

马尔可夫的概率情怀

徐传胜

临沂大学数学与统计学院, 临沂 276000

摘要 马尔可夫是圣彼得堡数学学派的卓越代表,他秉承和发展了切比雪夫的概率思想。第1次严格证明了中心极限定理;拓广了大数定理相关理论;创立了马尔可夫链,初步奠定了随机过程基础等。本文通过马尔可夫同恩师、师弟之间的学术切磋,展示了其高尚的科学人生观。

关键词 马尔可夫;概率论;马尔可夫链

马尔可夫(1856—1922年,图1)是俄罗斯数学家,圣彼得堡科学院院士,圣彼得堡数学学派的中坚。他深受圣彼得堡数学学派领袖切比雪夫(1821—1894年)的学术影响,是切比雪夫概率思想的继承者和发展者。最初马尔可夫主



图1 马尔可夫

要是沿着恩师开创的概率方向,致力于相互独立随机变量序列研究,改进和完善概率极限理论。后来其研究兴趣拓展到相依随机变量序列,创立和发展了著名的马尔可夫链理论,为随机过程发展奠定了基础。

1 爱吾师,但更爱真理

1874年,马尔可夫以优异成绩考入了神往已久的圣彼得堡大学数学系,开始自由“漫步”在绚丽多姿的数学王国。他很快就表现出独特的数学天赋,并被吸收到老师组织的讨论班参加学习。1878年,马尔可夫以优异成绩毕业并留校任教,其毕业论文荣获当年系里的金质奖。如鱼得水的马尔可夫一发不可收拾,越来越喜爱数学科学问题,一直攻读到博士研究生,分

别于1880年、1884年获得硕士学位和博士学位。

1887年,切比雪夫在论文“论概率论的两个极限定理”中,率先给出了中心极限定理及其证明。在概率论倍受西方科学界排挤的年代里,切比雪夫的研究工作让不少人幡然醒悟,但因其处理方法尚不够完善,故所得结果较为粗糙。由于切比雪夫在当时俄罗斯甚至国际上具有很高的学术声望,在较长一段时间内,无人质疑切比雪夫的相关论述。第1位指明了切比雪夫的定理叙述不严密且证明也不严格的是马尔可夫。

马尔可夫是切比雪夫的追随者和捍卫者。他秉承切比雪夫的学术研究传统方法,自1898年起就应用切比雪夫所采用的矩方法来研究概率极限理论,旨在应用传统

收稿日期:2018-02-06;修回日期:2018-04-16

基金项目:山东省教育科学规划项目(ZBS15005);国家社会科学基金项目(16XSS003)

作者简介:徐传胜,教授,研究方向为近现代概率思想发展史,电子信箱:lysxcs@163.com

引用格式:徐传胜. 马尔可夫的概率情怀[J]. 科技导报, 2018, 36(8): 93-96; doi: 10.3981/j.issn.1000-7857.2018.08.011

数学方法,获得前辈和同时代数学家所取得的研究成果。这种追求平淡的理念需要娴熟的数学技巧需要付出艰辛的努力。

在反复推证定理过程中,马尔可夫很快就发现了切比雪夫的理论不严密之处。在给喀山大学教授瓦西里耶夫(1853—1929年)的系列信函中,马尔可夫与之探讨了中心极限定理的相关理论。如在1898年10月23日的信中,马尔可夫明确指出切比雪夫的相关研究具有重要理论价值,但其不严密性却使论文价值有些失色。其中,他特别称切比雪夫所获结果为“正在证明的定理”,一方面表示对恩师的尊重和敬仰,另一方面则表明了其严谨的治学态度。可见,马尔可夫同亚里士多德(Aristotle,公元前384—公元前322)一样,表现出“吾爱吾师,但吾更爱真理”的大师风范。

此后,马尔可夫以“大数定理和最小二乘法”为题撰文,并发表于1898年《喀山大学数理论报》。同年,在圣彼得堡科学院的院报上又撰文“论方程的根”,精确论述并证明了中心极限定理,其改进方法被称为“切比雪夫-马尔可夫矩方法”。

在概率论发展史上,马尔可夫应用矩方法第1次严格证明了中心极限定理,这充分表明了概率论同其他数学分支一样,拥有完美的逻辑基础和严密的数学论证。而当时,西方学界正极力把概率论排除在“科学殿堂”之外,正是圣彼得堡数学学派拯救了危难之中的概率论,使其恢复了数学科学地位。

2 同门竞技,共谱概率新篇章

在1900—1901年,马尔可夫的师弟李雅普诺夫(1857—1918年)

另辟新径,应用特征函数方法证明了中心极限定理,即“李雅普诺夫”定理。其证明方法不仅具有开创性,而且舍弃了随机变量序列所有阶矩皆存在的严格条件。当阶数趋于无穷时,这是矩方法难以企及的,故似乎利用矩方法理论难以达到特征函数法所得结论。

马尔可夫和李雅普诺夫都是切比雪夫的得意弟子,可谓之“左膀右臂”。他们曾并肩对抗数学家、神学家涅克拉索夫(1853—1924年)对圣彼得堡数学学派的学术攻击。马尔可夫很是佩服师弟的才华,师弟的成功使其再次直面中心极限定理,他试图仍然应用矩方法来获得李雅普诺夫的结论。这样马尔可夫不得不舍弃原定理基本条件,而寻觅新的研究途径。“千淘万漉虽辛苦,吹尽黄沙始到金。”马尔可夫经过多年的苦苦探索和艰苦努力最终获得了成功,最大限度地扩展了矩方法的应用范围,再次展现了传统数学方法的魅力,对此他感到很高兴,李雅普诺夫也给予了祝贺。

马尔可夫用矩方法来严格证明中心极限定理的系列研究主要体现在1908年发表的论文“切比雪夫不等式和基本定理”和“论李雅普诺夫院士所建立的概率极限定理”之中。前者讨论了若干定积分的连分数展开及其收敛性,论证了切比雪夫不等式;后者应用矩方法证明了李雅普诺夫定理,其中构建了一种新方法“截尾术”,即在适当领域截断随机变量使其有界,这样既不改变随机变量序列之和的极限分布,又能保证其任意阶矩存在,在结论部分,马尔可夫给出不适于所证定理的一个实例,但其适用于李雅普诺夫定理。这篇文章再次体现了马尔可夫的治学严谨性。

马尔可夫的“截尾术”不仅克服了李雅普诺夫“特征函数法”过分依赖随机变量独立性之弱点,开辟了通向非独立随机变量序列的研究道路,而且突破了特征函数仅适用于古典极限理论范畴的局限性,为强极限理论发展提供了有力概率手段。目前,“截尾术”与“对称化”以及“中心化”已成为现代概率极限理论的三大有力研究工具。

3 诗中觅芳,创立马尔可夫链

数学家的创新能力从何而来?为何其能发现新理论?为何能构建新学科来引导研究方向?根据中心极限定理可知,这是受诸多偶然和必然因素的影响,其中最重要的因素应当是厚积薄发的“灵光闪现”。多学科的相互融合能够开创新的研究领域,马尔可夫链(图2)就诞生于诗歌研究。

1913年,马尔可夫应用概率思

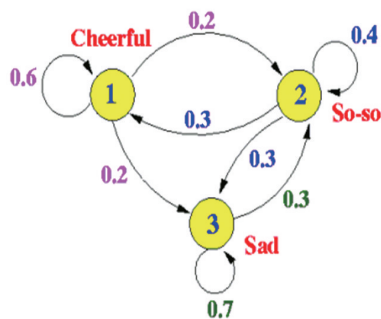


图2 马尔可夫链

想分析了普希金(1799—1837年)的长诗《叶甫盖尼·奥涅金》。诗人气势豪放,“其所以神化而超出于众表者,殆犹天马行空而步骤不凡”。马尔可夫把长诗看作是俄语字母的随机排列,并随机选取了其中连续排列的20000个字母,用C代表辅音、Г代表元音(为了使问题简化起见,不妨把硬音、软音两个字母算作辅音),则诗人那火一般

的诗篇犹如变成了一只池塘中的青蛙,从这片荷叶跳向那片荷叶,口中不时还叫上几声。马尔可夫分别统计了在C后面出现C和Г的频率以及在Г后出现C和Г的频率。从中发现了元音字母和辅音字母的统计规律,据此估计出若干概率,如元音出现概率为

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N} = \frac{8636}{20000} \approx 0.432$$

元音出现在元音后概率为

$$\alpha = P(\Gamma/\Gamma) = \frac{N(\Gamma\Gamma)}{N(\Gamma)} = \frac{1104}{8638} \approx 0.128$$

而元音出现在辅音后概率为

$$\beta = P(\Gamma/C) = \frac{N(C\Gamma)}{N(C)} = \frac{7534}{11362} \approx 0.663$$

将所得结果与按照俄语拼音规则计算出的结果进行比较,证实了俄语中字母随机序列符合马尔可夫所建立的概率模型。如遍历性是马尔可夫链最简性质,即马尔可夫链的极限分布与初始状态无关。而在马尔可夫所统计的诗文情形中,则有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \beta_i = \frac{\beta}{1 - \alpha + \beta}$$

其中 α_i , β_i 是第 i 步的转移概率。将此公式应用于俄语中字母随机序列所形成的马尔可夫链,则有

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i &= \frac{\beta}{1 - \alpha + \beta} \\ &= \frac{0.663}{1 - 0.128 + 0.663} = 0.432 \end{aligned}$$

此结果恰与诗文中元音出现的概率相等。

后来,马尔可夫还研究了俄罗斯19世纪现实主义作家阿克萨柯夫(1791—1859年)的《家庭纪事》,从中随机选取了100000个字母,其研究结果与此类似。因此,马尔可夫的论文“叶甫盖尼·奥涅金诗文的统计研究”,不仅应用语言学统计资料来阐明了马尔可夫链性质,更重要的是开创了数理统计语言的

学的研究先河。时至今日,文学著作的语言统计分析在国内外皆具卓有成效的研究成果。如《罗密欧和朱丽叶》的作者鉴定、《静静的顿河》作者是谁、《红楼梦》前80回和后40回是否皆为曹雪芹所著等。更有甚者,应用统计学研究《毛泽东选集》也发现了不少规律。

4 刚正不阿,敢于挑战权威

除数学外,马尔可夫始终关心社会问题、热爱人文科学,总是做自己喜欢的事情,整个一生都是个反叛者。早在中学时期,他就经常读一些进步读物,为此与校方多次发生冲突。最严重的一次是在例行祈祷仪式上,马尔可夫不是把《圣经》捧在手中虔诚读诵,而是早早塞进了口袋盼着赶快离开。一直对马尔可夫有成见,并密切监视他的学监大声指责其破坏了宗教仪式的肃穆气氛,岂不知自己的咆哮声才是罪魁祸首。

马尔可夫的《概率演算》可谓是一部唯物主义者的战斗檄文。该宏著带有强烈论战性质,其主要对手竟是圣彼得堡数学学派元老布尼亚科夫斯基(1804—1889年)和反动教会组织。虽在中学时代,马尔可夫就写信请教布尼亚科夫斯基,也是在其引导下报考了圣彼得堡大学数学系,然而在肯定布尼亚科夫斯基科学贡献的基础上,对于其宗教卫道士式言论,马尔可夫进行了毫不留情地批判,同时尖刻嘲讽地指出了其把概率论应用于供词、传说、候选人与意见间的各种选择及多数裁定司法判决等“伦理科学”实例。《概率演算》完全否定了上帝的存在,对于《圣经》也持怀疑态度,这在当时是“大逆不道”的著作。

1902年2月25日,圣彼得堡科学院文学部联席会议通过了一项决议,接纳被政府流放的高尔基(1868—1936年)为名誉院士。然而,末代沙皇尼古拉二世却命令国民教育大臣,立即取消高尔基的院士资格。该科学院于3月12日不得不发布文告取消高尔基当选院士资格。科学院进步人士皆表示了强烈愤慨,马尔可夫也于4月6日向院务委员会递交声明:“我认为科学院关于取消高尔基当选资格的文告是无效的和被强加的”,并论证了其依据所在。马尔可夫不仅强烈反对沙皇专制统治,并且觅到政治和数学的结合办法。

为转移国内日益高涨的革命情绪并准备帝国主义战争,沙皇政府于1913年以1613年罗曼诺夫当选沙皇为标志,庆祝罗曼诺夫王朝建立300周年。针对沙皇政府的浮华庆典,马尔可夫决定利用自己在科学界的威望,以1713年雅各布·伯努利《猜度术》出版为标志,发起了庆祝大数定理发现200周年的科学活动。

马尔可夫自己对大数定理理论很有研究。柯尔莫戈洛夫(1903—1987年)指出,马尔可夫大数定理的条件(1907年提出)已很接近其于辛钦(1894—1959年)在1929年所得大数定理的必要条件。马尔可夫还把大数定理推广到相依随机变量序列,开创了相依随机变量的研究先河。

山水草木皆有韵,数学大美幻无穷。马尔可夫对数学充满了兴趣和感情,数学就是他生命中的主要组成部分,其以极为丰富的数学研究成果彰显着人类思维的魅力。值得一提的是,他把儿子也培养成了著名数学家。曾有人请教其数学的定义,他不假思索地答

道：“所谓数学，就是高斯、切比雪夫、李雅普诺夫、斯捷克洛夫和我所从事的研究”。其中斯捷克洛夫

是李雅普诺夫的得意门生，俄罗斯数学物理学派创始人。有趣的是，一般数学研究结果之冠名是由其

他数学家认定，而马尔可夫则自己命名了“马尔可夫链”。这就是数学家的铮铮傲骨！

(责任编辑 王丽娜)

参考文献(References)

- [1] Gillispie Ch C. Dictionary of Scientific Biography[M]. New York: Charles Scribner's Sons, 1971: 124-130.
- [2] Maistrov L E. Probability theory: A historical sketch[M]. New York and London: Academic Press, 1974: 188-216.
- [3] 徐传胜. 从博弈问题到方法论学科——概率论发展史研究[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 250-287.
- [4] 徐传胜. 圣彼得堡概率学派和大数定理理论的奠基[J]. 自然辩证法通讯, 2013, 35(1): 50-56.
- [5] 徐传胜. 圣彼得堡数学学派研究[M]. 北京: 科学出版社, 2016: 154-195.

A research on A. A. Markov's probability feelings

XU Chuansheng

School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi 276000, China

Abstract Markov was an excellent representative of the Mathematicians School from the St. Petersburg. He inherited and developed the probability thought from Chebyshev. He Provided the first rigorous proof on the central limit theorem, extended the theorem of large numbers and also laid a foundation on the theory of stochastic processes and so on. His researches Impelled the spread and the development of probability theory in Russia. This paper presents the academic discussion between Markov and the teacher junior fellow apprentice. It shows A. A. Markov's noble outlook on science and life.

Keywords Markov; probability theory; Markov chain ●



(责任编辑 王丽娜)