

统一混合模型网络的熵

——揭开复杂系统复杂性表现

李永, 方锦清, 刘强

中国原子能科学研究院核技术应用研究所, 北京 102413

摘要 统一混合网络理论模型引入4个混合比,对复杂网络相关的随机性、确定性、变速增长进行调控,这样更符合随机性与确定性统一的现实世界网络。总结了复杂网络的3种类型熵:Boltzmann-Gibbs熵、非广延熵 S_q 和开放网络的熵与混合比之间的关系。熵从本质上揭示了网络的熵变与无标度网络的幂律指数之间的函数关系,阐明了复杂网络的演化机制及复杂性变化的特点。

关键词 统一混合网络理论模型;3种类型的熵;混合比

熵的概念是在19世纪60年代由德国物理学家Clausius提出,经过 Boltzmann 和 Gibbs 等的发展,成为热力学理论的重要物理量之一^[1]。从热力学观点,熵是不能再被转化作功的能量总和的一种测度,其宏观意义是系统能量分布均匀性的一种量度。熵的增加意味着有效能量的减少。从统计力学考察,熵是一个体系有序度或混乱程度的度量,熵越大,系统的混乱程度就越大,反之则系统的有序度越高。将一个复杂系统的第一种熵的定义为 Boltzmann-Gibbs 熵(BGS):

$$BGS = -k_B \sum_{i=1}^{\infty} P(i) \ln P(i) \quad (\text{离散系统}) \quad (1)$$

或

$$BGS = -k_B \int_G P \ln P d\Gamma \quad (\text{连续系统}) \quad (2)$$

并且满足归一化条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(i) = 1 \quad (3)$$

其中 $P(i)$ 是系统在第 i 个微观状态的概率, k_B 是 Boltzmann 常数。不失一般性,通常选取 $k_B=1$ 。

1948年, Claude E Shannon(香农)推广上述热力学中的热熵概念,提出了“信息熵”的概念,用来描述信息源的不确定度。类似于式(1),香农信息熵(Shannon's entropy)定义为

$$S = -\sum_G P(G) \ln P(G) \quad (4)$$

式中 $P(G)$ 表示信息源输出概率函数,其中对数通常取2为底,单位为比特,也可转换到其他形式。最简单的单符号信源仅取0和1两个元素,即二元信源,其概率为 P 和 $Q=1-P$,该离散信源的信息熵具有:1)非负性,即收到一个信源符号所获得

的信息量应为正值, $S \geq 0$;2)对称性,即对称于 $P=0.5$;3)确定性, $S(1,0)=0$,即 $P=0$ 或 $P=1$ 已是确定状态,所得信息量为0;4)极值性,当 $P=0.5$ 时, S 最大;而且 S 是 P 的上凸函数。对连续信源,香农同样给出了形式上类似于离散信源的连续熵。一般当一种信息出现概率更高时,表明它被传播得更广泛,或是被引用的程度更高。因此,从信息传播的角度来看,香农信息熵可以表示信息的价值,可以作为一个衡量信息价值高低的标准,由此可以推论做出关于一个复杂系统的有序度或混乱程度的度量,如果熵越小则复杂系统的有序度越高,熵越大则一个复杂系统混乱程度越大。

1988年 Tsallis 引入了非广延熵 $S_q^{[2-4]}$,定义为

$$S_q = -\frac{1}{1-q} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{\infty} [P(i)]^q \right\} \quad (5)$$

式中 q 为特性参数,当 $q \rightarrow 1$ 时, S_q 便简化为BGS熵。

基于本研究组提出的统一混合网络理论框架^[5-10],利用该框架的主要理论模型,研究了该模型下复杂网络的BGS和非广延熵 S_q 与混合比的变化关系,探讨了开放复杂网络的熵,给出该模型下非平衡网络的熵与混合比的变化关系,从而为度量复杂网络的复杂性提供了理论依据和合理的物理机制。

1 统一混合网络理论模型

为描述从规则格状网络到随机网络的转变,1998年 Watts 和 Strogatz 提出了小世界模型。其基本算法为,1)初始为规则网络。最初网络为1个具有 N 个节点的环形最近邻耦合网络,每个节点只与它的偶数 K 个邻居节点相连。2)随机

收稿日期:2017-05-11;修回日期:2017-07-11

作者简介:李永,副研究员,研究方向为复杂网络理论与应用,电子信箱:liyong401@163.com;方锦清(通信作者),研究员,研究方向为网络科学及其应用,电子信箱:fjq96@126.com

引用格式:李永,方锦清,刘强.统一混合模型网络的熵——揭开复杂系统复杂性表现[J].科技导报,2017,35(14):56-62;doi:10.3981/j.issn.1000-7857.2017.14.007

化。以概率 P 随机为网络的每条边重新连接,同时保证没有自环和重边。随着连接概率 P 的变化,观察到3种类型网络,规则网络($P=0$)、小世界网络($0 < P < 1$)和随机网络($P=1$)。由此发现的小世界网络同时具有小的平均路径长度和大的集聚系数特性。

1999年,Barabási和Albert提出了无标度网络结构的两种生成机制,增长和优先连接。网络中不断加入新的节点,而新节点优先与已有连接边数大的节点相连(即富人越富)。BA无标度模型基本算法为:1) 增长。初始少量(m_0)个节点,在每个时间间隔加入1个新节点,且新节点与网络中已有的 m 个节点相连。2) 优先连接。新节点与已有节点 i 相连的概率取决于节点 i 的度 k_i ,即

$$\Pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (6)$$

根据上述两条准则,经过 t 步后生成1个节点数为 $N=t+m_0$ 、

边数为 m_t 和具有幂律的无尺度网络。

在小世界和无尺度模型的启发下,发展出了大量的复杂网络模型,包括无权 and 加权模型等在内的大量网络演化模型,经分析发现大多数模型偏于两种极端情形,广义随机性连接和完全确定性连接方式。但是,自然界和人类社会的一个最基本事实是,普遍存在随机性与确定性2种混合连接情形,即共存2种基本连接方式,2种极端情形并不完全符合现实世界的实际网络。为更好地刻画真实网络,本研究组提出了1种统一混合网络理论框架,更细致地描述确定性和随机性统一混合网络的演化机制,符合自然的、社会的、物理的、技术的以及生命的大多数实际网络情况。

统一混合网络理论框架引入4个混合比,由3个模型组成:和谐统一的混合择优模型(HUHPM)、大统一混合网络模型(LUHNM)和大统一混合变速增长模型(UHVSg)。图1是统一混合网络理论3个模型以及网络连接生长过程示意图。

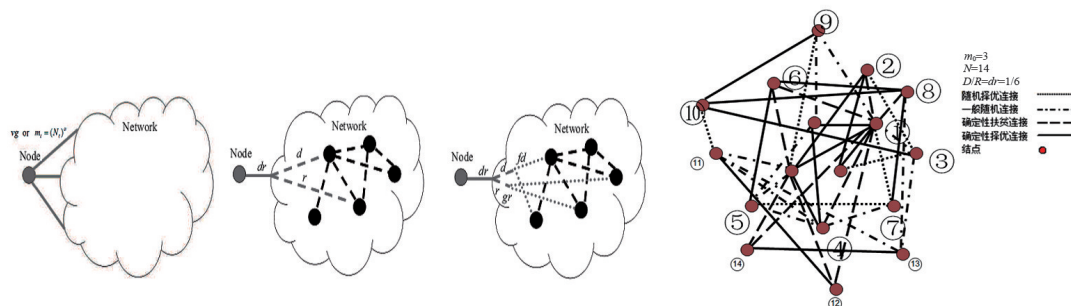


图1 统一混合网络理论3个理论模型以及网络连接生长过程示意

Fig. 1 Illustrations of three theoretical models in the unified hybrid network model and their growth

1.1 HUHPM模型

HUHPM模型主要是为了克服无权BA网络模型和现有许多有权网络模型只有“随机性择优”的不足,在这类网络模型中引入“确定性择优”思想,即在复杂网络的增长中采用两种混合择优连接,以改进和完善这一大类的无权和有权网络。为此,称HUHPM作统一混合网络理论框架的第一部曲模型,只定义1个总混合比 dr 控制2种混合方式:

$$dr = \frac{DPA}{RPA} \quad (7)$$

式中, DPA 为确定性连接总时数(determinatic preference attachment), RPA 为随机性连接总时数(random preference attachment), $DPA \in [0, +\infty]$, $RPA \in [0, +\infty]$, $dr \in [0, +\infty]$ 。HUHPM的演化方式如下。

1) 增长。在初始时刻,假定系统中已有少量(m_0)个节点,在之后的每一个时间间隔中,新增1个度为 m 的点($m \leq m_0$),并将 m 条边连接到网络中已经存在的 m 个不同的节点, m 条边的连接按照以下混合连接进行。

2) 混合连接。新节点与已有节点 i 相连的概率根据混合连接方式进行,根据给定的总混合比 dr 确定混合连接的次

序,从统计意义上,最终并不影响统计结果。(1) 确定性择优方式。连接前把整个网络按照节点度从大到小进行排序: $k_1 > k_2 > \dots > k_m > \dots > k_n$,再对前 m 个度最大的节点直接连接。(2) 随机性择优方式。可以应用任意一种网络模型的随机择优方式,可将HUHPM应用于任何典型模型。

网络演化中总混合比 dr 是唯一的参数,实施随机性择优与确定性连接相结合,而两者连接的优先次序完全灵活的,两者混合交替演化达到所需的比较大网络规模(长时间连接)的最终结果不受影响。

1.2 LUHNM模型

仅考虑确定性与随机性这两大类的择优连接方式,还不能完全反映实际世界网络形成中存在连接方式的多样性和复杂性。因为不论随机性连接,还是确定性连接,只考虑1种“择优”方式,而不考虑其他可能连接方式,与实际情形不完全相符。现实世界网络中,随机性和确定性两大类连接都存在多种混合方式,例如,在选择两地之间的交通路线时,既可以从可能的路线中随机选择一条路线(即随机),也可选择一条最近的路线(即择优),可根据平时的交通状况选择偏僻路

线来避开拥挤(即选择节点度相对较小的节点进行连接),或根据实际交通状况混合选择。这样,网络中存在多种混合连接方式。因此可把HUHPM推广到LUHNM作为第2层次,之前HUHPM中总混合比 dr 成为第1层次混合比,引入2个混合比作为第2层次的2个混合比,一个是随机混合比 gr ,定义为

$$gr = \frac{\text{一般随机性连接的时步数}(GRA)}{\text{总随机性连接的时步数}(RA)} \quad (8)$$

另一个是确定性混合比 fd ,定义为

$$fd = \frac{\text{确定性扶贫连接的时步数}(HPA)}{\text{总确定性连接的时步数}(DA)} \quad (9)$$

它们的关系为: $DA=HPA+DPA$, $RA=GRA+RPA$, 式中 $fd \in [0,1]$, $gr \in [0,1]$ 。

LUHNM的演化算法与HUHPM类似,不同的是考虑了3个混合比(dr 、 gr 、 fd)。

1) 增长。在初始时刻,假定系统中已有少量(m_0 个)节点,在以后每个时间间隔中,新增1个度为 m 的点($m \leq m_0$),并将这 m 条边连接到网络中已经存在的 m 个不同的节点, m 条边的连接按照混合连接进行。

2) 混合连接。当在网络中选择节点与新增节点连接时,被选择的节点 i 与新节点连接的概率为 $\prod(k_i)$,首先按照混合比 dr 确定节点 i 是随机性连接还是确定性连接,对于随机性连接方式,以 gr 的比率按照BA模型演化,同时以 $(1-gr)$ 的比率按照ER模型演化;对于确定性连接方式,按照度的大小将网络中全部节点从大到小排序,以 fd 的比率选择前 m 个度最大的节点连接,以 $(1-fd)$ 的比率选择后 m 个度最小的节点连接。

1.3 UHVSG模型

许多实际网络,不论是节点增减还是边的变化速度均不一致,而且同时随时间变化。例如在电话呼叫而形成的网络中,在工作时间段,可能有很多人在同时打电话,而在晚上休息的时间段,打电话的人数相对少很多;而且随着电话数量的增加,网络规模也在不断增加,呼叫数量也相应增多。这种情形称为变速,它影响网络连接的分布,并且可能决定其结构。为全面反映网络实际增长过程中的多种变化情形,将LUHNM进一步扩充为UHVSG,作为第3层次,其最大特点是,在总混合比 dr 及第2层次的2个混合比(fd 、 gr)基础上,又从第3层次上引进变速混合比 vg 为

$$vg = \frac{\text{确定性变速增长时步数}(DVG)}{\text{随机性变速增长时步数}(RVG)} \quad (10)$$

式中, $m=DVG+RVG$ 。

典型的变速方式之一为

$$m(t) = p(t)[N(t)]^\alpha \quad (11)$$

式中, $m(t)$ 为 t 时刻加入网络的节点的连接边数; $p(t)$ 为网络中边的连接概率; $N(t)$ 为 t 时刻网络中总的节点数, $m(t) \leq N(t)$; $0 < p(t) \leq 1$; α 为变速指数,依 α 取不同值而分为正常($\alpha=0$)、加速($0 < \alpha < 1$)和超加速($\alpha \geq 1$)等情形。

UHVSG算法考虑4个混合比(dr 、 gr 、 fd 、 vg),和LUHNM相比,每个新节点要选择连接边的个数不再为常数。

1) 增长。在初始时刻,假定系统中已有少量(m_0 个)节点,在以后的每1个时间间隔 t 中,新增1个度为 $m(t)$ 的点,并将这 $m(t)$ 条边连接到网络中已经存在的 $m(t)$ 个不同节点上。

2) 混合连接。当在网络中选择节点与新增节点连接时,被选择的节点 i 与新节点的连接方式按照LUHNM的连接方式进行。

上述统一混合网络理论模型已经从单一网络推广到了多层次超网络^[11],并应用于500强企业高科技超网络^[12],理论与实证研究结果相一致。

2 统一混合网络模型中熵与混合比的复杂性变化

2.1 随 dr 的变化

统一混合网络理论框架里第一部曲HUHPM中利用调控总混合比 dr ,同时进行确定性择优和随机性择优2种择优连接,不仅得到了无标度特性,而且观察到幂指数对总混合比 dr 的变化具有很强的敏感性,随 $\log(dr)$ 的增加而增加, $dr=1/1$ 是一个相变阈值;并且网络的小世界特性更突出,与无权BA和权重演化网络(BBV)等模型比较,HUHPM具有最短平均路径距离 L 和最大平均群聚系数 C , dr 有利于增加网络局部集团化。

研究结果表明^[13],在无权HUHPM-BA模型、有权HUHPM-BBV模型中,熵随着 dr 的增加而减小,其中在计算熵时, $P(i)$ 由度分布表示。 BGS 和 S_q 熵与混合比(dr 、 fd 、 gr)的关系,如图2所示,网络规模 $N=3000$ 。图2(a)是 BGS 熵随 dr 和 γ 的变化理论关系图,图2(b)是对不同 dr 时 S_q 和 q 的关系图,可以看到固定参数 q 值时, S_q 随 dr 的增加而降低,网络越不均匀,有序度得到提高。 BGS 熵与混合比(dr 、 fd 、 gr 、 α)间存在更加复杂的关系,在确定占主导时,随 fd 增加,熵出现非线性变化。

在HUHPM模型形成的网络中,图2给出 BGS 和 S_q 熵都随着混合比 dr 的增加而降低。因为总混合比 dr 增加意味着在网络增长过程中确定性择优选择连接方式越来越多,网络的熵因此不断减小,网络拓扑演化趋于星形网络,增加确定性可以提高网络的有序程度。

在无权HUHPM-BA模型、有权HUHPM-BBV模型中,熵都随着 γ 的增加而减小。说明对于HUHPM网络,该网络在不断增长,是一个开放的系统,由混合比 dr 进行调节系统的外因输入。当 $dr=0/1$ 时该网络中的熵已达最大,这样系统混乱度或无序度增强了。

2.2 随 fd 及 gr 的变化

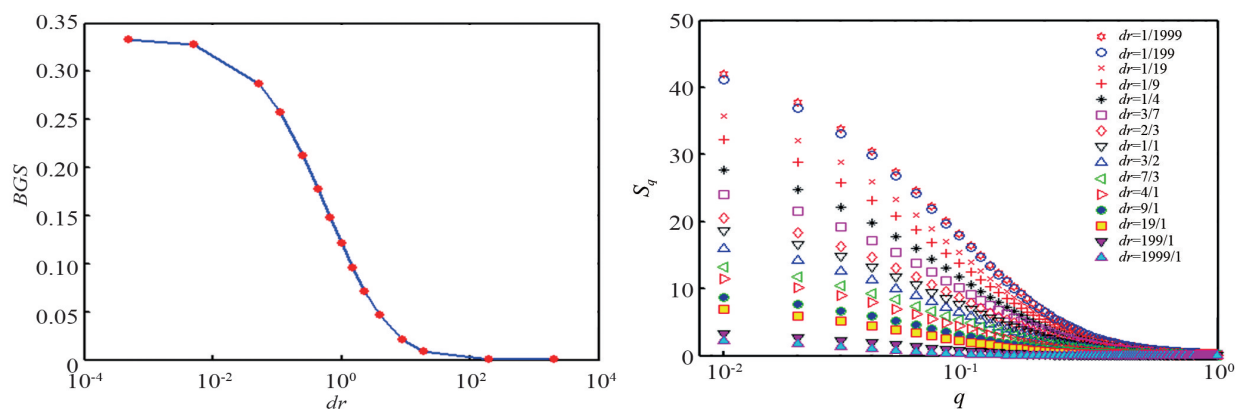
统一混合网络理论框架的第二部曲模型LUHNM揭示了 BGS 熵与混合比 fd 和 gr 的变化关系^[14],如图3所示。在随机性占主要时,在不同 fd 值下, BGS 熵也基本随混合比 gr 增加而下降,网络的有序度提高了。但是在 $dr=1/1$ 情况下,随机性与确定性势均力敌, BGS 熵出现不同变化。

2.3 随变速指数 α 的变化

统一混合网络理论框架的第三部曲模型 UHVS_G 针对网络变速生长的特点,考虑网络增长变速,引入减速与加速比,把各种实际网络中存在变速的特点包涵在内,使理论模型进一步趋于完善。由此发现这类网络中累积度分布 $P(k)$ 随混合

比变化可以在无标度分布 SF 和广延指数分布之间相互转变,并揭示了拓扑特性、相称性系数与混合变速指数 α 之间的复杂关系等。

值得关注的是, BGS 熵与混合比及变速指数 α 之间存在复杂关系,如图 4 所示,存在非线性关系。

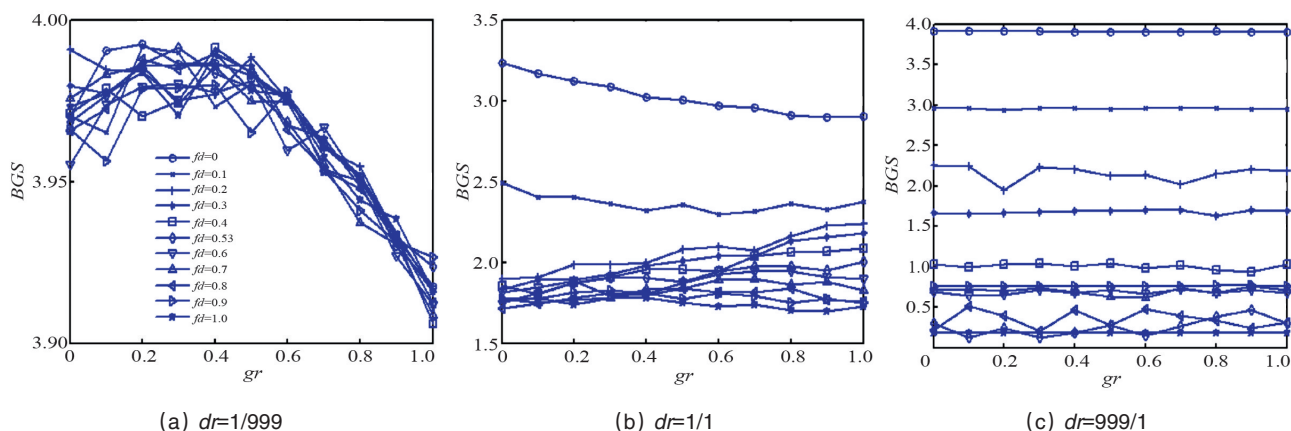


(a) BGS 熵与 dr 的理论关系

(b) 不同 dr 时 S_q 和 q 的关系

图 2 BGS 和 S_q 熵与混合比 (dr, fd, gr) 之间的关系

Fig. 2 Relationships between entropy (BGS, S_q) and hybrid ratios (dr, fd, gr)



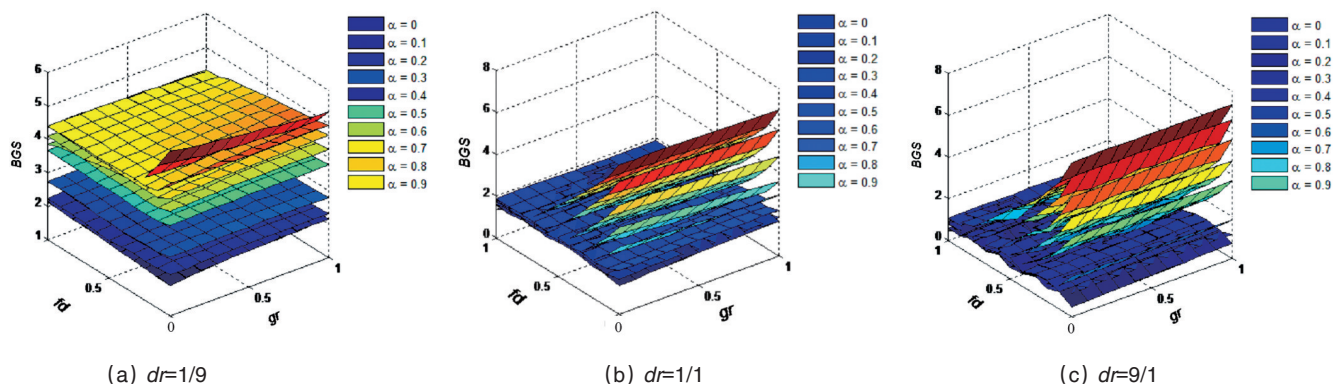
(a) $dr=1/999$

(b) $dr=1/1$

(c) $dr=999/1$

图 3 BGS 熵与混合比 fd 和 gr 的关系 ($\alpha=0.5$)

Fig. 3 Relationships between BGS and ratios (fd, gr)



(a) $dr=1/9$

(b) $dr=1/1$

(c) $dr=9/1$

图 4 BGS 熵与混合比及变速指数 α 之间的关系

Fig. 4 Relationships between BGS and α

2.4 BGS熵随混合比(dr, fd, gr, α)综合的变化

图5给出BGS熵随4个混合比(dr, fd, gr, α)变化,它们之间存在更加复杂的关系,具体取决于4个混合比的匹配情

况,如确定性连接占主导时,随 fd 增加熵出现非线性变化,与图4的变化特点相类似。

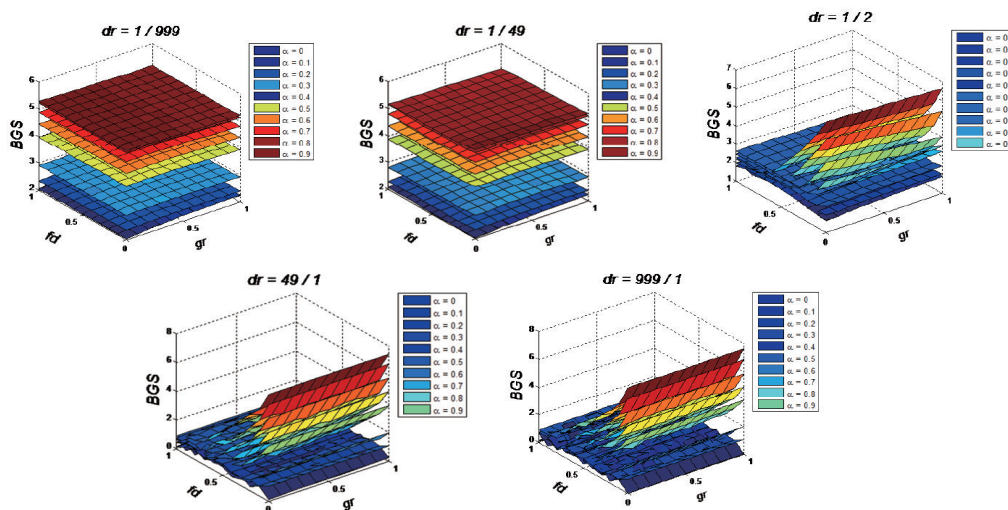


图5 BGS熵与混合比(dr, fd, gr, α)之间的关系

Fig. 5 Curves of relations among BGS and ratios(dr, fd, gr, α)

3 开放网络的熵

真实世界的大多数网络显示具有小世界和无标度特性,WS模型和BA模型给出了其定量可解的一种机制。其中复杂网络理论模型中一个关键拓扑特性是度分布,BA模型及其扩展模型中其度分布都是满足幂律分布,用幂律指数为 γ 。于是,自然地提出两个感兴趣的问题:幂指数 γ 是否同非平衡熵有关?又如何通过外部驱动来控制幂指数 γ ?这两个问题的重要性在于揭开网络演化成自组织的物理机制,因为熵作为复杂系统有序度的一个重要物理测度,在一个复杂系统或复杂网络演化中其行为起重要作用。迄今大多数网络模型的研究结果很难回答这两个问题,不论是无权的BA无标度网络,还是加权BBV网络,其中 γ 都是常数,很少考虑 γ 可以与一个函数的熵相关。如何获得 γ 与熵及驱动Hamilton量之间的精确关系,这当然也同网络的拓扑性质及动力性质有关,还与描述网络系统的非平衡态的Liouville方程有关。为此,毕桥和方锦清^[15]从统计物理的系综理论出发探讨复杂网络的非平衡熵的奥秘,为探索复杂网络的非平衡熵的复杂性提供一种物理机制。

3.1 外势驱动下网络的刘维方程与度分布

如果一个复杂网络统计系综定义在一个图集 g 上, g 上的几率分布为 $P(G)$,其观察值为 $\{x_i(G)\}(i=1,2,\dots,r)$,其期望值为 $\{\langle x_i \rangle\}$ 。在平衡态, $P(G)$ 是对应于式(4)的Shannon熵 S 取极值,但是有一个限制条件

$$\langle x_i \rangle = \sum_c x_i(G)P(G), \quad i=1,2,\dots,r, \quad \text{且} \quad \sum_c P(G)=1 \quad (12)$$

这样熵极值的问题可由构造的Lagrange乘子法及标准统

计力学方法给出度分布 $P(G)$

$$P(G) = \frac{e^{-H(G)}}{Z} \quad (13)$$

式中, $H(G)$ 为网络的Hamilton量,由式(14)给出, θ_i 为场边数间的耦合或温度的倒数, Z 代表配分函数, $Z = \sum_c e^{-H(G)} = e^{\alpha+1}$,

$$H(G) = \sum_{i=1}^r \theta_i x_i(G) \quad (14)$$

考虑一个开放网络系统被外部势 $F(G)$ 驱动下时, F 所驱动的Hamiltonian速率为

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(-\dot{p}_i \frac{\partial F}{\partial p_i} - \dot{q}_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \quad (15)$$

驱动力 $F(G)$ 可作为 k 和度速率 $\frac{dk}{dt}$ 的函数,即 $F\left(k, \frac{dk}{dt}\right)$ 。

从以上网络Hamilton的物理意义上可知, k_i 同系统的广义动量有关。因此当考虑 F 一般是广义坐标 $q, \dot{q}$ 和广义功量 p 的函数时,其对应的Hamilton方程为

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad (16)$$

由此可以推导出开放网络系统的Liouville方程为

$$\frac{dp}{dt} = p \sum_i \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial p_i} \right) \quad (17)$$

同时,得到度分布 $P(k)$ 的刘维方程为

$$i \frac{\partial P(k)}{\partial t} = LP(k) + f(k, \gamma) \quad (18)$$

因此,得到度分布解为

$$P(k) = e^{\nu} \left[\int e^{\nu} f(k, \gamma) dt \right] \quad (19)$$

3.2 度分布与熵的关系

作为一典型事例,将统一混合网络理论中第一部曲模型

HUHPM 的双择优方法应用到 Barabasi 和 Albertr 提出的无标度 BA 模型和 Alain Barat、Barthelemy 和 Vespignani 提出的 BBV, 从而得到 HUHPM-BA 网络和 HUHPM-BBV 网络。根据数值模拟的结果, 这些网络的度分布具有 $P(k) \sim k^{-\gamma}$ 的形式, 考虑 γ 是一个混合比 dr 的函数, 导出驱动势 $F(dr)$ 与 γ 关系

$$F(dr) \sim k^{-1} \frac{3-\gamma}{2\gamma+4\gamma^2-6} \quad (20)$$

其含义为, 如果使用统一混合网络理论中第一部曲模型 HUHPM 的方法确定驱动势 $F(dr)$, 则可得到对应的 γ , 反之亦然。应用统一混合网络理论模型第一部曲方法, 研究了 HUHPM-BA 和 HUHPM-BBV 等, 其中 F 可分别由总混合比 dr 给出以下结果, 对于 HUHPM-BA

$$\gamma(dr) = \frac{A_1}{\exp\left(\frac{dr}{A^2}\right)^{A_3}} + A_4 \quad (21)$$

对于 HUHPM-BBV

$$\gamma(dr) = \frac{4 + \delta \frac{A_1}{\exp\left(\frac{dr}{A^2}\right)^{A_3}} + A_4}{2\delta + 1} \quad (22)$$

与之前结果对比, 以上网络模型 $\gamma(dr)$ 的理论形式与之前的数值结果相一致。

3.3 非平衡网络熵变和幂律指数 γ 之间一般关系

根据 Boltzmann-Gibbs 熵定义(1), 熵变化率可定义为对 Gibbs 熵的导数, 即

$$\frac{dS}{dt} = -k_B \int_c P \ln P \frac{\partial \dot{\Gamma}}{\partial \Gamma} d\Gamma \quad (23)$$

考虑到

$$\frac{\partial \dot{\Gamma}}{\partial \Gamma} = -\sum_i \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial \dot{p}_i} \right) \quad (24)$$

得出

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -k_B \int_c P \ln P \sum_i \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial \dot{p}_i} \right) d\Gamma \quad (25)$$

经推导^[13], 可以得到熵变方程

$$\frac{dS}{dt} \sim 3 \frac{3\gamma - \gamma^2}{\gamma - 3 + 2\gamma^2} k^{-\gamma-2} + k^{-\frac{1}{2}} \gamma^2 \quad (26)$$

结果请见图6, 当 $\gamma > 1$ 或 $\gamma < -\frac{3}{2}$, 可决定 $\frac{dS}{dt}$ 值为负或为正。

由图6可见, 在正幂律中, 对于 $\gamma < -\frac{3}{2}$, $P(k) \sim k^{-\gamma}$, 这时 $\frac{dS}{dt} < 0$, 并当 γ 减少时, 趋于负无穷; 在负幂律中, $P(k) \sim k^{-\gamma}$, 对于 $\gamma > 1$, 这时随 γ 增加, $\frac{dS}{dt} > 0$ 增加; 而在区间 $-\frac{3}{2} < \gamma < 1$ 中, $\frac{dS}{dt}$ 可能极不稳定地变正或变负。这些揭示负的幂指数 $\gamma > 1$ 对应于熵增加 $\frac{dS}{dt} > 0$, 与热力学第二定律规律相一致, 而正的幂律 $\gamma < -\frac{3}{2}$ 对应于熵的减少 $\frac{dS}{dt} < 0$, 这同自组织产

生的方向一致。因此得出实现自组织复杂网络的条件是, 度分布的幂指数 γ 必须是负的, 并且 $\gamma < -\frac{3}{2}$ 时, 复杂网络演化趋于自组织方向。

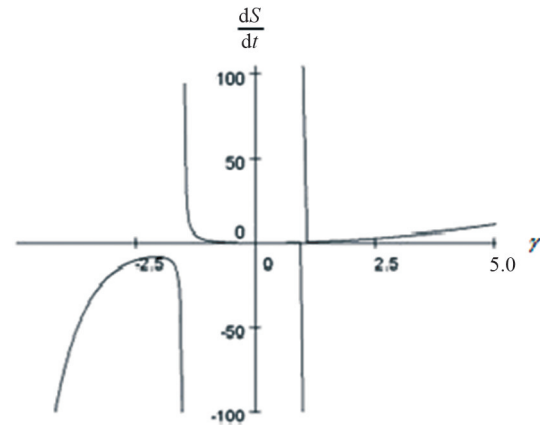


图6 熵变 $\frac{dS}{dt}$ 与 γ 的关系 ($k=5$)

Fig. 6 Relationship between $\frac{dS}{dt}$ and γ ($k=5$)

4 结论

本研究应用统计物理方法, 讨论了统一混合网络理论模型中3种熵的变化特点, 揭示了这些熵与混合比的密切关系, 反映了复杂网络的拓扑结构对熵的重要影响; 从熵本质上发现了开放网络的熵变与无标度网络的幂律指数之间的函数关系, 并发现实现复杂网络自组织的一个条件, 阐明了网络的复杂性表现及其物理机制, 为进一步探讨复杂网络的奥秘提供参考和开拓思路。

致谢: 本文写作过程中得到武汉理工大学教授毕桥的帮助。

参考文献 (References)

- [1] 霍华德, 里夫金. 熵: 一种新的世界观[M]. 吕明, 袁舟 译. 上海: 上海译文出版社, 1987: 30-40.
Howard T, Rifkin J. Entropy: A new world view[M]. Lü Ming, Yuan Zhou, trans. Shanghai: Shanghai Translation Publishing House, 1987: 30-40.
- [2] Tsallis C, Brigatti E. Nonextensive statistical mechanics: A brief introduction[J]. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2004, 16(3): 223-235.
- [3] Tsallis C, Baldwin F, Cerbino R, et al. Introduction to nonextensive statistical mechanics and thermodynamics[J]. Arxiv Preprint Cond-mat, 2003: 0309093.
- [4] Wilk G, Włodarczyk Z. Nonextensive information entropy for stochastic networks[J]. Acta Physica Polonica B, 2004, 35(2): 871-880.
- [5] 方锦清, 汪小帆, 郑志刚, 等. 一门崭新的交叉科学——网络科学(上)[J]. 物理学进展, 2007, 27(3): 239-343.
Fang Jinqing, Wang Xiaofan, Zheng Zhigang, et al. New interdisciplinary science: Network science(I)[J]. Progress in Physics, 2007, 27(3):

- 239-343.
- [6] 方锦清, 汪小帆, 郑志刚, 等, 一门崭新的交叉科学——网络科学(下)[J]. 物理学进展, 2007, 27(4): 361-448.
Fang Jinqing, Wang Xiaofan, Zheng Zhigang, et al. New interdisciplinary science: Network science(II)[J]. Progress in Physics, 2007, 27(4): 361-448.
- [7] 李永, 方锦清, 刘强. 大统一的混合网络模型中的相称性系数转变新特点[J]. 科技导报, 2007, 25(11): 23-29.
Li Yong, Fang Jinqing, Liu Qiang. New features of assortativity characteristic transition in Large Harmonious Unifying Networks Model[J]. Science & Technology Review, 2007, 25(11): 23-29.
- [8] 方锦清. 驾驭强流束晕与探索网络科学[M]. 北京: 原子能出版社, 2008: 139-168.
Fang Jinqing. Steering halo-chaos and exploring network science[M]. Beijing: China Atomic Energy Press, 2008: 139-168.
- [9] 方锦清, 李永. 网络科学中统一混合理论模型的若干研究进展[J]. 力学进展, 2008, 38(6): 663-678.
Fang Jinqing, Li Yong. Advances in Unified Hybrid Theoretical Model of network science[J]. Advances in Mechanics, 2008, 38(6): 663-678.
- [10] Fang J Q, Li Y. Transition features from Simplicity-universality to complexity-diversification under the UHNM-VSG[J]. Communications in Theoretical Physics. 2010, 53(2): 389-398
- [11] 方锦清. 多层超网络探索中的若干问题与思考[J]. 科技导报, 2017, 35(14): 33-41.
Fang Jinqing. Some problems and thinking on the exploration of multi-layer super network[J]. Science & Technology Review, 2017, 35(14): 33-41.
- [12] 刘强, 方锦清. 李永. 500强企业高科技超网络[J]. 科技导报, 2017, 35(14): 42-49.
Liu Qiang, Fang Jinqing, Li Yong. China's Top 500 enterprises High-Tech Supernetwork[J]. Science & Technology Review, 2017, 35(14): 42-49.
- [13] Li Yong, Fang Jinqing, Bi Qiao, et al. Entropy characteristic on harmonious unifying hybrid preferential networks[J]. Entropy, 2007, 9(2): 73-82.
- [14] Li Yong, Fang Jinqing, Liu Qiang. Relationship between entropy and hybrid ratios for unified hybrid network with variable speed growth[J]. Journal of Shanghai Normal University, 2016, 45(3): 298-304.
- [15] 毕桥, 方锦清. 网络科学与统计物理方法[M]. 北京: 北京大学出版社, 2011: 86-109.
Bi Qiao, Fang Jinqing. Network science and statistical physics[M]. Beijing: Beijing University Press, 2011: 86-109.

An entropy approach to complexity of networks generated with the unified hybrid network model: Complexity of complex systems

LI Yong, FANG Jinqing, LIU Qiang

Department of Nuclear Technology Application, China Institute of Atomic Energy, Beijing, 102413, China

Abstract Four hybrid ratios are introduced into the unified hybrid network model. They are more in line with the randomness, the uncertainty and the variable growing in the real world network. This paper discusses three types of entropy of complex networks: the Boltzmann-Gibbs entropy (BGS), the extensive entropy S_q , and the open network entropy, as well as the relationship between the entropy and the hybrid ratios. From the essence of entropy, the function expression between the changing entropy of the network and the power-law of the scale-free network is revealed. Also the characteristics of the evolution mechanism and the complexity of the network are expounded.

Keywords unified hybrid network theory models; three types of entropy; hybrid ratios

(责任编辑 傅雪)