

基于高斯比例混合模型图像 Curvelet 域去噪

黄 华, 王孝通

海军大连舰艇学院航海系, 辽宁大连 116018

摘要 提出了一种基于高斯比例混合模型的图像 Curvelet 域去噪算法, 改善了图像的去噪效果。首先对图像进行 Curvelet 变换, 然后建立系数邻域的高斯比例混合模型, 最后在模型基础上用贝叶斯最小二乘估计方法对系数进行估计。算法有效结合了 Curvelet 变换对图像边缘的高效表示能力和高斯比例混合模型对邻域系数相关性的概括能力。实验结果表明, 在主观视觉上, 该算法对图像边缘进行了很好的保护; 在峰值信噪比上较其他算法也有所改善; 特别是对纹理细节比较丰富的图像, 去噪效果更加明显。

关键词 图像去噪; Curvelet 变换; 高斯比例混合

中图分类号 TP391

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2009)03-0031-04

Image Denoising Based on Gaussian Scale Mixtures in the Curvelet Domain

HUANG Hua, WANG Xiaotong

Department of Navigation, Dalian Naval Academy, Dalian
116018, Liaoning Province, China

Abstract A new method using Gaussian Scales Mixtures in the Curvelet domain is proposed for image denoising. The Curvelet local coefficient model is first built using Gaussian Scale Mixtures. Then, the coefficients are estimated using Bayes least squares estimator. This algorithm combines the merits of Curvelet for image edge representation and Gaussian Scale Mixtures for capturing correlation of local coefficients. Some numerical experiments show the effectiveness of our method for image denoising, especially, for texture and detail predominated images.

Keywords Image denoising; Curvelet transform; Gaussian scale mixtures

0 引言

图像在获取或者传输的过程中, 不可避免地要引入噪

声。为了改善图像的视觉效果, 或者是因为后续处理的需要, 必须对图像进行去噪。去噪方法大体上可以概括为两大类, 一类是基于空域的去噪方法, 比较经典的是维纳滤波^[1-2]; 另一类是基于变换域的去噪方法, 具有典型代表性的是小波变换去噪。但是小波变换的各向同性(isotropy)的特点, 使得它在表示自然图像的各向异性(anisotropy)特征(如边缘等)方面效率不高^[3], 这就使得基于小波变换的图像去噪算法普遍存在边缘模糊的现象, 特别是对纹理细节非常丰富的图像, 图像质量下降就更加严重。近年来, 在小波理论的基础上, J. L. Starck 等^[4]结合小波变换和 Curvelet 变换对图像不同几何结构的表示优势, 采用迭代的方法对图像实行去噪, 取得了非常好的效果, 但是实现起来非常复杂; 金海燕^[5]等建立了 Curvelet 域的隐马尔科夫树(HMT)模型并应用于 SAR 图像去噪, 效果较好, 但是训练复杂度高; H. Rabbani 等^[6]首先建立了 Curvelet 系数的高斯混合模型(GMM), 然后用最大后验估计(Maximum A Posteriori, MAP)对系数进行估计, 此算法粗略地将系数分为“重要”或“不重要”两类, 不适用于结构复杂的图像。

为了对纹理细节比较丰富的图像进行有效的去噪处理, 并对图像边缘进行较好的保护, 改善峰值信噪比, 本文尝试先对图像进行 Curvelet 变换, 然后建立系数邻域的高斯比例混合模型, 最后在模型基础上用贝叶斯最小二乘估计方法对系数进行估计。这个算法将综合发挥 Curvelet 变换对图像边缘的高效表示优势和高斯比例混合模型对邻域系数相关性的概括能力。

收稿日期: 2008-12-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(60473141)

作者简介: 黄华, 博士研究生, 研究方向为图像增强理论与技术, 电子信箱: ich_liebe_dichh@hotmail.com; 王孝通(通信作者), 教授, 研究方向为交通信息工程及控制, 电子信箱: changqing527@163.com

1 Curvelet 变换和高斯比例混合模型

1.1 Curvelet 变换

Curvelet 变换是在小波理论的基础上发展起来的一种新的数据表示方法,特别适用于自然图像或者具有特殊几何结构的高维数据^[7]。Curvelet 变换是一种多尺度多方向的图像表示方法,它的核心关系就是 Curvelet 基的支撑区间满足宽度为长度的平方,也就是说,具有各向异性的尺度关系,能够有效表示图像的各向异性特征。Curvelet 基的多方向和各向异性特征,使它能够高效地表示图像中的边缘信息,在图像去噪过程中能够对边缘进行很好的保护。

1.2 高斯比例混合模型

作者称随机向量 ξ 是服从高斯比例混合 (GSM) 分布的,如果它能够表示为

$$\xi \triangleq \sqrt{z} u \quad (1)$$

式中, $\triangleq$ 表示依分布等价; u 为零均值的高斯随机向量; $z > 0$ 为隐含的正标量因子; u 和 z 相互独立。 ξ 分布的最大特点是相对于 z 的条件分布是零均值的正态分布。 ξ 的概率密度分布函数 $P_{\xi}(\xi)$ 由 u 的协方差矩阵 C_u 和 z 的概率分布密度函数 $P_z(z)$ 共同决定, $\xi|z \triangleq N(0, zC_u)$, 有

$$p_{\xi}(\xi) = \int p(\xi|z) p_z(z) dz = \int \frac{\exp[-\xi^T(zC_u)^{-1}\xi/2]}{(2\pi)^{N/2}|zC_u|^{1/2}} p_z(z) dz \quad (2)$$

式中, N 是 u 和 ξ 的维数。

用数据仿真方法分析高斯比例混合模型的边缘和联合统计特征,发现它具有“稀疏”(sparse)和“集聚”(cluster)分布特性。

2 基于高斯比例混合模型的图像 Curvelet 域去噪

与基于小波变换的图像去噪算法一样,本文算法先对含噪图像进行 Curvelet 变换,然后对除低通子带之外的所有子带系数进行估计,最后反变换重构图像。对子带系数进行估计时,本文在 Curvelet 系数邻域高斯比例混合 (GSM) 模型的基础上,应用贝叶斯最小二乘 (Bayes Least Squares, BLS) 估计。

2.1 图像 Curvelet 系数邻域的高斯比例混合模型

目前,直接的证据证明了自然图像的高阶统计特性是服从非高斯分布的,有方向的带通滤波器的响应分布在零附近有尖锐的峰,并且尾部比高斯分布长得多,称之为分布的“稀疏性”。另外,大幅度的系数具有“集聚”分布的特性,也就是说大幅度的系数往往集中在特殊的区域(比如边缘等)。作者用高斯比例混合模型对 Curvelet 系数邻域的统计情况进行描述。

考虑一幅图像的 Curvelet 分解系数。假设 $x_c^o(n, m)$ 是尺度 s , 方向 o , 中心位置在 $(2^n, 2^m)$ 的线性基函数上的分解系数,则 $x_c^o(n, m)$ 即是由层内和层间的邻域系数(包括系数本身)组成的向量。为了简化符号,以下约定 x_c 和 X 分别表示系数及其邻域向量。根据式(1),向量 x 可以表示为

$$x = \sqrt{z} u \quad (3)$$

对 Curvelet 系数而言,因子 z 通常是邻域系数值的函数,用来调制邻域中各系数的局部方差,以解析形式描述系数幅

度间的相关性,对 z 的不同概率密度选取将体现出不同的相关思想。

2.2 含噪图像统计模型

假设图像被方差为 σ^2 的高斯白噪声所污染,噪声与图像相互独立。随机向量 y 代表含噪图像的 Curvelet 系数邻域向量,它是观察数据,维数为 N 。 x, w 是原图像和噪声相应的系数邻域向量。由 Curvelet 变换的线性特征可知,

$$y = x + w \quad (4)$$

根据式(3),有

$$y = \sqrt{z} u + w \quad (5)$$

其中 z 是相互独立的随机变量; u, w 是相互独立的随机向量。

u, w 是零均值的高斯随机向量,自协方差矩阵分别为 C_u 和 C_w 。观察向量 y 对于标量因子 z 的条件分布也是零均值高斯型的,有 $E\{y|z\} = 0$, 自协方差矩阵 $C_{y|z} = zC_u + C_w$ 。因此, y 的条件密度分布函数可以写为

$$p(y|z) = \frac{\exp[-y^T(zC_u + C_w)^{-1}y/2]}{\sqrt{(2\pi)^N|zC_u + C_w|}} \quad (6)$$

噪声向量自协方差矩阵 C_w 可以这样得到: 对单位脉冲函数 $\sigma\sqrt{N_x N_y} \delta(n, m)$ 进行 Curvelet 变换,利用变换系数 w 求得噪声向量的自协方差矩阵 C_w 。 C_w 已知,就可以根据观察向量 y 的自协方差矩阵 C_y 求出高斯随机向量 u 的自协方差矩阵 C_u 。因为 C_y 可以由 $C_{y|z}$ 对 z 取数学期望得到

$$C_y = E\{z\}C_u + C_w$$

不失一般性,设 $E\{z\} = 1$, 得到

$$C_u = C_y - C_w \quad (7)$$

因为信号的自协方差矩阵是非负定的,但是式(7)得到的自协方差矩阵可能有负的特征值,所以将负的特征值设为零,以此来保证自协方差矩阵 C_u 的非负定性。

2.3 系数估计

作者用系数 x_c 的邻域观察向量 y 得到 x_c 的估计值 $\hat{x}_c$ 。以二次型损失函数为估计误差的测度,使用贝叶斯估计理论,可以得到

$$\hat{x}_c = E\{x_c|y\} = \int x_c p(x_c|y) dx_c$$

进一步得到

$$\hat{x}_c = \int_0^\infty p(z|y) E\{x_c|y, z\} dz \quad (8)$$

上式由两部分组成, $E\{x_c|y, z\}$ 是 x_c 在条件 z 下的贝叶斯最小二乘估计, $p(z|y)$ 是 z 的后验概率密度函数。

先求 $E\{x_c|y, z\}$ 。因为 $x|z$ 服从高斯分布, $C_{y|z} = zC_u + C_w$, 因此有

$$E\{x|y, z\} = zC_u(zC_u + C_w)^{-1}y \quad (9)$$

正定矩阵 C_w 可以表示为 $C_w = SS^T$, 设 $[Q, A]$ 是矩阵 $S^{-1}C_uS^{-T}$ 的特征向量和特征矩阵,即满足 $S^{-1}C_uS^{-T} = QAQ^T$ 。那么

$$zC_u + C_w = zC_u + SS^T = S(zS^{-1}C_uS^{-T} + I)S^T = SQ(zA + I)Q^TS^T \quad (10)$$

简化式(9),有

$$E\{x|y, z\} = zC_uS^{-T}Q(zA + I)^{-1}Q^TS^{-1}y = zSS^{-1}C_uS^{-T}Q(zA + I)^{-1}Q^TS^{-1}y$$

$$=zSQ\Lambda(z\Lambda+I)^{-1}Q^TS^{-1}y=zM\Lambda(z\Lambda+I)^{-1}v \quad (11)$$

其中, $M=SQ$, $v=M^{-1}y$ 。将估计限定在系数 x_c , 得到

$$E\{x_c|y, z\} = \sum_{n=1}^N \frac{zm_{cn}\lambda_n v_n}{z\lambda_n+1} \quad (12)$$

其中, m_{ij} 为矩阵 M 的第 (i, j) 个元素, λ_n 为矩阵 Λ 的对角元素, v_n 为向量 v 中的元素。 c 表示系数 x_c 在向量 x 中所处的位置。

再求式(8)中另一部分: z 的后验概率密度函数 $p(z|y)$ 。应用贝叶斯准则, 有

$$p(z|y) = \frac{p(y|z)p_z(z)}{\int_0^\infty p(y|\alpha)p_z(\alpha)d\alpha} \quad (13)$$

同理, 简化式(6)可得

$$p(y|z) = \frac{\exp(-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{v_n^2}{z\lambda_n+1})}{\sqrt{(2\pi)^N |C_w| \prod_{n=1}^N (z\lambda_n+1)}} \quad (14)$$

尽管随机标量因子 z 可以通过观察数据的最大似然估计得到: $\hat{z} \triangleq \arg \min_z \{\ln p(\xi|z)\}$ 。为了简化计算, 本文使用 Jeffrey 先验密度函数^[8], 即

$$p_z(z) \propto \frac{1}{z} \quad (15)$$

为了保证作为密度函数的合理性, 当 $z \notin [z_{\min}, z_{\max}]$ 时, 假

定 $p_z=0$, 其中 $z_{\min}$ 和 $z_{\max}$ 分别是一个很小和很大的正数。

这样, 根据式(12)~(15), 就可以用数值计算方法求出式

(8)中的系数估计值 $\hat{x}_c$ 。

2.4 算法步骤

本文算法步骤如下。

步骤1 对图像进行 Curvelet 变换, 得到各个子带的系数。

步骤2 对每个子带系数(除低通部分之外), ① 求出噪声系数邻域自相关矩阵 C_w ; ② 求出含噪图像系数邻域的自相关矩阵 C_y ; ③ 根据式(7)求出 C_u ; ④ 计算 Λ 和 M 。

步骤3 对每个邻域, ① 对式(8)积分范围内的每个 z , (a)用式(12)计算 $E\{x_c|y, z\}$, (b)用式(14)计算 $p(y|z)$; ② 用式(13)、(14)计算 $p(z|y)$; ③ 用式(8)计算 $E\{x_c|y\}$ 。

步骤4 用 Curvelet 反变换重构图像, 得到去噪图像。

3 实验分析

为了验证本文算法的有效性和先进性, 对基于 GGD 模型的 BayesShrink 算法^[9]、BLS-GSM 算法^[10]及本文算法进行实际去噪比较, 测试图像为加入高斯白噪声的标准 Barbara 图像, 分辨率为 512×512 像素。图1和图2为3种去噪算法对标准 Barbara 图像从整体到局部的去噪效果比较。



图1 去噪效果比较 (Barbara 图像)

Fig. 1 Comparison of denoising effects (Barbara)

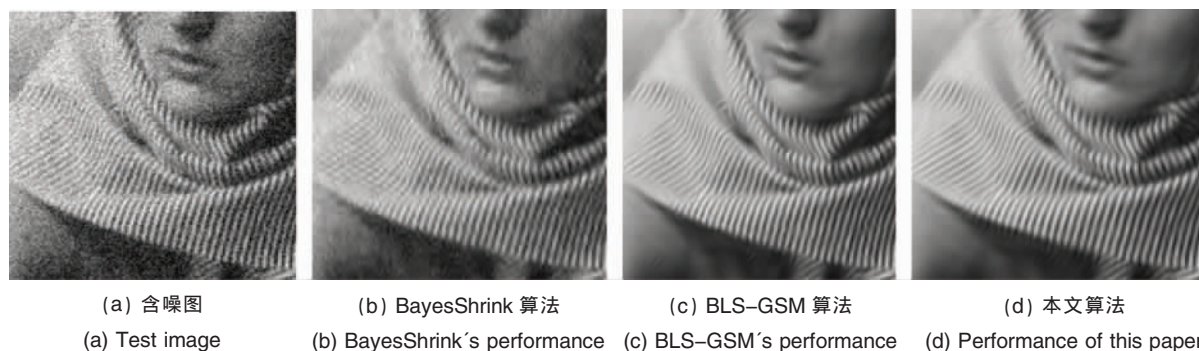


图2 去噪效果比较 (披肩)

Fig. 2 Comparison of denoising effects (Fanon)

实验结果分 3 个方面进行比较:峰值信噪比(PSNR)^[11],边缘保护指数(EPI)^[12]和主观视觉效果。EPI 指数描述算法对图像边缘信息的保护程度,EPI 越大,说明算法对图像边缘的保护效果越好。

表 1 表示的是不同算法的峰值信噪比和边缘保护指数。可以看出,对纹理丰富的 Barbara 图像,本文算法要优于 BLS-GSM 算法。在边缘保护方面,本文算法要一致优于 BLS-GSM 算法。计算复杂度方面,对一幅 512×512 像素的灰度图像,在 Pentium 1.86 GHz 的计算机上运行,BLS-GSM 算法平均耗时 180 s,而本文算法耗时仅 45 s。综合衡量,本文算法明显优于其他算法。

表 1 $\sigma=20$, $P_{\text{PSNR}}=22.12$ dB 时不同算法峰值信噪比比较
Table 1 Comparison of PSNR of different algorithms

性能指标	算法		
	BayesShrink	BLS-GSM	本文算法
峰值信噪比 P_{PSNR}	27.39	30.27	30.61
边缘保护指数 E_{EPI}	0.788	0.805	0.843

由图 1 可知,从视觉效果上来看,无论是图像的清晰或光滑程度,本文算法都要优于其他算法。从图 2 可以比较本文算法和 BLS-GSM 算法对披肩上纹理的保护效果,在图像中部靠左的位置,BLS-GSM 算法去噪同时使图像纹理变得模糊,而本文算法仍然可以见到清晰的纹理。从图 1 和图 2(c)也可以看出,BLS-GSM 算法扭曲了桌布的纹理,而本文算法对图像纹理有很好的保护作用。

4 结论

本文提出的基于高斯比例混合模型的图像 Curvelet 域去噪算法,在视觉效果上取得了非常好的效果。在峰值信噪比的改善上,本文算法也体现了一定的优越性。长期以来,对纹理细节比较丰富的 Barbara 图像去噪是一个很大的挑战。本文充分利用了 Curvelet 变换对图像边缘结构的高效表达能力和 GSM 模型对邻域相关信息的概括能力,对 Barbara 图像去噪取得了非常好的效果。另外,作者研究中发现对其他类型的图像,去噪效果也很好,特别是对边缘细节的保护,本文算法明显优于其他类型的算法。

参考文献 (References)

- [1] Chen X, Schmitt F. Surface modeling of range data by constrained triangulation[J]. *Computer Aided Design*, 1994, 26(8): 632-645.
- [2] Gonzalez R C. 数字图像处理 [M]. 2 版. 阮秋琦,译. 北京:电子工业出版社,2005.
Gonzalez R C. Digital image processing [M]. Ruan Qiuqi, trans. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005.
- [3] DO M N. Directional multiresolution image representation [D]. Lausanne: School of Computer and Communication Sciences, Swiss Federal Institute of Technology, 2001.
- [4] Starck J L, Donoho D L, Candes E J. Very high quality image restoration

by combining wavelets and Curvelets [C]//46SPIE Annual Meeting, Conference on Signal and Image Processing, 2001: 9-16.

- [5] 金海燕, 焦李成, 刘芳. 基于 Curvelet 域隐马尔科夫树模型的 SAR 图像去噪[J]. *计算机学报*, 2007, 30(3): 491-496.
Jin Haiyan, Jiao Licheng, Liu fang. *Chinese Journal of Computers*, 2007, 30(3): 491-496.
- [6] Rabbani H, Vafadust M, Gazor S. Image denoising in Curvelet transform domain using Gaussian mixture model with local parameters for distribution of noise-free coefficients [C]//4th IEEE/EMBS International Summer School and Symposium, Cambridge, 2007: 57-60.
- [7] 何劲, 李宏伟, 张帆. 基于 Curvelet 变换的图像消噪[J]. *现代电子技术*, 2008(2): 140-143.
He Jin, Li Hongwei, Zhang Fan. *Modern Electronics Technique*, 2008(2): 140-143.
- [8] Box G E P, Tiao G C. Bayesian inference in statistical analysis[M]. Wiley InterScience Publisher, 1992.
- [9] Chang S G, Yu Bin, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression [J]. *IEEE Transaction on Image Processing*, 2000, 9(9): 1532-1546.
- [10] Portilla J, Strela V, Wainwrig M J, et al. Image denoising using Gaussian scale mixtures in the wavelet domain [J]. *IEEE Transaction on Image Processing*, 2003, 12(11): 1338-1351.
- [11] 刘晓松, 杨新, 文俊, 等. 一种用于数字图像传感器的彩色插值算法[J]. *中国图像图形学报 A 辑*, 2003, 8(5): 516-521.
Liu Xiaosong, Yang Xin, Wen Jun, et al. *Journal of Image and Graphics A*, 2003, 8(5): 516-521.
- [12] 韩春明, 郭华东, 王长林, 等. 一种改进的 SAR 图像斑点噪声滤波方法[J]. *遥感学报*, 2004, 8(2): 121-127.
Han Chunming, Guo Huadong, Wang Changlin, et al. *Journal of Remote Sensing*, 2004, 8(2): 121-127.
- [13] 黄薇. Curvelet 变换及其在图像处理中的应用研究 [D]. 西安: 西安理工大学自动化与信息工程学院, 2007.
Huang Wei. Research on Curvelet transform and its applications on image processing [D]. Xi'an: College of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, 2007.

(责任编辑 赵佳)

·学术动态·



“第十二届全国肝癌学术会议”征文

中国抗癌协会主办的“第十二届全国肝癌学术会议”将于 2009 年 9 月 17-19 日在沈阳市召开。

此次会议的征文内容包括:肝癌的基础和临床研究,包括病因学、流行病学、病理、诊断与治疗等方面的原创性研究。注意,已经发表的论文和综述不在征文范围内。

征文截稿日期:2009 年 07 月 31 日。稿件接收信箱: livercongress@zs-hospital.sh.cn。

联系方式:中国医科大学附属盛京医院肝胆外科戴朝六,电话:024-83955232,024-83955220;复旦大学肝癌研究所熊万霞,电话:021-64041990-2936;复旦大学肝癌研究所任正刚,电话:021-64041990-2149。