

# 拉德任斯卡娅: 20 世纪俄罗斯最伟大的女数学物理学家

程小红

首都师范大学初等教育学院, 北京 100048

**摘要** 拉德任斯卡娅(1922—2004年)是20世纪俄罗斯最著名的女数学物理学家之一,对偏微分方程的重要领域都做出了卓越贡献,尤其在双曲型、椭圆型、抛物型偏微分方程、纳维-斯托克斯方程以及吸引子理论方面更为突出,为俄罗斯科技强国做出了突出贡献。通过阐述她的人生经历、学术成就和深刻影响,展示了其献身科学的人生观、追求科学的卓越精神及推动科学进步的驱动力。

**关键词** 拉德任斯卡娅;偏微分方程;流体力学;吸引子理论

原本预定2022年7月6—14日在俄罗斯圣彼得堡举行的第29届国际数学家大会,由于受俄乌局势影响转为了线上举行。值得关注的是,这届国际数学家大会首次设立并颁发了一个新奖项——拉德任斯卡娅数学物理奖,以纪念一位俄罗斯伟大女数学物理学家——奥利加·亚力山德罗芙娜·拉德任斯卡娅(Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya)诞辰100周年及其在数学物理领域做出的卓越贡献(图1)。该奖项奖金为100万卢布,无性别年龄限制,在每届国际数学家大会上都隆重颁发,奖励数学物理领域中有杰出贡献的数学家。首届拉德任斯卡娅奖授予了吉托米尔斯卡娅教授(Svetlana Jitomirskaya),以表彰她对准周期薛定谔算子谱理论



图1 拉德任斯卡娅

的突出贡献。拉德任斯卡娅在偏微分方程及应用领域是一位女性世界级领袖数学物理学家,但其坎坷的人生经历与卓越成就却并不广为人知。

收稿日期:2022-04-19;修回日期:2022-06-11

作者简介:程小红,副教授,研究方向为世界数学史,电子信箱:2491817437@qq.com

引用格式:程小红. 拉德任斯卡娅:20世纪俄罗斯最伟大的女数学物理学家[J]. 科技导报, 2023, 41(17): 58-63; doi: 10.3981/j.issn.1000-7857.

2023.17.007

## 1 生平简介

1922年3月7日,奥利加·亚力山德罗芙娜·拉德任斯卡娅出生在莫斯科东北约300英里处科斯特罗姆(Kostroma)地区的一个偏远小镇科洛里夫(Kologriv)。父亲亚历山大(Alexander Ivanovich Ladyzhensky)是俄罗斯贵族的后裔,在当地一所高中教数学,母亲安娜(Anna Mikhailovna)来自爱沙尼亚,是一位家庭主妇,祖父根纳迪(Gennady Ladyzhensky)是一位画家,拉德任斯卡娅在三姐妹中排行最小。父亲虽只是一名普通高中老师,但对女儿们的教育特别用心,在拉德任斯卡娅8岁时就开始教她们学习数学<sup>[1]</sup>。她天资聪慧,对数学有很强的好奇心,成绩进步神速,很快成为父亲最优秀的学生。不久后,父亲就给她讲授了微积分。尽管她的家乡地处偏僻,但因出身知识分子家庭,她们很早就对外部世界有了更广泛而深刻的文化认知<sup>[2]</sup>。1937年10月,不幸降临到15岁的拉德任斯卡娅家庭,父亲因为政治“大清洗”被内务人民委员部(Narodniy Kommissariat Vnutrennikh Del,简称NKVD,KGB的前身)以“国家的敌人”罪名逮捕,随后未经审判就被枪决。父亲的政治风波使整个家庭陷入长达20多年的困难境地,只能依靠母亲和姐妹做手工,制作衣服、鞋子、肥皂等生活用品勉强度日。直到1956年,父亲的冤案才因“缺乏犯罪证据”而被正式宣布无罪,此时拉德任斯卡娅已经34岁了。

1939年,拉德任斯卡娅以优异成绩从科洛里夫高中毕业,前往列宁格勒(即圣彼得堡)继续求学。然而,父亲的罪名让成绩优异的她被禁止进入已经考取的当时苏联最好的大学——列宁格勒国立大学(即圣彼得堡国立大学)<sup>[1]</sup>。她不得不在一所二流的波克罗夫斯基教育学院(Pokrovskii Pedagogical Institute)学习了2年,后来由于二战,她又被迫离开列宁格勒。1941年秋天,她来到戈罗德(Gorodets)镇上一家孤儿院教书,次年春天又搬回家乡,接替父亲的职位。她不仅在学校担任数学教师,而且还在家中对数学感兴趣的学生进行免费的辅导。

1943年,拉德任斯卡娅终于苦尽甘来,她的事迹感动了一位学生家长,在这位学生家长热心帮助下重回莫斯科,并说服莫斯科国立大学校长,使其成为数学力学系的一名新生。在那里,她获得了斯大林助学金和劳工配给卡。如果没有这些她将无法生存下去。此时,拉德任斯卡娅的数学才能终于有了用武之地。最初,她研究代数、数论,后来转向偏微分方程,数学家彼得罗夫斯基(Ivan Georgievich Petrovsky)、希尔伯特(David Hilbert)与柯朗(Richard Courant)的经典名著《数学物理方法II》(Methods of Mathematical Physics II)对其影响颇深<sup>[1]</sup>。彼得罗夫斯基主要从事偏微分方程研究,对希尔伯特第19和第16问题做出过重大贡献。当时莫斯科国立大学的各种数学讨论班非常普遍,拉德任斯卡娅是这些研讨班的活跃分子,尤其受数学家斯捷潘诺夫(Vyacheslav Stepanov)、彼得罗夫斯基、吉洪诺夫(Andrei Tikhonov)和维夸(Ilya Vekua)组织的微分方程研讨班,以及泛函分析大师盖尔范德(Israel Gelfand)组织的分析讨论班的影响最深。在此环境熏陶下,拉德任斯卡娅在大学四年级时亲自组织了一个偏微分方程理论青年研讨班,并说服彼得罗夫斯基的一位学生梅什基斯(Myshkis)和她一起去特邀彼得罗夫斯基主持一次研讨会。彼得罗夫斯基不仅主持了这次研讨会,后来还邀请他的朋友与同事参加了拉德任斯卡娅组织的全年研讨班,并对相关问题进行解答和提出一些建设性意见。

1947年,拉德任斯卡娅从莫斯科国立大学毕业,随后与其同学安基谢列夫(Andrei Kiselev)结婚,并随丈夫再次移居列宁格勒,凭着莫斯科国立大学的强力推荐如愿以偿地成为圣彼得堡国立大学数学力学系的一名研究生,师从数学家索伯列夫(Sergei Sobolev)和斯米尔诺夫(Vladimir Smirnov),从此她的数学事业开始步入正轨。索伯列夫是数学分析和偏微分方程领域的大师,长期组织数学物理方程边值问题研讨班,奥尔加是骨干成员,后来成为组织者直至去世。斯米尔诺夫是地震学、流体动力学和空气动力学方面的专家,后来拉德任斯卡娅与其在流体动力学方面一直保持着合作关系<sup>[3]</sup>。

1949年,拉德任斯卡娅取得博士学位后留在数学力学系任教,次年转到物理系当讲师,1954年晋升为副教授,1956年晋升为正教授。此后的几十年她在偏微分方程和流体力学等领域都做出了一系列创造性贡献。由于拉德任斯卡娅年轻时就立志把自己的一生奉献给数学,为此她决定不要小孩,她觉得孩子可能会成为障碍。她的这种想法与丈夫发生了严重分歧,最终导致婚姻破裂。她此后终生未嫁,也没有留下任何子女,把自己的一生都奉献给了热爱的数学事业。

由于语言文化和政治体制等一系列复杂原因,拉德任斯卡娅直到晚年才被允许出国参加学术会议。1958年,英国爱丁堡的国际数学家大会是她第1次出国,会上被提名为菲尔兹奖,但未能成为第1位获奖的女数学家,这不能不说是数学史上的一件憾事,而她下一次出国则是30年之后的事了。拉德任斯卡娅晚年与欧拉相似,遭受严重的眼疾困扰,需要用特制带光铅笔才能看清楚自己写的字。2004年初,她计划去美国佛罗里达州参加一个学术会议,为此准备了一篇水力学分析论文。可就在启程前两天,她在圣彼得堡家里在睡梦中安然辞世,享年82岁<sup>[4]</sup>。

## 2 学术成就

拉德任斯卡娅一生著述颇丰,硕果累累,共发表250多篇论文,出版7部著作和1部教材,她对偏微分方程研究涉及很多重要领域,与自己的老师和学生一起为偏微分方程的发展做出了奠基性贡献,成为国际数学界一支非常重要的力量。她的数学成就主要表现在以下方面。

### 2.1 有限差分法与双曲型偏微分方程

拉德任斯卡娅在双曲型偏微分方程方面的研究始于攻读博士期间,在1949年完成的博士毕业论文中,她发展了线性和拟线性双曲偏微分方程组的有限差分算法,在索伯列夫空间网格上周期函数作傅里叶展开的差分模拟,并通过逼近误差估计证明了算法在网格步长趋于零时的收敛性;她把有限差分法推广到其他不同类型的双曲型偏微分方

程,证明了包括时变系数情形双曲偏微分方程的稳定性;她还对彼得罗夫斯基关于拟线性双曲型偏微分方程组的Cauchy问题局部唯一解的存在性给出了一个全新的简化证明。

拉德任斯卡娅博士毕业后继续研究二阶线性双曲型偏微分方程的初边值问题。她清晰地论证了傅里叶方法,详尽研究了一般对称二阶椭圆型偏微分方程,在索伯列夫空间的有界域上以本征函数作级数展开,进而找到了用狄利克雷(Lejeune Dirichlet)边界条件描述椭圆型偏微分方程闭包域问题的方法,这种方法以她名字命名的“拉德任斯卡娅不等式”为理论基础<sup>[5]</sup>。她的这一成果对包括谱论在内的偏微分方程有重要影响,使初边值问题的弱解成为数学物理的重要概念,她在索伯列夫空间中各种偏微分方程初边值问题的弱解思想、理论和方法构成了数学物理方程数值算法的最重要理论基础。此外,她于1951年完成的特许任教资格(Habilitation)论文中,研究了一般二阶双曲型偏微分方程混合边值问题解的正则性问题,给出了这类方程的解是经典解的严格精确条件,论证了傅里叶方法用于双曲型方程求解的可行性,以及拉普拉斯变换方法在这类方程中的应用。1953年,她出版的第1本俄文专著《双曲方程的混合问题》(《The mixed problem for a hyperbolic equation》)总结了上述成果<sup>[6]</sup>。

### 2.2 椭圆型和抛物型拟线性偏微分方程

拉德任斯卡娅长期从事线性和拟线性椭圆型、抛物型偏微分方程解的存在性与唯一性方面的研究,她在这方面取得的一系列重大研究成果基本都是与合作者一起完成的。1964年,她与学生乌拉尔茨娃(Nina Ural'tseva)出版了著作《线性和拟线性椭圆型方程》(《Linear and quasilinear equations elliptic equations》)<sup>[7]</sup>;1967年,她与乌拉尔茨娃、索隆尼科夫(Vsevolod Solonnikov)这两个学生合作出版了著作《线性和拟线性抛物型方程》(《Linear and quasilinear equations of parabolic type》)<sup>[8]</sup>。这两部著作给出了完备的散度形式的拟线性方程理论,特别是解决了在自然增长约束下经典边值问题的全局可解性,它们也是如今像《偏微分方程》相关

教科书中的标准内容。特别地,她们证明了在自然增长约束下,高维变分弱极值的正则性完全由被积函数光滑性所决定,这个结论从某种意义上结束了有关二阶方程的希尔伯特第19与20问题的研究。另外,她们还研究了几类具有对角主成分和平方梯度的拟线性方程组,证明了标量散度方程组的性质,为后来研究流形调和映射提供了新方向。2005年,阿贝尔奖得主、美国数学家拉克斯(Peter Lax)评价这两本著作“包含了许多关于椭圆型和抛物型方程解的估计的深刻结果。作者极大地推广了伯恩斯坦(Sergei Bernstein)的思想和乔治(Ennio De Giorgi)、莫泽(Jurgen Moser)及纳什(John Nash)的技巧,这些书是该领域内基本知识的源泉”<sup>[1]</sup>。

拉德任斯卡娅还给出了一大类非一致椭圆算子(如平均曲率算子)方程解的一系列重要研究成果,与伊沃基娜(Nina Ivochkina)在几何方面合作也颇有建树,在1994—1997年,她们发表了一系列关于抛物型非线性方程第1个初始边值问题的整体经典可解性重要成果,这些方程描述的是由未知曲面的Hessian对称函数或其主曲率产生的流。

### 2.3 流体力学与纳维-斯托克斯方程

拉德任斯卡娅是现代数学流体力学理论的创始人之一,其中对弹性力学方程、薛定谔(Schrödinger)方程、线性化纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程和麦克斯韦(Maxwell)方程的研究颇有建树,尤其是对纳维-斯托克斯方程特别痴迷,并发表了一系列重要成果。纳维-斯托克斯方程因1921年物理学家纳维(Claude Louis Navier)和1945年斯托克斯(Sir George Stokes)分别推导出而得名,美国克雷数学研究所在2000年5月24日将其列为千禧年百万美元奖七大数学难题之一。问题描述为:在三维的空间及时间下,给定一起始的速度场,存在一向量的速度场及纯量的压强场,为纳维-斯托克斯方程式的解,其中速度场及压强场需满足光滑及全局定义的特性。科学家们希望可以找出纳维-斯托克斯方程的通解,也就是证明方程的解总是存在的。一组用数学理论阐明都困难的方程,还需要去证明这个方程的解总是存在,这让许多科学家为之烧脑,被称为最难的数学物理公

式。20世纪50年代中期,拉德任斯卡娅从二维平稳斯托克斯方程开始研究,取得了一系列研究成果。1958年,她在《苏联科学院学报》上发表了一篇非常重要的论文,证明了二维纳维-斯托克斯方程初边值问题的全局唯一可解性<sup>[9]</sup>。同时,她还给出了纳维-斯托克斯方程的数值解法和算法收敛性证明。拉德任斯卡娅的工作在流体力学领域引出了许多有意义的新课题,这些主要成果都总结在她于1961年出版的专著《粘性不可压缩流的数学理论》(《The mathematical theory of viscous incompressible flow》)中,此书后来成为该领域的经典<sup>[10]</sup>。

研究三维纳维-斯托克斯方程是十分困难的,这也是如今的七大千禧数学难题之一。对此难题,拉德任斯卡娅于1967年证明了它在Leray-Hopf意义下的弱解唯一性条件及正则性性质。此结论为寻找合适泛函类,使纳维-斯托克斯方程初值问题具有全局唯一可解性奠定了重要基础。此外,她还对三维纳维-斯托克斯方程的速度场作了些修改,并准许它在一些区域内有较大波动。这个修改后的方程后来被称作“拉德任斯卡娅方程”。她证明了这个方程的全局唯一可解性,并于1966年莫斯科世界数学家大会上,应邀报告了这个“漂亮”结果。

由于三维非平稳纳维尔-斯托克斯这类方程实在太难,其研究进展自拉德任斯卡娅之后几乎停滞不前。直到2015年,美籍华人陶哲轩发表了一篇关于三维纳维-斯托克斯方程的论文,其主要目的是将纳维-斯托克斯方程全局正则性问题的超临界状态屏障形式化。简单地说,就是抽象地建立纳维-斯托克斯方程的全局正则性是不可能的,为此构造了一个类似于纳维-斯托克斯方程,但不是原先的纳维-斯托克斯方程的一个反例<sup>[11]</sup>。

### 2.4 偏微分方程的吸引子理论

拉德任斯卡娅在研究二维纳维-斯托克斯方程初边值问题时导出了半群概念。她证明解算子在相空间中对应于每个固定时刻都是个紧算子。她对无限维相空间取了一个交集,证明了此交集是非空、紧的,是吸引相空间的任何有界子集。她把交集称为全局最小吸引子。她发现这个交集有许多有趣性质,譬如某些不变性和有限维性,时

间向负方向的可逆性,特别是抛物型耗散问题,开辟了偏微分方程理论的一个新方向,即大范围稳定性理论以及偏微分方程吸引子理论。她建立了算子半群和二维纳维-斯托克斯方程的联系并给出了吸引子 Hausdorff 维数和分数维数的精确估计。这些成果总结在她于 1991 年出版的专著《半群的吸引子和演化方程》(《Attractors for semi-groups and evolution equations》)中<sup>[12]</sup>。

### 3 深刻影响

拉德任斯卡娅是现代偏微分方程理论的奠基人,与她的老师和学生一起开创了属于自己的偏微分方程学派,成为国际数学界中一支重要而强大的力量。她是一位真正的数学大师,不仅能解决数学问题,而且还能提出新的问题和方法。她提出了广为人知的广义解、弱解和广义模拟等基本概念,微分算子谱理论、衍射理论、双曲型方程傅里叶级数收敛性及解的有限差分方法估计等,还有一些开创性成果与她的名字息息相关。她与合作者在拟线性椭圆和抛物型方程边值问题方面取得了重要进展发展了一大类二阶抛物和椭圆拟线性方程边值问题解的正则性理论,由此完成了希尔伯特著名的第 19 个和第 20 个问题的求解<sup>[8]</sup>。

拉德任斯卡娅也是现代流体力学理论的创始人。她 1961 年出版的专著《粘性不可压缩流的数学理论》是该领域的必读经典之作,现已被翻译成多国语言。她主要“偏好”流体力学的偏微分方程,特别是纳维-斯托克斯方程。她是第 1 位证明二维纳维-斯托克斯方程初边值问题的全局唯一可解性的人。她还给出了一系列三维情形下解的唯一性定理,是最接近解决这一千禧数学难题的人。直到现在,三维情形下的全局可解性仍然是一个开放的待解问题。拉德任斯卡娅还在二维纳维-斯托克斯方程系统中引入了吸引子的概念,并证明了其存在性,由此开启了演化偏微分方程理论即大范围稳定性理论的新篇章。

拉德任斯卡娅在自己做出突出贡献的同时,也非常注重青年人的培养和学术组织发展。她天生

就有一种感召力,讲课思路清晰、精湛,内容娴熟、通俗易懂。她乐于帮助初学者,善于慧眼识珍珠,讨论他们感兴趣的问题。1947 年起,她与苏联科学院院士斯米尔诺夫组织的每周一次数学物理研讨会一直延续到现在,与会者包括许多有名数学家。她一直领导着这个研讨会,直到她生命的最后几天,由此培养了一大批非常杰出的科学家,如乌拉尔茨娃、索隆尼科夫等,这些科学家现在是圣彼得堡国立大学乃至世界数学物理学学术界的荣耀与脊梁。

正像国际数学联盟设立拉德任斯卡娅数学物理奖缘由描绘的那样:“奥利加·亚力山德罗芙娜·拉德任斯卡娅在俄罗斯圣彼得堡和世界数学和数学物理学史上都占有非常重要地位,她奠定了数学物理中偏微分方程现代理论的基础。她通过讲座、研讨会及学生,激发了数学物理的很多其他分支,包括量子场论和统计物理的非凡进步。”

### 参考文献 (References)

- [1] Dumbaugh D, Daskalopoulos P, Vershik A, et al. The ties that bind Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya and the 2022 ICM in St. Petersburg[J]. Notices of the American Mathematical Society, 2020, 67(3): 373-381.
- [2] Friedlander S, Lax P, Morawetz C, et al. Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922-2004)[J]. Notices of the American Mathematical Society, 2004, 51(11): 1320-1331.
- [3] Friedlander S, Keyfitz B L. Olga Ladyzhenskaya and Olga Oleinik: Two great women mathematicians of the 20th century[EB/OL]. [2022-04-02]. <https://www.researchgate.net/publication/2418710119.2004-02-01>.
- [4] Arnol'd V I, Birman M S, Vershik A M, et al. Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya[J]. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 2004, 59(3): 151-152.
- [5] Ladyzhenskaya O A. Closedness of elliptic operator[J]. Doklady Akademii Nauk, 1951, 79(5): 723-725.
- [6] Ladyzhenskaya O A. The mixed problem for a hyperbolic equation[M]. Moscow: Gostekhizdat, 1953: 25-53.
- [7] Ladyzhenskaya O A, Ural'tseva N N. Linear and quasilinear elliptic equations[M]. Moscow: Nauka, 1964: 1-38.
- [8] Ladyzhenskaya O A, Solonnikov V A, Ural'tseva N N. Linear and quasilinear equations of parabolic type[M].

- Moscow: Nauka, 1967: 6–15.
- [9] Ladyzhenskaya O A. Solution "in the large" of boundary value problems for the Navier–Stokes equations in two space variables[J]. Doklady Akademii Nauk, 1958, 123 (3): 427–429.
- [10] Ladyzhenskaya O A. The mathematical theory of viscous incompressible flow[M]. Moscow: Fizmatgiz, 1961: 15–24.
- [11] Tao T. Finite time blowup for an averaged three-dimensional navier–stokes equation[J]. Journal of the American Mathematical Society, 2016, 29: 601–674.
- [12] Ladyzhenskaya O A. Attractors for semigroups and evolution equations[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991: 1–18.

## Ladyzhenskaya: The most great female mathematical physicist of Russia in the twentieth century

CHENG Xiaohong

College of Elementary Education, Capital Normal University, Beijing 100048, China

**Abstract** Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya was one of the most outstanding female mathematical physicists in Russia in the twentieth century, she made outstanding contributions to the field of partial differential equations, especially in hyperbolic, elliptic, parabolic partial differential equations, Navier–Stokes equations, and attractor theory. Her outstanding contributions also made Russia become a scientific and technological power. By explaining her life experience, academic achievements and profound influences, this paper demonstrates her scientific outlook on life, pursuit of scientific excellence and the driving force to promote scientific progress.

**Keywords** Ladyzhenskaya; partial differential equation; hydrodynamics; attractor theory ●



(责任编辑 王丽娜)