

# 基于 DPSS 的高噪声条件下混合 LFM 波形提取方法设计

侯长满<sup>1</sup>, 余彪<sup>2</sup>, 陈远航<sup>3</sup>

1. 中国人民解放军92493部队2分队, 葫芦岛 125000
2. 中国人民解放军92493部队12分队, 葫芦岛 125000
3. 北京航天控制仪器研究所, 北京 100854

**摘要** 随着电磁对抗与反对抗技术的不断发展, 低截获概率信号应用越来越广泛。传统的信号提取方法对低截获信号波形的提取已经无法满足用户使用需求。基于椭圆基序列(discrete prolate spheroidal sequence, DPSS)构建时间窗函数对混合线性调频信号(multiple linear frequency modulation)进行分析, 提出了恒门限判定概率捕获信号方法, 并采用自适应二值化以及改进的霍夫变换(Hough transform)等图形处理算法完成信号波形的提取。仿真表明, 本方法比短时傅里叶变换算法(short-time Fourier transform)具有更为优秀的噪声控制, 同时在低信噪比下仍能准确提取波形。

**关键词** 椭圆基序列; 霍夫变换; 混合线性调频信号; 短时傅里叶变换

低截获概率信号(low probability of intercept signal, LPI signal)与传统信号相比, 有着更低的瞬时发射功率以及被发现概率<sup>[1]</sup>。线性调频信号(linear frequency modulation, LFM)比传统信号拥有更大的带宽以及更低的瞬时功率, 是被广泛应用的一种低截获概率信号, 这种信号在雷达、通信等领域有着广泛的应用。在低信噪比环境下, 对混合 LFM 信号的提取在电子侦察中有着重要的意义<sup>[2]</sup>。Az-zouzi 等<sup>[3-4]</sup>采用统计特征的方法对低截获波形进行

了早期研究。时频分析(time frequency analysis)方法能有效提高信号的处理增益, 因此被广泛应用于低瞬时功率类的信号处理<sup>[5]</sup>。Chen 等<sup>[6]</sup>采用短时傅里叶变换(short-time Fourier transform, STFT)估计 LFM 参数同时定位雷达坐标。在信噪比低于-8 dB 时, 实验估计正确率在 90% 以上。Hao<sup>[7]</sup>将小波变换(wavelet transform)理论与稀疏时频分析相结合, 系统在 0 dB 下准确提取 LFM 信号。Gao<sup>[8]</sup>采用混沌振荡器将 LFM 信号转化为周期信号, 并用滤波器

收稿日期: 2019-03-01; 修回日期: 2019-07-22

作者简介: 侯长满, 工程师, 研究方向为无线通信、卫星通信, 电子信箱: 15004295899@139.com

引用格式: 侯长满, 余彪, 陈远航. 基于 DPSS 的高噪声条件下混合 LFM 波形提取方法设计[J]. 科技导报, 2019, 37(19): 74-79; doi: 10.3981/j.issn.1000-7857.2019.19.010

阵列实现信号低信噪比的检测和恢复。分数阶傅里叶变换 (fractional Fourier transform, FRFT) 对 LFM 信号也有着很好的提取效果。Wang 等<sup>[9]</sup>采用分数阶傅里叶变换估计 LFM 信号的中心频率与持续时间, 当信噪比为 -9 dB 时, 仍然能达到 90% 以上的恢复正确率。

本研究采用离散椭圆基序列 (discrete prolate spheroidal sequence, DPSS)<sup>[10]</sup> 作为时间窗函数, 进行时频域变换, 并采用自适应二值化处理等方法增加信号处理增益。

## 1 信号模型

本研究将 LFM 信号带宽的中心频率标记为信号的中心频率, 信号的背景噪声为加性高斯白噪声 (additive white Gaussian noise, AWGN)。信号模型由 (1) 式给出:

$$x(nT) = s(nT) + m(nT) = Ae^{j\phi(nT)} + m(nT) \quad (1)$$

其中,  $n$  为整数,  $T$  为采样间隔,  $s(nT)$  为复信号,  $m(nT)$  为复噪声且噪声方差为  $\sigma_e^2$ ,  $A$  为信号幅度,  $\phi(nT)$  为离散相位。

若采样信号为实信号, 则可用希尔伯特变换 (Hilbert transform) 将其转化为复信号<sup>[11]</sup>:

$$y(nT) = x_{\text{real}}(nT) + jH[x_{\text{real}}(nT)] \quad (2)$$

其中,  $y(nT)$  为复信号,  $x_{\text{real}}(nT)$  为实信号,  $[x_{\text{real}}(nT)]$  为希尔伯特变换,  $j$  为虚数符号。

## 2 信号处理

### 2.1 椭圆基序列

椭圆基序列 (DPSS) 于 1978 年被 Slepian<sup>[12]</sup> 提出, 是一种非常高效的带限函数, 被广泛应用在信号处理当中。假设  $N$  为整数, 且定义  $W$ , 满足  $0 < W < 1/2$ , 给定  $N$  和  $W$ , 则基序列是频率严格限制在  $|f| < W$  的  $n$  个离散时间序列的集合, 其中  $n=0, 1, \dots, N-1$ 。定义离散时间的傅里叶变换为:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn} \quad (3)$$

然后, 定义  $Bw$  为取离散时间信号的运算符, 限制 DTFT 的带宽为  $W$ , 并得出其时域信号。此外, 定义  $Tn$  为无限长离散时间信号的运算符, 则对于给定的  $N$  与  $W$ , 基序列表示为离散时间序列  $s_{N,W}^{(0)}, s_{N,W}^{(1)}, \dots, s_{N,W}^{(N-1)}$ , 所对应的特征值的集合, 即

$$1 > \lambda_{N,W}^{(0)} > \lambda_{N,W}^{(1)} > \dots > \lambda_{N,W}^{(N-1)} > 0 \quad (4)$$

且要满足对于任意  $l, l \in [0, 1, \dots, N-1]$ , 有下式成立:

$$Bw\left(Tn\left(s_{N,W}^{(l)}\right)\right) = \lambda_{N,W}^{(l)} s_{N,W}^{(l)} \quad (5)$$

为了描述方便, 将序列  $s_{N,W}^{(r+1)}[n]$  定义为第  $r$  阶的椭圆基序列。

### 2.2 预处理

预处理是将连续的采样信号转化为本文所需要的矩阵信号形式, 便于后续处理。将采样数据整理成为  $N \times Q$  的采样矩阵  $R$ , 采样矩阵纵向连续:

$$R = \begin{bmatrix} x(1) & x(N+1) & \dots & x((Q-1)N+1) \\ x(2) & x(N+2) & \dots & x((Q-1)N+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(N) & x(2N) & \dots & x(QN) \end{bmatrix}_{N \times Q} \quad (6)$$

其中,  $N=512, Q=2N \times W-1, W=1/8$ 。

使用汤姆森多锥度法 (Thompson's multi-taper method) 生成长度为  $N$ , 带宽为  $N \times W$ , 阶数为  $Q$  的椭圆基矩阵  $H^{[13]}$ , 矩阵大小为  $N \times Q$ , DPSS 序列的 1~4 阶波形如图 1 所示。

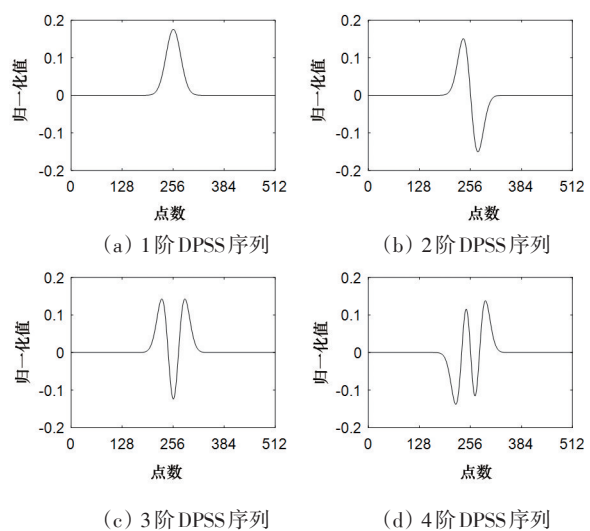


图 1 1~4 阶 DPSS 示意  
Fig. 1 1~4 orders of DPSS

### 2.3 基于 DPSS 的时频变换

基于 DPSS 的时频变换流程如下。

1) 令  $p=0, \dots, N_{\text{FFT}}/2-1$ , 其中  $N_{\text{FFT}}$  是信号的傅里叶变换点数, 在本研究中,  $N_{\text{FFT}}=N=512$ 。为了加快运算速度, 建议采样点数最好为 2 的次幂。令  $J_{q,k}(p \cdot \Delta f)$  表示序列  $\{\sqrt{T_s} \cdot h_{q,n} \cdot r_{n,k}\}$  的第  $p$  点的傅里叶变换。其中,  $\Delta f = F_s / N_{\text{FFT}}$ ,  $F_s$  为采样速率,  $T_s$  为采样间隔时间,  $h_{q,n}$  表示第  $q$  阶第  $n$  点的椭圆基序列数值;  $r_{n,k}$  表示第  $n$  点第  $k$  次的采样数据。

2) 令  $q \in \{0, \dots, Q-1\}$ , 计算  $H_q(0)$

$$H_q(0) = T_s \sum_{n=1}^N h_{q,n} \quad (7)$$

3) 令  $p=0, \dots, N_{\text{FFT}}/2-1$ , 计算  $C(p \cdot \Delta f)$

$$C(p \cdot \Delta f) \equiv \frac{\sum_{q=0}^{Q-1} J_{q,k}(p \cdot \Delta f) H_q(0)}{\sum_{q=0}^{Q-1} H_q^2(0)} \quad (8)$$

4) 对每个  $q \in \{0, \dots, Q-1\}$  以及每个  $p=0, \dots, N_{\text{FFT}}/2-1$ , 计算  $\hat{J}_{q,k}(p \cdot \Delta f)$

$$\hat{J}_{q,k}(p \cdot \Delta f) \equiv C(p \cdot \Delta f) \frac{H_q(0)}{\sqrt{T_s}} \quad (9)$$

5) 令  $p=0, \dots, N_{\text{FFT}}/2-1$ , 计算  $D_k(p \cdot \Delta f)$

$$D_k(p \cdot \Delta f) = \frac{(Q-1) |C(p \cdot \Delta f)|^2 \sum_{q=0}^{Q-1} H_q^2(0)}{T_s \sum_{q=0}^{Q-1} |J_{q,k}(p \cdot \Delta f) - \hat{J}_{q,k}(p \cdot \Delta f)|^2} \quad (10)$$

6) 给定门限判定概率  $P_{\text{FA}}$ , 计算信号判决门限

$$\eta = \frac{(Q-1)(1 - P_{\text{FA}}^{1/(Q-1)})}{P_{\text{FA}}^{1/(Q-1)}} \quad (11)$$

7) 依据判决门限, 搜索  $D_k(p \cdot \Delta f)$ , 将大于门限的值保留, 小于门限的值作为噪声处理。

$$\hat{D}_k(p \cdot \Delta f) = \begin{cases} D_k(p \cdot \Delta f) & \geq \eta \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad (12)$$

经过变换之后, 原始采样点变为二维时频矩阵, 频率间隔  $\Delta f$ , 时间间隔  $NT_s$ 。

## 3 信号增强

LFM 雷达信号在时频域表现为有斜率的直线,

为了更好地将 LFM 信号从高噪声背景下分离出来, 本研究采用图像滤波与霍夫变换联合分析法。

### 3.1 时频矩阵二值化

基于全局阈值方法 (global thresholding algorithm)<sup>[14]</sup> 设计图像滤波方法如下。

1) 归一化时频矩阵  $\hat{D}_k(p \cdot \Delta f)$ 。

$$B_{p,k} = \frac{\hat{D}_k(p \cdot \Delta f) - \min(\hat{D}_k(p \cdot \Delta f))}{\max(\hat{D}_k(p \cdot \Delta f)) - \min(\hat{D}_k(p \cdot \Delta f))} \quad (13)$$

2) 计算全局阈值  $\mu$ , 并将  $\mu \geq$  阈值以及  $\mu <$  阈值的时频点分为 2 个群。

$$\mu = \frac{1}{NQ} \sum_{p,k} B_{p,k} \quad (14)$$

3) 计算 2 个群的平均值, 分别记为  $\mu_1$  和  $\mu_2$ 。

4) 更新全局阈值为二者平均值:  $\mu = (\mu_1 + \mu_2) / 2$ 。

5) 计算更新后的阈值与原阈值的差值  $< 0.001$  则进入下一步, 否则重新执行上述步骤 2) 到 4)。

6) 输出滤波后的图像。

$$\hat{B}_{p,k} = \begin{cases} 1 & B_{p,k} > \mu \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad (15)$$

时频图像滤波之后, 为了更好地寻找 LFM 信号的直线特征, 将时频图像以二值化的形式表示。

### 3.2 信号提取

将二值化后的时频图像采用霍夫变换以及图像形态学方法进一步滤除噪声并尽可能保留信号部分。设计信号提取方法如下。

1) 利用霍夫变换求得二值化图像的霍夫变换矩阵  $H(\theta, \rho)$ 。

$$\rho = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta), \quad x, y \in \hat{B}_{p,k} \quad (16)$$

2) 搜索霍夫变换矩阵  $H(\theta, \rho)$  峰值, 并按照阈值  $\lambda = \Delta\theta / W$  统计峰值个数, 记为  $m$ , 其中  $W=1/8$ ,  $\Delta\theta$  为旋转角度分辨率, 本文取  $\Delta\theta = 1^\circ$ ;  $m$  即为估计的 LFM 波形数量。

3) 依次遍历每个大于阈值的点, 求得对应的霍夫直线, 记为  $l_i, i=1, 2, K, m$ 。

4) 对每一条霍夫直线  $l_i$ , 利用图像膨胀操作 (image morphological dilation operation) 将直线加粗, 操作内核大小为  $3 \times 3$ 。

5) 从  $\hat{D}_k(p \cdot \Delta f)$  提取每一个可能的 LFM 波形, 记为  $L_i(p \cdot \Delta f), i=1, 2, K, m$ , 其中  $e$  为哈达玛积

(Hadamard product)。

$$L_i(p \cdot \Delta f) = \hat{D}_k(p \cdot \Delta f) e^{l_i} \quad (17)$$

至此,混合 LFM 波形被提取为互相独立的时频域表示,降低了波形之间的相互干扰,为准确估计其参数创造条件。

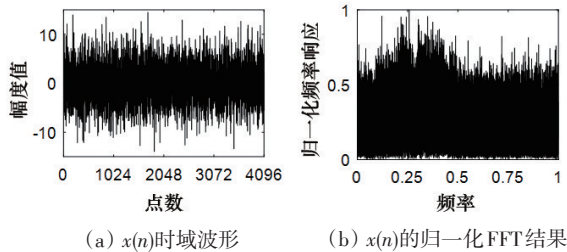
## 4 实验仿真

### 4.1 信号产生

为了验证算法的有效性,使用仿真数据模拟 LFM 信号进行分析,仿真的混合信号如下式所示,采样频率归一化为 1,信噪比为 -20 dB,门限判定概率为  $P_{FA}=10^{-4}$ 。

$$s(t) = 1 \cdot \exp(j2\pi t(0.2 + 0.5 \times 10^{-7}t)) + 1 \cdot \exp(j2\pi t(0.3 + 1 \times 10^{-7}t)) + 1 \cdot \exp(j2\pi t(0.1 + 3 \times 10^{-7}t)) \quad (18)$$

定义信噪比为  $S_{NR} = 10 \log_{10}(\sigma_s^2) / (\sigma_e^2)$ , 其中  $\sigma_s^2$  与  $\sigma_e^2$  分别为信号和噪声的方差。信号的时域波形以及经过快速傅里叶变换的结果如图 2 所示,其中图 2(a)为时域波形,图 2(b)为频域波形。



(a)  $x(n)$ 时域波形 (b)  $x(n)$ 的归一化 FFT 结果

图 2 信号示意图

Fig. 2 Details of signals

### 4.2 时频分布性能对比

计算信号基于 DPSS 的时频分布图像如图 3 所示。图 3 为输入 3 个相同的含有噪声的线性调频信号的仿真结果,其中图 3(a)是二维图像,幅度由亮暗表示,图 3(b)是三维图像,包含幅度维。在时频图像中,3 个 LFM 信号显示清楚,且信号幅度远高于基底噪声。为了更好地说明研究方法的处理效果,实验与短时傅里叶变换对比,在不同的噪声条件下测量时频图像中的基底噪声。

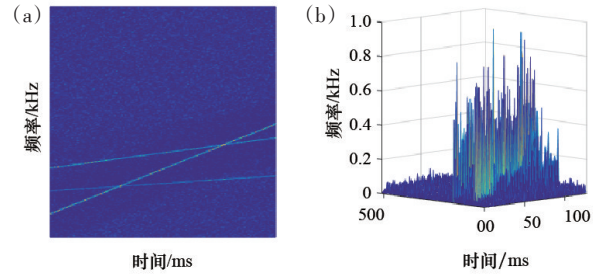


图 3 基于 DPSS 序列的信号时频分布图

Fig. 3 Time frequency distribution of signals based on DPSS

图 4 为相同采样序列的短时傅里叶变换结果,从图 4(a)的颜色及图 4(b)的噪声数值可明显看出,短时傅里叶变换的噪声基底要高于本方法(表 1)。

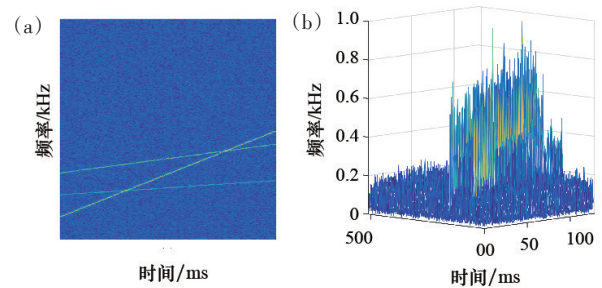


图 4 基于短时傅里叶变换的信号时频分布图

Fig. 4 Time frequency distribution of signals based on STFT

表 1 噪声方差对比

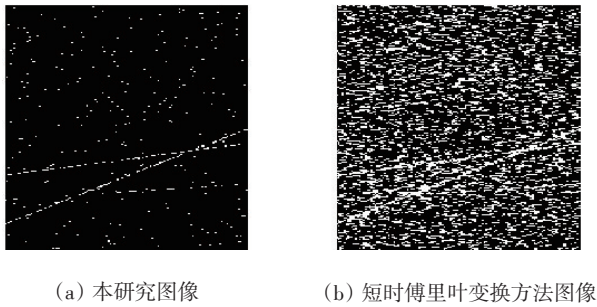
Table 1 Proposed method compared with STFT

输入信号 信噪比/dB	基于 DPSS 的时频 变换的噪声方差	短时傅里叶变 换的噪声方差	方差比/dB
-8	$5.1 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-3}$	3.39
-12	$6.0 \times 10^{-4}$	$1.7 \times 10^{-3}$	4.52
-16	$7.5 \times 10^{-4}$	$3.4 \times 10^{-3}$	6.56
-20	$1.3 \times 10^{-3}$	$6.1 \times 10^{-3}$	6.76
-24	$1.7 \times 10^{-3}$	$8.4 \times 10^{-3}$	6.87

由表 1 可以看出,随着输入信噪比的不断降低,本研究法对噪声的抑制能力仍然保持在一个较好的水平,且信噪比越低,本方法抑制噪声能力越显著。

### 4.3 图像二值化对比

图5表示了信噪比为-22 dB时,本方法与短时傅里叶变换方法经过信号增强之后的二值化图像。此时,短时傅里叶变换法已经无法从二值化图像中提取直线,而本方法依旧能准确提取。



(a) 本研究图像 (b) 短时傅里叶变换方法图像

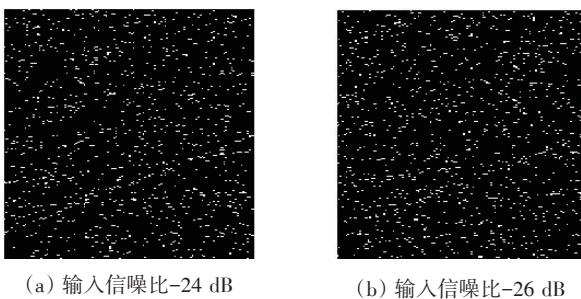
图5 图像增强二值化图像对比

Fig. 5 Proposed method compared with STFT

### 4.4 信噪比容限对比

参数估计实验将从两个方面考虑算法的有效性,分别为正常工作的最低信噪比和估计准确程度。输入信号信噪比从-12 dB 逐次递减,直到算法失效为止,统计各信噪比的估计性能以及算法的最低信噪比容限。

3组 LFM 信号的归一化初始频率和调频斜率 ( $\hat{f}^m/\hat{\beta}$ ) 分别为: 0.3000/0.0010; 0.2000/0.0005; 0.1000/0.0030。基于 DPSS 的时频变换在估计参数准确的同时能显著增加信噪比容限;且两种方法在失效之前仍能保证较好的估计准确性,这有助于提高电子侦查的可靠性。图6与图7分别列出了基于 DPSS 的时频变换方法与短时傅里叶变换方法在最



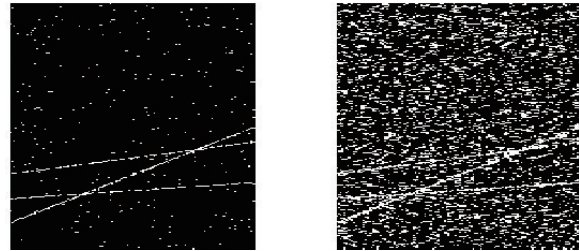
(a) 输入信噪比-24 dB (b) 输入信噪比-26 dB

图6 基于 DPSS 时频变换方法的二值化图像

Fig. 6 Binary image of time frequency method based on DPSS

大信噪比容限以及最小失效信噪比的二值化图像。

图6(a)为输入信噪比为-24 dB 的最大噪声容限二值化图像,图6(b)为-26 dB 的失效图像。左侧图像能隐约看出线性调频信号痕迹,右侧图像则很难看出。图7(a)为输入信噪比为-16 dB 的最大噪声容限图像,图7(b)为-18 dB 的失效图像,两者差异明显。



(a) 输入信噪比-16 dB (b) 输入信噪比-18 dB

图7 基于短时傅里叶变换方法的二值化图像

Fig. 7 Binary image of time frequency method based on STFT

## 5 结论

研究了一种基于 DPSS 的时频变换方法,并结合了图像二值化、霍夫变换等方法对混合 LFM 信号进行检测与提取。在与短时傅里叶变换对比的实验中,本方法能有效减少噪声能量在时频域的分布,并显著增加提取所需的信噪比容限。实验结果表明,本方法在输入信噪比小于-20 dB 的条件下仍能取得良好的提取效果。

### 参考文献 (References)

- [1] Fuller K L. To see and not be seen[J]. Radar & Signal Processing Proceedings F, 1990, 137(1): 1-9.
- [2] Pace P E. Detecting and classifying low probability of intercept radar[J]. Aeronautical Journal, 2003, 31(3): 208-212.
- [3] Azzouz E E, Nandi A K. Automatic modulation recognition of communication signals[M]. Springer US, NY, 1996.
- [4] Nandi A K, Azzouz E E. Automatic analogue modulation recognition[J]. Signal Processing, 1995, 46(2): 211-222.
- [5] Cohen L. Time-frequency distributions: A review[J]. Proceedings of the IEEE, 1989, 77(7): 941-981.

- [6] Chen Z, Yi W, Blum R S, et al. Passive localization for emitter with unknown LFM signal based on signal parameter estimation[C]//2016 IEEE Radar Conference, Piscataway, NJ: IEEE, 2016: 1-6.
- [7] Chen H, Guo J H. The application of data-driven TF analysis methods in LFM signal parameter estimation[C]//TENCON 2013-2013 IEEE Region 10 Conference (31194). Piscataway, NJ: IEEE, 2013: 1-4.
- [8] Gao S L. Detection and parameters estimation of LFM signal based on chaos[J]. Journal of Sichuan University, 2013, 45(3): 98-102.
- [9] Wang Z Z, Huang Y, Liu F. Performance analysis of LFM signal parameter estimation through FrFT transform[J]. Applied Mechanics & Materials, 2012, 195/196: 80-83.
- [10] Percival D B, Walden A T. Spectral analysis for physical applications[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [11] Xu B, Sun L, Xu L, et al. Improvement of the Hilbert method via ESPRIT for detecting rotor fault in induction motors at low slip[J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2013, 28(1): 225-233.
- [12] Slepian D. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty—V. The discrete case[J]. Bell Labs Technical Journal, 1978, 57(5): 43-63.
- [13] Thomson D J. Spectrum estimation and harmonic analysis [J]. Proceedings of the IEEE, 1982, 70(9): 1055-1096.
- [14] Gonzalez R C, Woods R E. Image processing[J]. Digital image processing, 2007, 2(7): 731-733.

## Multiple linear frequency modulation signal extraction in highly noisy environment using discrete prolate spheroidal sequence

HOU Changman<sup>1</sup>, YU Biao<sup>2</sup>, CHEN Yuanhang<sup>3</sup>

1. Chinese People's Liberation Army 92493 Unit 2, Huludao 125000, China
2. Chinese People's Liberation Army 92493 Unit 12, Huludao 125000, China
3. Beijing Institute of Aerospace Control Devices, Beijing 100854, China

**Abstract** With the continuous development of countermeasure and anti-countermeasure technology as well as the increasing application of low intercept signals, traditional signal extraction methods are no longer to satisfy user's needs for extraction of low intercept signal waveforms. In this paper, based on the discrete prolate spheroidal sequence (DPSS), the time-window function is used to analyze multiple linear frequency modulation signals. A method employing horizontal threshold decision probability to capture signal is proposed, and extraction of signal waveform is completed by adaptive binarization and improved Hough transform (HT). Simulation shows that the proposed method is better than the short-time Fourier transform algorithm in terms of noise control and can accurately extract the waveform at low SNR.

**Keywords** discrete prolate spheroidal sequence; Hough transform; multiple linear frequency modulation; short-time Fourier transform ●



(责任编辑 王志敏)