

时滞系统稳定性与 Hopf 分岔的迭代法

王在华

中国人民解放军理工大学理学院, 南京 211101

南京航空航天大学航空宇航学院, 南京 210016

摘要 简要综述了迭代法在时滞系统稳定性与 Hopf 分岔研究中的若干新进展。在稳定性分析中, 利用 Lambert W 函数, 时滞系统的最大实部特征根可以用 Newton-Raphson 等迭代法求得。而在 Hopf 分岔分析中, 利用迭代法求得了分岔周期解的近似表达式。对这两个问题, 迭代法简便有效。

关键词 时滞系统; 稳定性; Hopf 分岔; 迭代法

中图分类号 O317, O322

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2009)02-0062-04

Applications of Iterative Methods to Studies on Stability and Hopf Bifurcation of Time-Delay Systems

WANG Zaihua

*Institute of Science, PLA University of Science and Technology,
Nanjing 211101, China*

*College of Aerospace Engineering, Nanjing University of
Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*

Abstract This paper presents a brief review on the recent advances in applications of iterative methods to studies on stability and Hopf bifurcation of time-delay systems. In stability analysis, the Newton-Raphson iterative method is used to calculate the rightmost characteristic root(s), with the help of the Lambert W function. In Hopf bifurcation analysis, the iterative method is applied for finding an approximate solution of the bifurcated periodic solution. In both cases, the iterative methods are very effective.

Keywords time-delay systems; stability; Hopf bifurcation; iterative method

0 引言

对时滞系统, 稳定性分析的一种非常方便有效的方法是稳定性切换, 其思路是通过分析介于稳定和不稳定之间的临界稳定来获得含参数的时滞系统的稳定性^[1-3], 但这种方法不适用于一般的多时滞系统, 此时需要求助数值算法。最直接

的方式是确定特征根分布, 即求解含有指数函数的超越方程。当系统平衡点失稳后, 时滞系统常常会发生 Hopf 分岔而导致自激周期运动。如何求出分岔周期解并确定其稳定性, 是分岔分析的中心任务, 其中, 中心流形约化方法^[4-5]和摄动法^[6-10]是普遍采用的 Hopf 分岔分析方法。从计算的角度看, 摄动法比中心流形法更加简便^[11]。

迭代法由于其结构简单、易于计算机实现而被广泛应用于非线性方程(组)的数值求解中。对单根而言, Newton-Raphson 迭代法和 Halley 迭代法分别具有 2 阶和 3 阶的收敛速度。由于时滞系统的特征方程有无穷多个根, 无法通过直接应用迭代法求得所有特征根来确定时滞系统的稳定性。用迭代法可求得最大实部的特征根, 从而确定系统的稳定性, 算例表明该方法简便有效^[12-14]。另一方面, 迭代法可用于确定时滞系统的分岔周期解, 获得了满意的结果, 对某些系统该方法甚至优于中心流形约化法等方法^[15]。求解分岔周期解的迭代法和伪振子分析法^[16-20]有直接的关联, 使得迭代法也可以讨论分岔周期解的稳定性, 这是谐波平衡法等方法所不具有的优点。

本文目的是对这两种迭代法的研究进展作简略的综述, 并提出进一步思考的问题。

1 求最大实部特征根的迭代法

1.1 方法介绍

时滞系统平衡点渐近稳定的充分必要条件是其特征根都具有负实部。对滞后型时滞系统和一定条件下的中立型系统, 这个条件等价于最大实部特征根的实部小于零。在应用 Newton-Raphson 公式等迭代算法求解时, 只有初始值选在所求根的附近才能保证迭代序列收敛^[12-14]。为此,

收稿日期: 2008-11-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(10825207, 10532050); 全国优秀博士学位论文作者专项基金项目

作者简介: 王在华, 教授, 研究方向为时滞系统动力学与控制、稳定性与非线性动力学, 电子信箱: zhwang@nuaa.edu.cn

引入 Lambert W 函数将问题转化为求某个超越函数的零点。

Lambert W 函数定义为 $w e^w = z (z \in \mathbb{C})$ 的解 $w = W(z)$, 它有无穷多个分支, 分别记为 $W_i(z) (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 其中 $W_0(z)$ 是在原点解析的唯一分支, 满足 $W_0(0)=0$ 。利用 Lambert W 函数, $s + a + b e^{-\sigma \tau} = 0$ 的根可分别表示为 $s_i = -a + W_i(-b \tau e^{a \tau}) / \tau (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。进一步有, 该超越方程的根皆具有负实部的充要条件是

$$\operatorname{Re}[W_i(-b \tau e^{a \tau})] < a \tau$$

这个结论是如下命题的直接推论

$$\max_{i=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \operatorname{Re} W_i(z) = \operatorname{Re} W_0(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C}) \quad (1)$$

在一般情况下, 时滞系统的特征根不可能有这样的显式表示, 但上述结论启发我们利用 Lambert W 函数, 用数值方法求得最大实部的特征根。为此, 如果记时滞系统的特征函数为 $f(s)$, 那么可选取适当的比例常数 $\alpha > 0, \beta$, 构造一个相关的函数 $F(s)^{[14]}$

$$F(s) = \alpha s - W_0((\alpha s - \beta f(s)) e^{\alpha s}) \quad (2)$$

然后对该函数, 利用 Newton-Raphson 迭代格式

$$s_{n+1} = s_n - \frac{F(s_n)}{F'(s_n)} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

或者 Halley 迭代格式

$$s_{n+1} = s_n - \frac{F(s_n)}{F'(s_n)} \left(1 - \frac{F(s_n) F''(s_n)}{(F'(s_n))^2} \right)^{-1} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

即可求得最大实部特征根。以 Newton-Raphson 迭代法为例, 其迭代序列收敛的条件是

$$\left| \frac{F(s^*) F''(s^*)}{(F'(s^*))^2} \right| < 1 \quad (4)$$

其中 s^* 是待求的根。如果 α, β 取得足够小, 那么 $F(s) \approx 0$, 从而迭代序列收敛的条件 (4) 得到满足。另一方面, 设 s^* 是具有最大实部的特征根, 那么必有 Lambert W 函数的某个分支满足 $\alpha s^* = W_i(\alpha s^* e^{\alpha s^*})$ 。对充分小的 α , 有 $\alpha s^* \approx W_0(\alpha s^*)$ 。因为 s^* 具有最大实部, 利用性质 (1) 可知, 必须有 $i=0$ 。因此, 只要 α, β 取得足够小, 那么最大实部的特征根一定由 Lambert W 函数主支对应的函数 $F(s)$ 求得。

在多数情况下, 对 $F(s)$ 运用迭代法可直接求出 $f(s)$ 的最大实部特征根。在某些情况下, $F(s)$ 的零点可能多于一个, 因此应对计算结果进行检验。应用 Nyquist 图示法^[12-14]可以很方便地判断所求的根是否为最大实部特征根。

1.2 应用举例

考察利用线性矩阵不等式 (LMI) 方法广泛研究过的中立型时滞系统

$$\dot{x}(t) + p \dot{x}(t - \tau) = -a x(t) + b \tanh x(t - \sigma) \quad (|p| < 1)$$

的渐近稳定性, LMI 方法得到的有关结果是保守的。由于方程的特征函数是

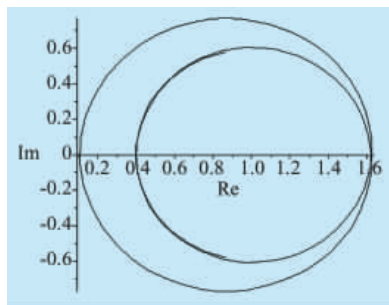
$$f(s) = s + p s e^{-\sigma \tau} + a - b e^{-\sigma \tau}$$

取 $\alpha = \beta = 1/100$, 即可容易求出最大实部的特征根 (表 1), 其中前 3 种情形是渐近稳定的, 而后 2 种情形是不稳定的。利用 Nyquist 图示法可容易验证数值结果的正确性 (图 1)。

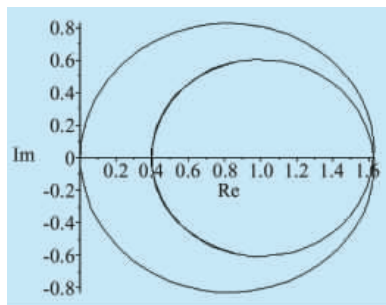
表 1 中立型时滞系统的最大实部特征根

Table 1 Rightmost characteristic root(s) of the neutral time-delay system

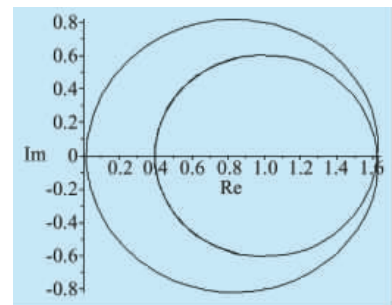
参数值	最大实部特征根 s^*
$p=0.6, \tau=0.15, a=0.6, b=0.493, \sigma=0.3$	-0.06097650934
$p=-0.7, \tau=9, a=0.6, b=-0.3, \sigma=10$	-0.01873375302+1.443203614i
$p=0.6, \tau=0.1, a=0.6, b=0.36, \sigma=0.3$	-0.1396378993
$p=0.2, \tau=0.15, a=0.6, b=0.3, \sigma=0.3$	0.7138860137
$p=0.3, \tau=0.15, a=0.6, b=-0.3, \sigma=0.4$	0.2553951030



(a) $f(i\omega)/(1+i\omega)$ 的 Nyquist 曲线不包含原点
(a) The Nyquist plot of $f(i\omega)/(1+i\omega)$ without containing the origin



(b) $f(i\omega+Res)/(1+i\omega)$ 的 Nyquist 曲线经过原点
(b) The Nyquist plot of $f(i\omega+Res)/(1+i\omega)$ passing through the origin



(c) $f(i\omega+Res+0.01)/(1+i\omega)$ 的 Nyquist 曲线不包含原点
(c) The Nyquist plot of $f(i\omega+Res+0.01)/(1+i\omega)$ without containing the origin

图 1 对表 1 中第一种情形计算结果的检验

Fig. 1 Confirmation of the computational results for the first case in Table 1

2 求 Hopf 分岔周期解的迭代法

2.1 方法介绍

研究表明^[15],依赖于某参数 p 的任意阶时滞系统都可以发生 Hopf 分岔而产生周期运动。系统发生 Hopf 分岔的基本条件是:存在某参数值 p_0 ,当 $p=p_0$ 时系统特征方程有一对简单的纯虚根,而其他的特征根皆具有负实部,且当 p 的取值跨过 p_0 时,到达虚轴的这对特征根穿越虚轴。这就要求当 $p=p_0$ 时,特征方程的最大实部根是一对简单的纯虚根 $\pm i\omega_0$ 。由中心流形约化定理或周期函数的 Fourier 展开式可知,在分岔点附近,这个(稳态)分岔周期解的主要部分是 $r \cos(\omega_0 t + \theta)$,其中 r, θ 是待定的常数。对频率变化不大的时滞系统来说,如果能求出振幅 r 的一个足够满意的估计式,就可以得到分岔周期解的近似表达式。

以单变量时滞微分方程

$$x^{(n)}(t) + F(p, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t), x(t-\tau), x'(t-\tau), x''(t-\tau), \dots, x^{(n-1)}(t-\tau)) = 0 \quad (5)$$

为例,其中 p 为某参数(包括可以是时滞)。假定该系统在 $p=p_0$ 时发生 Hopf 分岔,对应的最大实部根是一对简单的纯虚根 $\pm i\omega_0$,那么构造如下的迭代序列

$$x_{k+1}^{(n)}(t) = x_k^{(n)}(t) - [x_k^{(n)}(t) + F(p, x_k(t), x_k'(t), x_k''(t), \dots, x_k^{(n-1)}(t), x_k(t-\tau), x_k'(t-\tau), x_k''(t-\tau), \dots, x_k^{(n-1)}(t-\tau))] \quad (6)$$

其中 $k=0, 1, 2, \dots$ 。选取初始函数为分岔解的主要部分(不计相位差)

$$x_0(t) = r \cos(\omega_0 t) \quad (7)$$

由迭代公式可计算出 $x_1(t)$ 。由三角函数系的正交性,可要求方程的解满足 Galerkin 型条件,即

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} [x_{k+1}^{(n)}(t) - x_k^{(n)}(t)] x_k'(t) dt = 0 \quad (8)$$

其意义是:对充分靠近分岔值的参数, $x_0(t)$ 作为分岔解的近似有足够好的精度,那么 $x_1(t)$ 中不含 $\sin(\omega_0 t)$ 的项,而仅用高次谐波项来修正迭代精度。由 Galerkin 条件可确定周期解的振幅 r 的近似值 r_0 (一般说来,在分岔点附近分岔周期解的振幅不是大振幅,因此当方程有多个解时,取最小的解为 r_0),从而得到近似解

$$x(t) \approx x_0(t) = r_0 \cos(\omega_0 t)$$

如果考虑到高次谐波项的影响,那么可用 $x(t) \approx x_1(t)$ 。

很明显,该方法非常简单,然而对很多实际系统,利用该方法可以得到精度很高的近似解,其精度甚至可以优于一些需要进行大量繁琐计算的现有方法。特别地,这一方法与伪振子分析法有着直接的关系。除一个正常数外,方程(8)的左边就是伪振子分析法^[16-20]中的函数 $h(r)$ 。因此,迭代法不仅可以确定分岔解的近似解,还可以确定分岔解的稳定性:如果 $h'(r_0) < 0$,那么分岔解是稳定的。另外,结合时滞系统状态空间关于特征值 $\pm i\omega_0$ 的分解,还可以构造出迭代序列来分析多变量时滞系统的 Hopf 分岔产生的周期解^[15]。

2.2 应用举例

考察向日葵方程

$$\alpha''(t) + \frac{a}{\tau} \alpha'(t) + \frac{b}{\tau} \sin \alpha(t-\tau) = 0 \quad (a, b, \tau > 0)$$

由于 Hopf 分岔是局部性质,因而正弦函数可取 Taylor 展开式的不超过 3 次方的项或不超过 5 次方的项,将展开后的向日葵方程左端除二阶导数项外的部分记为 $\phi(a, b, \alpha'(t), \alpha(t-\tau))$ 。由线性稳定性分析知,当

$$(a, b\tau) \in \Omega_0 = \{(\omega \tan \omega, \omega^2 \sec \omega); \omega \in (0, \pi/2)\}$$

时,最大实部特征根为 $\pm i\omega$,且在临界点处有 $ds/da \neq 0$, $ds/db \neq 0$, $ds/d\tau \neq 0$ 。因而,当 a, b, τ 这 3 个参数中任意一个作为参数时,向日葵方程发生 Hopf 分岔。

特别地,当 $a=a_0=\sqrt{3}\pi/18$, $b=b_0=\sqrt{3}\pi^2/54$, $\tau=\tau_0=1$ 时,最大实部特征根为 $\pm(\pi/6)i$ 。以 b 为分岔参数的情形为例,由 $x_0(t)=r \cos(\omega_0 t)$ 出发,经迭代

$$\alpha_{k+1}^{(n)}(t) = -\phi(a_0, b, \alpha_k'(t), \alpha_k(t-\tau_0))$$

可算出 $\alpha_1(t)$ 。利用 Galerkin 条件,可求得 r_0 的值。当 $\sin \alpha(t-\tau)$ 取 3 次 Taylor 展开时, r_0 的解还可解析地表示。由于迭代法得到的结果与伪振子分析法得到的结果一致,由文献[19]知,迭代法得到的结果优于利用中心流形约化与规范理论得到的结果(图 2)。图 2 中,实线是迭代法给出的估计,粗线对应于正弦函数取 5 次 Taylor 逼近,细线对应于正弦函数取 3 次 Taylor 逼近,虚线对应于中心流形和规范理论得到的结果,点对应数值计算结果。迭代法涉及的计算少且简单。

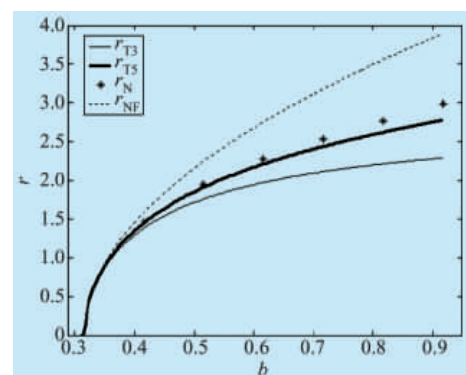


图 2 以 b 为分岔参数时得到的分岔图

Fig. 2 Bifurcation diagram with respect to b

3 讨论

迭代法是求解非线性方程的一种简便有效的方法,但其成功应用有赖于选取恰当的初始迭代。在求最大实部特征根时,利用 Lambert W 函数构造了一个和特征函数相关的辅助函数,使得对相当随意的初始值都可使迭代序列很快地收敛到这个特征根。但也确实存在这样的情况,辅助函数除了最大实部特征根外还有其他根,因而需要利用 Nyquist 图示法来检验计算结果。如果经检验所求得的根不具有最大实部,则应调整比例常数的大小。一个有待解决的问题是,对满足什么条件的比例常数,辅助函数仅有最大实部特征根? 对于

分岔周期解,将其限定在分岔点附近求解,所以只需要考虑这个解的主要部分,然后通过一次迭代即可确定周期解的振幅,如果要考虑高次谐波项的作用,则需要计算二次或三次迭代。就像多尺度法等摄动法那样,通常一两次迭代即可得到满意的结果。从原理上来说,只要对所求解的特征和形式了解清楚,都可以通过迭代法求解,有兴趣的读者不妨尝试一下时滞系统双 Hopf 分岔导致的周期解或拟周期解的求解。

参考文献 (References)

- [1] Hu Haiyan, Wang Zaihua. Dynamics of controlled mechanical systems with delayed feedback[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [2] Wang Zaihua, Hu Haiyan. Stability switches of time delayed dynamic systems with unknown parameters [J]. *J Sound and Vibration*, 2000, 233 (2): 215-233.
- [3] 王京祥, 王在华. 时滞状态反馈控制系统的稳定性增益区域 [J]. *动力学与控制学报*, 2008, 6(4): 301-306.
Wang Jingxiang, Wang Zaihua. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6 (4): 301-306.
- [4] Xu Xu, Hu Haiyan, Wang Huailei. Stability switches, Hopf bifurcation and chaos of a neuron model with delay-dependent parameters[J]. *Physics Letter A*, 2006, 354(1): 126-136.
- [5] Xu Xu, Hu Haiyan, Wang Huailei. Stability, bifurcation and chaos of a delayed oscillator with negative damping and delayed feedback control[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 49(1): 117-129.
- [6] Hu Haiyan, Wang Zaihua. Singular perturbation methods for nonlinear dynamic systems with time delay[J/OL]. *Chaos, Solitons and Fractals*, doi: 10.1016/j.chaos.2007.07.048.
- [7] Xu Jian, Chung K W, Chan C L. An efficient method for studying weak resonant double Hopf bifurcation in nonlinear systems with delayed feedback[J]. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2007, 6: 29-60.
- [8] Wang Zaihua, Hu Haiyan. An energy analysis of nonlinear oscillators with time-delayed coupling [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2006, 16: 2275-2292.
- [9] Wang Zaihua, Hu Haiyan. An energy analysis of the local dynamics of a delayed oscillator near a Hopf bifurcation [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2006, 46: 149-159.
- [10] Zheng Yuanguang, Wang Zaihua. Stability and Hopf bifurcations of an optoelectronic time-delay feedback system [J/OL]. *Nonlinear Dynamics*, 2008, doi:10.1007/s11071-008-9426-3.
- [11] Nayfeh A H. Order reduction of retarded nonlinear systems-the method of multiple scales versus center-manifold reduction[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 51(4): 483-500.
- [12] Wang Zaihua, Hu Haiyan. Calculation of the rightmost characteristic root of retarded time-delay systems via Lambert W function[J]. *J Sound and Vibration*, 2008, 318(4-5): 757-767.
- [13] Wang Zaihua. Numerical stability test of neutral delay differential equations[J/OL]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2008, doi:10.1155/2008/698043.
- [14] Wang Zaihua. Numerical test for stability of fractional delay systems[J]. Submitted to *Automatica*, 2008.
- [15] Wang Zaihua. An iteration method for calculating the periodic solution of time-delay systems after a Hopf bifurcation [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 53(1-2): 1-11.
- [16] Wang Zaihua, Hu Haiyan. Pseudo-oscillator analysis of scalar nonlinear time-delay systems near a Hopf bifurcation [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, 17(8): 2805-2814.
- [17] Li Jing, Wang Zaihua. Hopf bifurcation of a nonlinear Lasota-Ważewska-type population model with maturation delay [J]. *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems B: Applications & Algorithms*, 2007, 14 (5): 611-623.
- [18] Gao Feng, Wang Huailei, Wang Zaihua. Hopf bifurcation of a nonlinear delayed system of machine tool vibration via pseudo-oscillator analysis[J]. *Nonlinear Analysis B: Real World Applications*, 2007, 8(5): 1561-1568.
- [19] Li Junyu. Hopf bifurcation of the sunflower equation [J/OL]. *Nonlinear Analysis B: Real World Applications*, 2008, doi:10.1016/j.nonrwa.2008.03.002.
- [20] Li Junyu, Wang Zaihua. Local Hopf bifurcation of complex nonlinear systems with time-delay [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2009, 19(3): in press.

(责任编辑 陈广仁)

·学术动态·



“第十四届全国青年通信学术会议”征文

中国通信学会主办,中国通信学会青年工作委员会和大连工业大学承办,《通信学报》协办的“第十四届全国青年通信学术会议”将于 2009 年 7 月(具体时间另行通知)在大连工业大学召开。会议将就现代通信理论与技术的最新研究进展和发展趋势开展深入、广泛的学术交流,并特邀著名专家、学者作专题报告。本次会议将从到会宣读的论文中遴选出优秀论文推荐给《通信学报》(EI 收录),其他论文将收录至由国防工业出版社正式出版的学术论文集。为保证本次会议的学术质量,吸引更多的高水平学术论文,现向全世界广大华人青年科技工作者公开征稿。

本次会议的主要征文范围包括:宽带交换技术(BX)、计算机通信与 WLAN CC、数字城市与数字地球 DC、电路与系统 CI 等领域。来稿要求内容具体,突出作者的创新与成果,具有较重要的学术价值与应用推广价值,未在国内外公开发行的刊物或会议上发表或宣读过;第一作者的年龄不超过 45 岁,文末附加不超过 100 字的第一作者简介;论文投稿为全文投稿方式,中英文稿件均接收,稿件请用 Word 排版;所有论文必须提供至少一个可靠的电子邮件地址,并在稿件最后注明联系人的详细联系方式,包括详细的通信地址、邮编、联系电话、手机号码、电子信箱等。

会议网站: <http://leaderstudio.cn>

联系人:冯幼荣,段晓光;联系电话:13269103820,13141400857;电子信箱:nyccc@tom.com;通信地址:北京邮电大学 287 信箱(100876)。