\alpha+7)} t^{\alpha+6} + \frac{36x}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} + \frac{30\Gamma(7)x^4}{\Gamma(2\alpha+7)} t^{2\alpha+6}$$

当 $\alpha=2$ 时, 精确解为 $u(x, t) = x^3 t^3$ (图 4(a))。表 4 为不同 t 和 x 的精确解和近似解 (取前 3 项) 之间的误差。

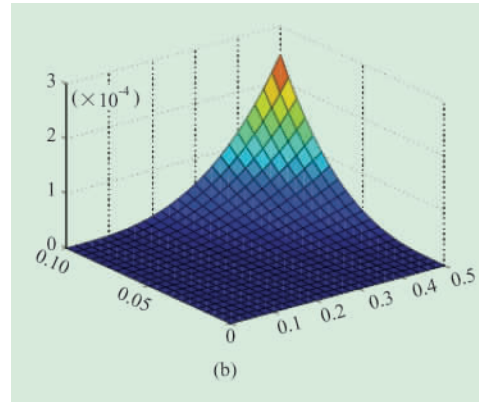
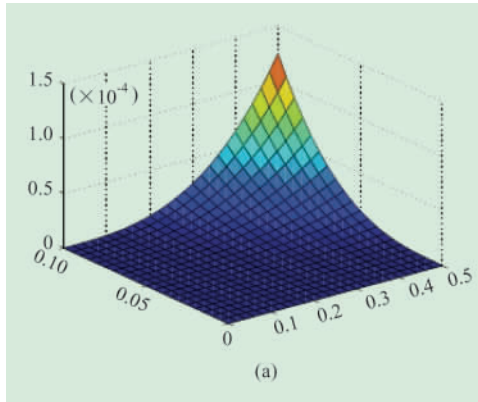


图 4 $\frac{\partial V(u)}{\partial u} = u^2 + 6xt(t^2 - x^2) - x^6 t^6$ 时的精确解 (a) 和近似解 (b) ($x \in [0, 0.5], t \in [0, 0.1]$)

Fig. 4 When $\frac{\partial V(u)}{\partial u} = u^2 + 6xt(t^2 - x^2) - x^6 t^6$, (a) is the exact solution, (b) is the approximate solution ($x \in [0, 0.5], t \in [0, 0.1]$)

表 4 $\alpha=2$ 时不同 t 和 x 产生的误差

Table 4 When $\alpha=2$, the error between the approximate solution and the exact solution with different values of t and x

t	误差 ($x=0.3$)	误差 ($x=0.5$)	误差 ($x=0.8$)	误差 ($x=1.0$)
0.01	$2.699 \ 10 \times 10^{-8}$	$1.249 \ 85 \times 10^{-7}$	$5.119 \ 76 \times 10^{-7}$	$9.999 \ 70 \times 10^{-7}$
0.02	$2.157 \ 12 \times 10^{-7}$	$9.995 \ 20 \times 10^{-7}$	$4.095 \ 23 \times 10^{-6}$	$7.999 \ 04 \times 10^{-6}$
0.03	$7.268 \ 13 \times 10^{-7}$	$3.371 \ 35 \times 10^{-6}$	$1.381 \ 81 \times 10^{-5}$	$2.699 \ 27 \times 10^{-5}$
0.04	$1.718 \ 78 \times 10^{-6}$	$7.984 \ 64 \times 10^{-6}$	$3.274 \ 34 \times 10^{-5}$	$6.396 \ 93 \times 10^{-5}$
0.05	$3.346 \ 88 \times 10^{-6}$	$1.557 \ 81 \times 10^{-5}$	$6.392 \ 50 \times 10^{-5}$	$1.249 \ 06 \times 10^{-4}$
0.06	$5.762 \ 02 \times 10^{-6}$	$2.688 \ 33 \times 10^{-5}$	$1.104 \ 05 \times 10^{-4}$	$2.157 \ 66 \times 10^{-4}$
0.07	$9.109 \ 74 \times 10^{-6}$	$4.262 \ 28 \times 10^{-5}$	$1.752 \ 12 \times 10^{-4}$	$3.424 \ 95 \times 10^{-4}$
0.08	$1.352 \ 91 \times 10^{-5}$	$6.350 \ 84 \times 10^{-5}$	$2.613 \ 57 \times 10^{-4}$	$5.110 \ 17 \times 10^{-4}$
0.09	$1.915 \ 16 \times 10^{-5}$	$9.023 \ 92 \times 10^{-5}$	$3.718 \ 31 \times 10^{-4}$	$7.272 \ 28 \times 10^{-4}$
0.10	$2.610 \ 00 \times 10^{-5}$	$1.235 \ 00 \times 10^{-4}$	$5.096 \ 00 \times 10^{-4}$	$9.970 \ 00 \times 10^{-4}$

3 结论

本文运用 Adomian 法求解时间方向上的分数阶 Klein-Gordon 方程。对于线性 Klein-Gordon 方程,甚至可以给出具体的解析解;对于非线性的 Klein-Gordon 方程,选取前几项作为其解析近似解,也可得到较高的精度。通过求解几种不同类型的 Klein-Gordon 方程的近似解,可很明显的看出,Adomian 方法在求解分数阶微分方程上非常有效,而且求解过程中不需要线性化和扰动,减少了求解过程中的误差。

参考文献(References)

- [1] Oldham K B, Spanier J. The fractional calculus[M]. New York: Academic Press, 1974.
- [2] Miller K S, Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations [M]. New York: Wiley-Interscience Publication, 1993.
- [3] Podlubny I. Fractional differential equations [M]. New York: Academic Press, 1999.
- [4] Gorenflo R. Fractional calculus[M]. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [5] Sabatier J, Argawal O P, Machado J A T. Advances in fractional calculus [M]. New York: Springer-Verlag, 2007.
- [6] Das S. Functional fractional calculus [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [7] Bagley R L, Torvik P J. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials[J]. *J Appl Mech*, 1984, 51: 294-298.
- [8] Heymans N, Podlubny I. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives[J]. *Rheol Acta*, 2006, 45: 765-772.
- [9] Zhou T S, Li C P. Synchronization in fractional-order differential systems [J]. *Physica D*, 2005, 212: 111-125.
- [10] Li C P, Peng G J. Chaos in Chen's system with a fractional order[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 22: 443-450.
- [11] Li C P, Deng W H, Xu D. Chaos synchronization of the chua system with a fractional order[J]. *Physica A*, 2006, 360: 171-185.
- [12] Li C P, Deng W H. Remarks on fractional derivatives [J]. *Appl Math Comput*, 2007, 187: 777-784.
- [13] Wang Y H, Li C P. Does the fractional Brusselator with efficient dimension less than 1 have a limit cycle?[J]. *Phys Lett A*, 2007, 363(5-6): 414-419.
- [14] Zhao Z G, Guo Q, Li C P. A fractional model for the allometric scaling laws[J]. *The Open Applied Mathematics Journal*, 2008, 2: 26-30.
- [15] Bataineh A S, Alomari A K, Noorani M S M. Series solutions of systems of nonlinear fractional differential equations [J/OL]. *Acta Appl Math*, 2008, doi:10.1007/s10440-008-9271-x.
- [16] Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1996, 7: 1461-1477.
- [17] Hartley T T, Lorenzo O I. Fractional system identification based continuous order-distributions [J]. *Signal Processing*, 2003, 83: 2287-2300.
- [18] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. Fractional integrals and derivatives theory and applications[M]. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [19] Hilfer R. Applications of fractional Calculus in physics [M]. Singapore: World Scientific, 2000.
- [20] Cherruault Y. Convergence of Adomian's method [J]. *Kybernetes*, 1989,

18(2): 31-38.

- [21] Cherruault Y, Adomian G. Decomposition method: a new proof of convergence[J]. *Math Comput Model*, 1993, 18: 103-106.
- [22] Cherruault Y, Saccamandi G, Some B. New results for convergence of Adomian's decomposition method applied to integral equations[J]. *Math Comput Model*, 1992, 16: 83-93.
- [23] Ouedraogo R Z, Cherruault Y, Abbaoui K. Convergence of Adomian's method applied to algebraic equations [J]. *Kybernetes*, 2000, 29: 1298-1305.
- [24] Abbaoui K, Cherruault Y. Convergence of Adomian method applied to nonlinear equations[J]. *Math Comput Model*, 1994, 20: 69-73.
- [25] Abbaoui K, Cherruault Y. Convergence of Adomian method applied to differential equations[J]. *Math Comput Model*, 1994b, 20: 103-109.
- [26] Himoun N, Abbaoui K, Cherruault Y. New results of convergence of Adomian's method[J]. *Kybernetes*, 1999, 28(4): 423-429.

(责任编辑 代丽)

·学术动态·



中国力学学会

学术大会 '2009 征稿

中国力学学会学术大会 '2009 将于 2009 年 8 月在河南省郑州市举行。大会由中国力学学会主办,郑州大学承办,目前共设立 14 个分会,55 个专题研讨会。其中分会全部为邀请报告,由分会负责人组织约稿。专题研讨会面向全国力学及相关科技工作者征稿。

拟向专题研讨会投稿的作者请于 2009 年 4 月 1 日之前提交稿件的详细摘要,内容包括:① 文章题目;② 作者姓名、单位、邮编、电子信箱地址;③ 摘要正文。摘要内容应控制在 1 页 A4 纸以内。摘要将由大会学术委员会审稿,审核通过的稿件,摘要将被收录到论文摘要集,全文收录到光盘。

投稿者可选择相应的专题研讨会进行投稿,专题研讨会目录请参见网页 http://www.cstam.org.cn/cc-tam2009/list_zhti.asp?classid=7&unids=28。

稿件采用在线提交的办法,提交网址为:<http://www.cstam.org.cn/cctam2009/index.asp>。投稿者须在网注册个人信息后在线提交稿件。

详细摘要投稿截止日期:2009 年 4 月 1 日;全文投稿截止日期:2009 年 6 月 15 日。

联系人:刘洋(电话:010-82543903,62559209,电子信箱:liuyang@cstam.org.cn);何漫丽(电话:010-82543905,62536271,电子信箱:hemanli@cstam.org.cn)。传真:010-62559588。联系地址:北京市海淀区北四环西路 15 号中国力学学会(100190)。