

求解大型线性稀疏方程组改进的中心线法

杜红^{1,2}, 母丽华^{1,2}, 沈继红¹

1. 哈尔滨工程大学数学系, 哈尔滨, 150001

2. 黑龙江科技学院数力系, 哈尔滨, 150027

摘要 求解线性方程组问题本是一个非常古老的数学问题, 已进行了大量的研究, 但随着科学技术的发展, 求解问题的系数矩阵的规模变得越来越大, 求解大规模稀疏矩阵的线性方程组问题已经成为科学计算中的最重要的问题之一。求解大型线性稀疏方程组的中心线法于 1986 年提出, 文献[7]对其进行了部分改进, 本文通过改进文献[7]中偏离中心线的偏离度, 重新定义中心线向量, 提出了一种与初始向量的选取无关的大范围收敛的迭代算法。与文献[7]的算法比较, 本文提出的算法具有大范围收敛、计算量小、精度高的优点。

关键词 中心线法; 稀疏方程组; 大范围收敛

中图分类号 O241.6

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2009)13-0088-04

Improved Center-Line Method for Large Linear Sparse Equations

DU Hong^{1,2}, MU Lihua^{1,2}, SHEN Jihong¹

1. Department of Mathematics, Harbin Engineering University, Harbin, 150001, China

2. Department of Mathematics and Mechanics, Heilongjiang Institute of Science and Technology, Harbin, 150027, China

Abstract A Center-line method for solving large linear sparse equations was proposed in 1986. In Reference [7], the method was improved partially, with convergent proofs of the algorithms and numerical experiment results. In this paper, based on an improved deviation and the redefinition of the center-line vectors, a large-range convergent iterative algorithm is proposed, which is independent of the choice of initial vectors. Compared with the algorithms in Reference [7], the algorithms given in the paper enjoy large-range convergence, small calculation amounts and high precisions.

Keywords center-line method; sparse equations; large-range convergence

0 引言

在一些大规模科学计算中线性方程组求解是一个主要

部分, 如电力系统最优潮流的计算。一般说来, 大规模问题的系数矩阵具有某些稀疏的结构称为大规模稀疏问题。对于求解大规模稀疏线性方程组通常有直接法和迭代法。例如: LU 分解法^[1-3], 投影算法^[4-5], ART 算法^[6], 中心线法^[7]等。

求解大型线性稀疏方程组的中心线法是熊西文教授于 1986 年提出的, 文献[7]对其做了部分改进, 并给出了算法的收敛性证明和部分数值实验的结果。本文针对文献[7]中提出的偏离中心线的偏离度进行了修正, 重新定义了中心线向量, 得到了一种大范围收敛的迭代算法, 大范围收敛即迭代法与初始向量的选取无关。在本文最后, 给出了数值实验, 并与文献[7]中的数值算例进行了比较, 结果表明, 本文提出的算法不仅使迭代法与初始向量的选取无关, 还具有计算量小、精度高的优点。

1 改进的中心线法

设线性方程组

$$Ax=b \quad (1)$$

其中, $A \in R^{m \times n}$ 为实非奇异方阵, $b \in R^n$, $x_0 \in R^n$ 分别是方程组得右端向量和初始迭代向量。若记

$$A^T = [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (2)$$

其中, $a_k^T (k=1, 2, \dots, n)$ 是 A 的第 k 个行向量。当 $\|a_k\| = 1$ 时

$$d_k(x_0) = a_k^T x_0 - b_k \quad (3)$$

将是点 x_0 到平面 $\prod_k a_k^T x - b_k = 0$ 的距离。这里 $\|\cdot\|$ 为向量的 2-范数。

收稿日期: 2009-05-11

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(11531324, 11541323)

作者简介: 杜红, 副教授, 研究方向为再生核空间理论、数值逼近, 电子信箱: du_hong163@163.com

定义 1 设 x^* 是方程组(1)的精确解, $\bar{x}, \tau \in R^n, t, d \in R$, 如果

$$a_k^T \tau = d \quad (4)$$

则称 τ 是中心线向量, 如果

$$\bar{x} = x^* + t\tau \quad (5)$$

则称 $\bar{x}$ 是中心线。

当 $\bar{x}$ 是中心线上的点时, 有

$$A\bar{x} = Ax^* + tA\tau = b + tA\tau = b + tde \quad (6)$$

其中, $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ 。记 $d = t\bar{d}$, 比较式(4)和(6)可知, 求中心线向量 τ 的过程不过是求 $\bar{x}$ 的过程中令 $b=0$ 的特殊情况。下面, 本文将给出求 $\bar{x}$ 的迭代过程。

任取初始向量 x_0 , 记

$$d_k(x) = a_k^T x - b_k, \quad s(x) = \sum_{k=1}^n d_k^2(x) \quad (7)$$

设 $x = x_0 + t\tau$, 于是

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{k=1}^n d_k^2(x) = \sum_{k=1}^n (a_k^T x - b_k)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k^T x_0 + t a_k^T \tau - b_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k^T x_0 - b_k)^2 + 2t \sum_{k=1}^n (a_k^T x_0 - b_k) a_k^T \tau + t^2 \sum_{k=1}^n (a_k^T \tau)^2 \\ &= s(x_0) + 2t \sum_{k=1}^n (a_k^T x_0 - b_k) a_k^T \tau + t^2 \sum_{k=1}^n (a_k^T \tau)^2 \end{aligned}$$

取 $s(x)$ 在点 x_0 处的最速下降方向 $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0}$, 得到

$$\tau_0 = \sum_{k=1}^n (a_k^T x_0 - b_k) a_k \quad (8)$$

使得 $s(x)$ 达到最小。

令

$$\begin{aligned} \frac{ds(x)}{dt} &= 2 \sum_{k=1}^n (a_k^T x_0 - b_k) a_k^T \tau_0 + 2t \sum_{k=1}^n (a_k^T \tau_0)^2 \\ &= 2 \|\tau_0\|^2 + 2t \sum_{k=1}^n (a_k^T \tau_0)^2 = 0 \end{aligned}$$

解得

$$t_0 = -\|\tau_0\|^{-2} \sum_{k=1}^n (a_k^T \tau_0)^2 \quad (9)$$

记 $x_1 = x_0 + t_0 \tau_0$ 。这样, 重复上面的过程可得到迭代序列

$$x_i = x_{i-1} + t_{i-1} \tau_{i-1} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (10)$$

定理 1 设 x_0 为任选的初始向量, x^* 是方程组(1)的精确解, 则由式(10)得到的迭代序列 $\{x_i\}$ 收敛到方程(1)的解 x^* 。

证明: 设 x_0 为任选的初始向量, 序列 $\{x_i\}$ 是由式(10)得到的, 欲证 $x_i \rightarrow x^*$, 只需证明当 $k \rightarrow \infty$ 时, $d_k(x_i) \rightarrow 0$, 或 $s(x_i) \rightarrow 0$ 。

由迭代序列的构造过程, 易得

$$\begin{aligned} s(x_i) &= s(x_{i-1}) + 2t_{i-1} \sum_{k=1}^n (a_k^T x_{i-1} - b_k) a_k^T \tau_{i-1} + t_{i-1}^2 \sum_{k=1}^n (a_k^T \tau_{i-1})^2 \\ &= s(x_{i-1}) - \|\tau_{i-1}\|^4 \sum_{k=1}^n (a_k^T \tau_{i-1})^2 \end{aligned}$$

显然有

$$s(x_i) < s(x_{i-1})$$

令

$$\tau_{i-1} = \sum_{k=1}^n (a_k^T x_{i-1} - b_k) a_k$$

记 $\bar{\tau}_{i-1} = \tau_{i-1} / \|\tau_{i-1}\|$, 则 $\|\bar{\tau}_{i-1}\| = 1$, 设

$$\gamma_{i-1} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

其中

$$\gamma_k = d_k(x_{i-1}) / \sqrt{\sum_{k=1}^n (d_k(x_{i-1}))^2} = d_k(x_{i-1}) / \sqrt{s(x_{i-1})}$$

于是 $\|\gamma_{i-1}\| = 1$,

$$\begin{aligned} s(x_i) &= s(x_{i-1}) - \|\tau_{i-1}\|^4 \sum_{k=1}^n (a_k^T \tau_{i-1})^2 \\ &= s(x_{i-1}) - \|\tau_{i-1}\|^2 \sum_{k=1}^n \left(a_k^T \frac{\tau_{i-1}}{\|\tau_{i-1}\|} \right)^2 \\ &= s(x_{i-1}) \left[1 - \frac{\|\tau_{i-1}\|^2 / \sqrt{s(x_{i-1})}}{\sum_{k=1}^n (a_k^T \bar{\tau}_{i-1})^2} \right] \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \|\tau_{i-1} / \sqrt{s(x_{i-1})}\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^n a_k \frac{d_k(x_{i-1})}{\sqrt{s(x_{i-1})}} \right\|^2 = \|A^T \gamma_{i-1}\|^2 \\ &= \gamma_{i-1}^T A A^T \gamma_{i-1} \geq \min_{\|x\|=1} x^T A A^T x = \lambda_{\min}(A A^T) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k^T \bar{\tau}_{i-1})^2 = \|A \bar{\tau}_{i-1}\|^2 = \bar{\tau}_{i-1}^T A^T A \bar{\tau}_{i-1} \leq \max_{\|x\|=1} x^T A^T A x = \lambda_{\max}(A^T A)$$

所以

$$s(x_i) \leq s(x_{i-1}) \left[1 - \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right] = s(x_{i-1}) \mu \quad 0 \leq \mu < 1$$

从而

$$s(x_i) \leq s(x_{i-1}) \mu \leq s(x_{i-2}) \mu^2 \leq \dots \leq s(x_0) \mu^i$$

故 $s(x_i) \rightarrow 0$ 。

2 算法及数值实验

根据上面的理论推导, 由文献[1]中给出的算法, 本文给出求方程组(1)相应的算法 1, 并且将算法 1 改进得到算法 2, 下面给出本文的迭代算法及数值算例。

算法 1

步骤 1 计算中心线向量 τ 。

1) 取初始向量 $\tau_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$, 计算 $d_k(\tau_{i-1}) = a_k^T \tau_{i-1}$ 及 $s(\tau_{i-1}) =$

$$\sum_{k=1}^n d_k^2(\tau_{i-1}), \quad i=1, 2, \dots, n;$$

2) 令 $\alpha_{i-1} = \sum_{k=1}^n (a_k^T \tau_{i-1}) a_k$, 计算 $s_1 = \|\alpha_{i-1}\|^2$ 及 $s_2 = \sum_{k=1}^n (a_k^T \alpha_{i-1})^2$;

3) 令 $t_{i-1} = -s_1 / s_2$, 得到 $\tau_i = \tau_{i-1} + t_{i-1} \alpha_{i-1}$ 。

利用 $\sqrt{s(\tau_{i-1})/n} \leq EPS$ 控制迭代, 得到一个相对稳定的值, 作为 τ 。

3 结论

本文通过改进文献[7]中偏离中心线的偏离度,得到了一种改进的中心线算法,并给出了该方法的理论分析。通过上面的数值实验结果表明,本文提出的改进算法有利于求解大型稀疏矩阵的线性方程组,并具有以下优点:

1) 由表 1 文献[7]中给出的算法与本文算法 1 的对比结果可以看出,本文提出的算法在计算中心线向量 τ 和近似解 $\bar{x}$ 的内循环次数要比文献[7]的算法的循环次数要少,而且计算精度更高。表 1 中的平均剩余量的对比,更加说明本文算法 1 的优越性。

2) 从表 2 来看,本文给出的两种迭代算法与初始向量的选取无关,属于大范围收敛的迭代算法。另外,本文给出的算法 2 要比算法 1 的循环次数少,精度高,平均剩余量的对比也说明算法 2 优越于算法 1。事实上,在计算中,可直接采用算法 2 来计算方程组的近似解,即可达到很好的效果。

参考文献 (References)

- [1] Chen Z, Deng N Y. Some algorithms for the convex quadratic programming problem via the ABS approach [J]. *Optimization Methods and Software*, 1997, 8(2): 157-170.

- [2] 高旅端, 杨中华. 一个求解二次规划的算法 [J]. 北京工业大学学报, 1999, 25(4): 29-34.
Gao Lvduan, Yang Zhonghua. *Journal of Beijing Polytechnic University*, 1999, 25(4): 29-34.
- [3] 陈志, 高旅端. 求解大规模稀疏线性方程组得算法 [J]. 北京工业大学学报, 2001, 27(3): 262-265.
Chen Zhi, Gao Lvduan. *Journal of Beijing Polytechnic University*, 2001, 27(3): 262-265.
- [4] 顾阿伦, 孙永广, 鲁红. 求解线性方程组的投影算法 [J]. 科技导报, 2006, 24(7): 41-43.
Gu Alun, Sun Yongguang, Lu Hong. *Science & Technology Review*, 2006, 24(7): 41-43.
- [5] 张艺. 线性方程组求解的一个迭代算法[J]. 宁波大学学报, 2001, 14(1): 51-55.
Zhang Yi. *Journal of NingBo University*, 2001, 14(1): 51-55.
- [6] 张志海, 杨建辉. 求解线性方程组的一种迭代方法——ART 算法的一种改进[J]. CT 理论与应用研究, 1994, 3(4): 20-23.
Zhang Zhihai, Yang Jianhui. *CT Theory and Applications*, 1994, 3(4): 20-23.
- [7] 高望东, 姜家辉, 张勇. 求解大型线性稀疏方程组的中心线法[J]. 工程数学学报, 1997, 14(1): 92-98.
Gao Wangdong, Jiang Jiahui, Zhang Yong. *Journal of Engineering Mathematics*, 1997, 14(1): 92-98.

(责任编辑 杨书卷)

·学术动态·



“2009 年度全国复合材料力学研讨会”征文

为推动我国复合材料力学的发展,中国复合材料学会、中国力学学会定于 2009 年 10 月在长沙市举办“2009 年度全国复合材料力学研讨会”,目的是增进复合材料力学相关领域专家学者之间的沟通与了解,促进高等学校、科研院所及企业之间的交流与合作,从而推动中国复合材料力学的发展并实现研究成果的产业化。会议现征集复合材料力学领域的最新研究成果,特别是反映具有创新性成果的高水平论文,并将优秀论文将推荐至《复合材料学报》、《固体力学学报》发表。论文截稿日期:2009 年 7 月 31 日。

联系方式:湖南长沙湖南大学机械与运载工程学院 (410082) 刘桂萍, 韩旭; 电话:13874895646; 电子邮箱:ji_pi@126.com。

·学术动态·



“第 16 届引信学术年会”征文

为迎接 2010 年在北京举办的“第 25 届国际弹道会议”召开,中国兵工学会、引信动态特性国防科技重点实验室联合拟定于 2009 年 10 月召开“第 16 届引信学术年会”,会议正在征文。

征文范围包括:引信技术发展战略思考,引信技术创新体制和创新机制的讨论,满足现代信息化战争的引信技术需求,引信技术在科研开发、生产和工艺等方面的创新,以及介绍国内外引信技术、相关探测与控制精确毁伤等技术领域的学术论文。征文截止时间为 2009 年 8 月 1 日。

会议论文联系方式:张小兵(南京理工大学),电话:025-84316851,传真:025-84316851; 电子邮箱:xiaobingzhang@ISB2010.com。

通信方式:西安 121 信箱五部(710065) 刘云; 电话:13659266136, 029-88156300, 88156204; 电子邮箱:tcygz@263.net。