

多层网络上的逾渗相变

李明¹, 汪秉宏²

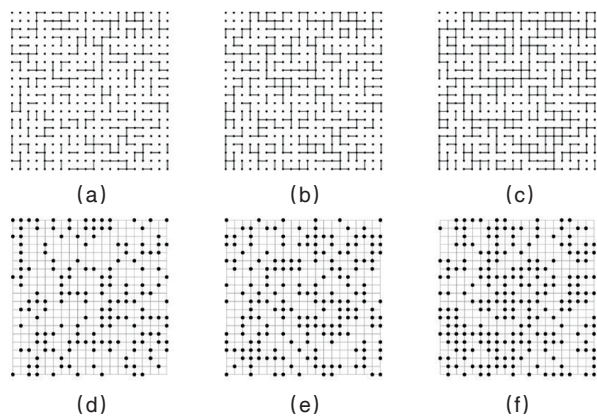
1. 中国科学技术大学工程科学学院, 合肥 230026

2. 中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026

摘要 逾渗模型的机制虽然简单,但是它涉及到统计物理与非线性物理中的众多理论与问题,在一些网络化的自然、技术与社会系统中,逾渗模型都得到成功应用。近年来,为了刻画更为复杂的相互作用系统,多层网络的概念被提出。而相应系统上的逾渗问题研究,也进一步引起研究人员关注。在这些研究中,逾渗模型不但成功解决了一些现实问题,其本身也展现出一些新现象,例如不连续相变。本文介绍了多层网络上逾渗模型的基本机制及相关连通性的度量,讨论了其中不连续相变的涌现与系统维度的关系,并对相关理论解析方法做简单介绍。

关键词 逾渗; 复杂网络; 相变

逾渗模型作为一个经典统计物理模型,关注于随机几何结构系统中一些特殊物理性质的涌现问题^[1-2]。如图1所示,以二维格子网络为例。假设系统中相邻的节点以概率 P 相连,在逾渗理论中 P 一般称为边占据概率。对于不同的占据概率 P ,系统中将呈现出不同的节点连接集团,这些集团称为分支,它们的大小(节点数)与拓扑结构即逾渗理论所关注的问题。一般地,当 P 超过一个阈值 P_c ,系统中将会出现一个特

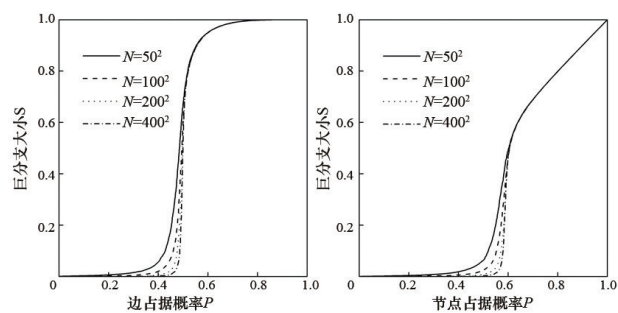


注:(a)~(c)键逾渗,从左至右边占据概率依次为 $P=0.3, 0.4, 0.5$ 。(e)~(f)座逾渗,从左至右边占据概率依次为 $P=0.4, 0.5, 0.6$ 。图中未占据的节点与边均未画出。

图1 逾渗模型示意

Fig. 1 Percolation configurations for small systems

殊的分支,其包含的节点数与系统的总节点数处于同等量级。这个分支一般称为巨分支(giant component),而 P_c 称为逾渗阈值或逾渗相变临界点。为了描述这个巨分支的涌现,一般使用序参量 $S = \lim_{N \rightarrow \infty} n/N$ 来展示逾渗相变。这里, N 为系统总节点数, n 为系统中最大分支所包含的节点数。显然,在 P 小于临界点 P_c 时,最大分支包含的节点数 n 始终远小于系统大小 N ,所以在热力学极限下,此时序参量 S 始终等于0;当 P 大于临界点 P_c 时,巨分支包含有与系统大小同量级的节点数,所以 $0 < S < 1$ 。图2给出了相应的模拟结果。可以看到随



(a) 键逾渗

(b) 座逾渗

注:图中结果为100次模拟的平均值。

图2 不同尺度逾渗模型的模拟结果

Fig. 2 Simulation results of percolation model for different system sizes

收稿日期:2017-03-30;修回日期:2017-06-16

项目基金:国家自然科学基金青年科学基金项目(61503355)

作者简介:李明,副研究员,研究方向为统计物理、复杂网络与复杂系统,电子信箱:minglichn@ustc.edu.cn;汪秉宏,教授,研究方向为统计物理、非线性动力学、复杂网络与复杂系统、经济物理学、交通流理论,电子信箱:bhwang@ustc.edu.cn

引用格式:李明,汪秉宏. 多层网络上的逾渗相变[J]. 科技导报, 2017, 35(14): 50-55; doi: 10.3981/j.issn.1000-7857.2017.14.006

着系统尺度的增大,模拟结果逐渐趋近于理论结果。

以上所述的逾渗模型通常称为键逾渗(bond percolation),与之相对的有座逾渗(site percolation)。仍以二维格子系统为例。如图1所示,以概率 $1-P$ 删除系统中的节点,即以概率 P 保留节点。此时, P 称为节点占据概率。类似于键逾渗,随着占据概率 P 的增加,剩余的(占据的)节点中也同样会涌现出一个巨分支,此即座逾渗。

无论是键逾渗还是座逾渗,在临界点附近巨分支都具有分形结构。利用实空间重整化或对偶变换,研究人员已经得到键逾渗模型的临界点为 $P_c=1/2^{[1-3]}$ 。而座逾渗至今没有精确解,研究人员利用不同的模拟方法得到了精确度不同的临界点值,例如文献[4]中给出 $P_c=0.59274621(13)$,文献[5]中给出 $P_c=0.5927465(4)$ 。作为相变模型,逾渗理论的研究关注于临界点附近一些物理性质的涌现,即临界现象与标度行为。例如,序参量 S 在临界点附近有标度关系 $S \propto (P-P_c)^\beta$ 。这里 β 即临界指数,其值与系统的维度有关,对于图1所示的二维系统有 $\beta=5/36$ 。

逾渗模型的研究不仅限于图1所示的二维格子,在其他系统中也得到广泛的应用与研究。例如,三角形格子、六边形格子、三维格子等。而作为更一般的形式,逾渗理论也在不规则网络系统中得到成功的应用,如生物系统、社会系统、计算机网络等。例如,将键逾渗的边占据概率理解为疾病传播概率,那么键逾渗模型就可以用来研究疾病或计算机病毒传播^[6-7]。又如,将座逾渗的节点删除概率理解为节点故障的概率,则座逾渗模型就可以用来研究网络系统的鲁棒性^[8-10]。在这些问题的研究中,逾渗模型以其简单的规则,成功地解决了众多复杂的实际问题。与此同时,不规则结构的引入也推进了逾渗理论的发展。这些网络系统中的逾渗,一般统称为网络逾渗。

近年来,人们开始更多地关注不同网络系统间的相互作用。例如,疾病或信息如何从一个网络传到另一个网络、电力网络的故障怎样影响通信网络、线上的舆论传播怎样影响线下人们活动等。伴随着这些研究,多层网络的概念被提了出来^[11]。简单地说,多层网络即是一组节点可以拥有多组不同的连接关系,例如,微信或者邮件通信网络与实际人际关系网络。一般地,各层网络的节点并不一定都完全相同,各层网络也可以拥有自己专属的节点。另外,有时也将由若干独立的网络相互连接所构成的网络系统称为多层网络。这种网络系统更类似于一个具有社团结构的大网络系统,本文所讨论的多层网络不包括这种网络。逾渗模型以其简单的机制,在多层网络的研究中得到了广泛的应用。多层网络的相互作用机制,也使得逾渗模型产生了新现象。以下对这些新发现做一个简明的介绍:先给出多层网络与相关概念,之后将分为规则与不规则多层网络两部分对相关逾渗模型进行介绍,最后进行总结与展望。

1 多层网络与相关定义

1.1 多层网络的概率

多层网络由1组节点与多组连边构成。同时,也可以将各层分别看做1个网络,然后在这些网络的节点之间建立一对一的依存关系。用 A^l 表示第 l 层网络的邻接矩阵。其矩阵元 $a_{ij}^l=1$ 表示节点 i 与 j 在 l 层有连边, $a_{ij}^l=0$ 则表示节点 i 与 j 在 l 层无连边。这样,同一个节点在不同层可以有不同的度 $k_i^l=\sum_j a_{ij}^l$ 。用 P_k^l 表示节点在第 l 层的度分布。一般地,一对节点可能同时在多层中都相连,这些连边称为重叠边。显然,若所有连边重叠,则多层网络退回经典单层网络(图3)。

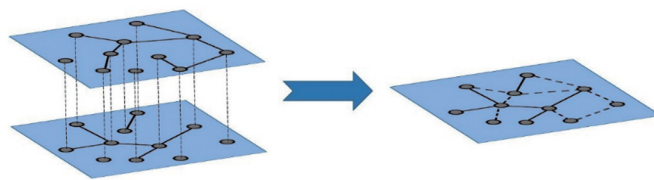


图3 多层网络示意

Fig. 3 A schematic diagram of multilayer network

1.2 多层网络上的连接集团

逾渗模型探究的是网络中节点的连接特性。对于多层网络,系统中同时存在多种连边。因此,在考察多层网络的逾渗问题时,就有多种连接的定义。这里介绍2种常用定义。

首先,不区分层,在任一层有连边的1对节点都认为是相连的。此种定义常用在多层网络的传播动力学研究中。因为在传播过程中,通过任一层传播的效果往往相同,即传播成功或不成功。而需要关注的最终是最终染病或者最终得到相应信息的人数。对于这类情形,一般可将各层网络的边映射到1个网络以便进行研究。需要注意的是,不同层的传播概率(边占据概率)可能并不相同,所以这种情况也并不能完全等效于单层网络的传播问题(逾渗问题)。

另一种常用的连接称为交互连接(mutual connection)。对于这种连接,需要同时保证节点在各层中都是连通的,才认为节点是连通的。如果两个节点处于同一个交互连接分支,那么在各层中它们必须只通过属于这个交互分支的节点而相互到达。这种连通集团常用来考察各层相互依赖的耦合系统。例如,一层供能另一层通信控制的双层电力与控制系统。对于这种系统,处于同一集团的节点必须同时可以相互通信与供能。此种连接与单一网络的连接有很大不同,考虑此种连接的多层网络逾渗,也会出现很多新现象。

2 多层格子网络的逾渗

首先介绍由二维格子网络相互叠加而构成的多层格子网络上的逾渗问题^[12]。如图4所示,如果简单地将相同位置

的节点一一对应,则得到的系统与单层格子网络结构完全相同。所以,研究中常引入距离 r 来描述叠加过程中的对应关系。对应节点只能在距离 r 内随机选择。对于 $r=0$,系统等价于单层格子网络。而 r 无限大时,则完全随机对应。

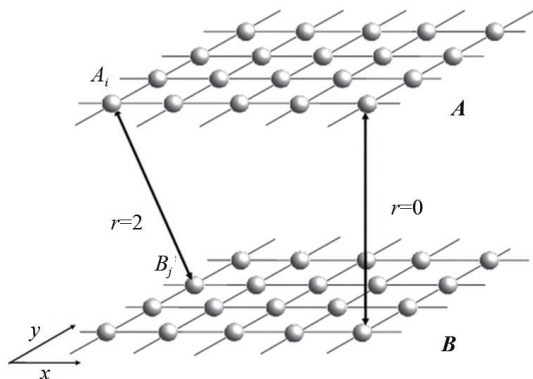
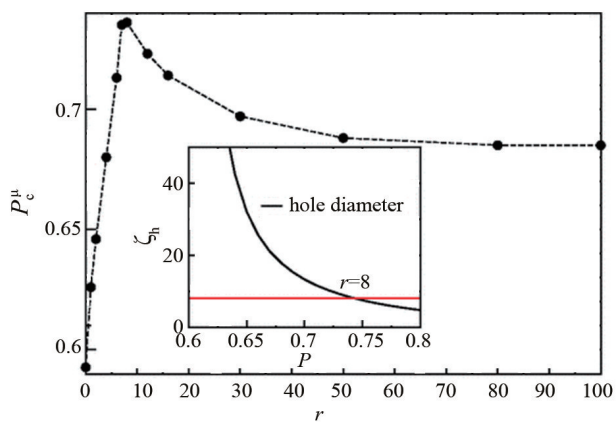


图4 双层格子网络示意^[12]

Fig. 4 A multilayer network composed of two square lattices^[12]

如图5所示,研究发现逾渗临界点 P_c 在 $r=8$ 时取最大值。为表述方便,此距离称为 $r_{\max}$ 。当 $r < r_{\max}$ 时,系统展现出与经典逾渗相同的连续相变,且逾渗临界点随着 r 的减小而减小;而当 $r > r_{\max}$ 时,系统却展现出不连续相变,且逾渗临界点 P_c 随着 r 的增加而减小,并最终趋近于 $P_c=0.683$ 。



注:图中小图为原文讨论的另一个相关问题,这里不做讨论。

图5 双层格子网络上座逾渗临界点 P_c 与对应距离 r 关系图^[12]

Fig. 5 Relation between the critical point P_c of site percolation and the dependency length r on a two-layer square lattices^[12]

逾渗相变的临界现象与系统维度有关,而以上所分析的格子只是个二维系统。为了探究更高维度的系统性质,高维度的多层网络系统逾渗也得到研究者的关注^[13]。研究发现,对于格子维度小于6的双层格子网络中,总是存在一个大于1的距离阈值 $r_{\max}$,使得系统的逾渗临界点 P_c 取得最大值。与二

维情形类似,在 $r < r_{\max}$ 时,系统展现出连续逾渗相变;而当 $r > r_{\max}$ 时,系统展现出不连续逾渗相变。当系统维度 ≥ 6 时, $r_{\max}$ 始终等于1。也就是说,除了系统等价于单层网络的情况,其他所有情形下系统都展现出不连续逾渗相变(图6)。这一结果和随机规则图的结论相同。

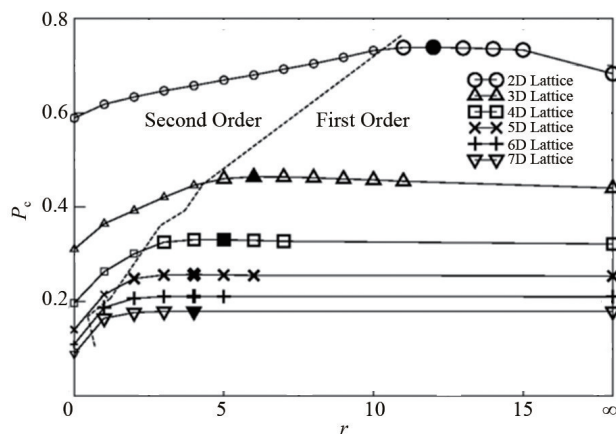


图6 高维双层格子网络上座逾渗临界点 P_c 与对应距离 r 的关系图^[13]

Fig. 6 Relation between the critical point P_c of site percolation and the dependency length r on a two-layer lattice in high dimensions^[13]

以上是多层格子网络上座逾渗问题的研究,对于多层格子网上的键逾渗也有相关研究。文献[14]研究了当 $r=0$ 时,二维双层格子网络的键逾渗问题。注意, $r=0$ 时,多层网络键逾渗并不等效于单层网络的键逾渗。此种情形更类似于单层网络上的递归逾渗(recursive percolation)^[15]。研究发现,即使考虑交互连接,这种逾渗也只能展现出连续相变。这一结果主要是由于当 $r=0$ 时,双层网络具有很高的结构相似性,考虑交互连接也不会对系统的连接有过大的影响。

3 不规则多层网络的逾渗

以上讨论的都是规则多层网络,而常见的社交与信息网络均为不规则网络。对于这些网络系统,逾渗问题也得到了广泛研究。例如,用座逾渗研究多层相依网络的鲁棒性^[16]。研究中删除比例 $1-P$ 的节点以模拟初始故障,进而考察节点的交互连通性,确定网络的功能健全与否。一般地,当交互巨分支存在则认为网络具有相关功能,否则认为网络系统已被摧毁。相应临界点越小的系统,则被认为是鲁棒性越强的系统。已有研究表明,随机多层网络往往比嵌入二维空间的网格系统更鲁棒^[17]。

不同于单层网络的逾渗,随机多层网络在删除一些节点之后,并不能直接得到网络的巨分支。研究中,常用迭代删除各层中非巨分支节点的方式,以确定最终剩余节点,即交互巨分支。这一过程也常被称为级联故障。需要注意的是,利用这种方法只能得到交互巨分支(临界点以上),而其他小

分支都将被删除。另外,通过其他算法,也可以找到网络中其他交互连接分支^[18]。

如果各层网络都是树形的,可以通过这个级联故障的过程理论上解出这个逾渗模型^[16];也可以直接考虑稳态,求解这个问题^[19-20]。这两种方法是等价的^[21-22]。下面简要介绍第2种求解方式。

显然,序参量 S 还可以表示一个节点属于巨分支的概率。为了求解 S , 引入辅助参量 R^l 用以表示沿着一条第 l 层的边可以到达交互巨分支的概率。显然,一个节点属于交互巨分支时,应当至少有一条边与其相连。假设各层间的对应都是随机的,可以列出如下方程

$$S = P \prod_l \left[1 - \sum_k P_k^l (1 - R^l)^k \right] = P \prod_l \left[1 - G_0^l(1 - R^l) \right] \quad (1)$$

$$R^l = P \left[1 - \sum_k \frac{P_k^l k}{\langle k \rangle} (1 - R^l)^{k-1} \right] \prod_{l' \neq l} \left[1 - \sum_k P_k^{l'} (1 - R^{l'})^k \right] \quad (2)$$

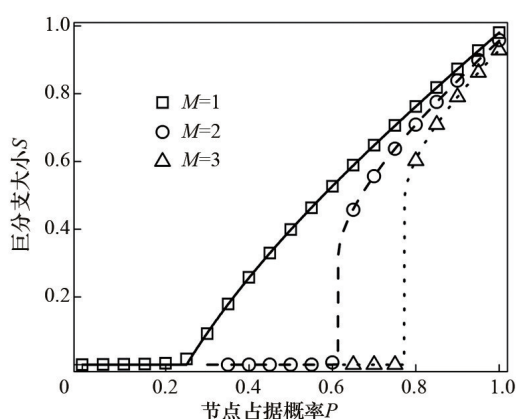
$$= P \left[1 - G_0^l(1 - R^l) \right] \prod_{l' \neq l} \left[1 - G_0^{l'}(1 - R^{l'}) \right]$$

式中, $G_0(x) = \sum_k P_k x^k$ 是网络度分布的生成函数,

$G_1(x) = \sum_k \frac{P_k k}{\langle k \rangle} x^{k-1}$ 是网络剩余度分布的生成函数。所谓剩余度分布 $\frac{P_k k}{\langle k \rangle}$, 即沿着一条边遇到的节点还剩余的边数(度)的

分布。容易知道, $(1 - R^l)^k$ 表示在第 l 层、度为 k 的节点不属于交互巨分支的概率。对于所有度或剩余度分布求平均,即可以得到相应的平均概率。根据交互巨分支的定义,这种连接条件须同时也在所有层满足。所以,上述两式中对所有网络层的这一概率进行了求积。

带入具体的度分布,就可以求出相应的多层网络逾渗的解析解。如图7所示,不同于经典的逾渗,系统会展现出不断



注:模拟中所用网络均为随机网络,其度分布满足 Poisson 分布,平均度为4。图中M为层数,散点为100次模拟的平均结果,而曲线为相应情况下式(2)与(3)所得到的理论解。

图7 多层随机网络上座逾渗模拟与理论结果对照
Fig. 7 Simulation and theoretical results for the site percolation on random multilayer networks

续相变。对式(3)在临界点展开,可以进一步得知,该相变是一个混合相变^[23-24]。这里混合相变是指序参量在临界点既有不连续的跃变,且有临界指数关系

$$S - S_c \propto (P - P_c)^\beta \quad (3)$$

式中 S_c 是序参量在临界点的值。对于单层, $S_c=0$ 。网络系统是无穷维系统,属于6维以上系统的普适类,临界指数与平均场结论吻合。对于大于2层的网络, $S_c>0$, $\beta=1/2$ 。在文献[18]与[25]中,利用蒙特卡洛模拟方法,可以更精确地找到其他一些临界指数关系。

作为更为一般的形式,各层网络的节点并不需要完全相同。如文献[26]中,假设只有比例 q 的节点会出现在所有层。然后通过调节 q , 可将多个独立的网络逐步组合为一个相互依存的多层网络。由于单层网络逾渗是连续相变,而 ≥ 2 层的多层网络逾渗是不连续相变,所以调节 q 可以使系统的相变在连续与不连续之间转换。对于这种情况的理论解,只需将式(2)与(3)中单层与多层情况按比例 q 线性叠加,即可求出相变临界点及相应相变转化点 q_c , 具体可以参考文献[26]。

此外,对于真实多层网络,各层之间连接往往会有重叠。当所有连接都重叠时,多层网络就退回到单层网络。所以,调节边重叠比例,系统也可以呈现从连续相变到不连续相变的转化^[27-28]。此外,调节各层网络对应节点的度关联也会使逾渗相变从不连续相变转化为连续相变^[29-31]。对于尺度有限且含有各种关联性的真实多层网络,利用消息传递(message passing)等方法,相关逾渗问题也得到了广泛的研究^[32-35]。对于键逾渗,也在多层网络的传播问题中得到了研究与应用^[36-38]。

4 结论

介绍了多层网络系统中的逾渗模型及其相关研究进展。一般地,多层网络上逾渗过程可以看作多个逾渗过程相互作用的结果,不同层的连边也可以表示不同意义^[39]。相应研究有时也称为网络的网络(network of networks)或相互作用网络(interacting networks)上的逾渗^[40-42]。除了本文介绍的经典逾渗模型之外,许多延伸的逾渗模型也在多层网络上得到研究,例如 k 核逾渗(k -core percolation)与引导逾渗(bootstrap percolation)^[43-44]。然而,许多逾渗问题并没有完全研究清楚,例如,多层随机网络间对应距离对逾渗相变的影响,更快、更高精度的多层网络逾渗数值模拟方法等。这些都需要进一步的研究。此外,本文主要关注的是多层网络上的逾渗相变理论研究进展,多层网络的提出也给许多动力学问题提供了一个合适的平台,相关研究可以参阅文献[11]、[45]~[47]。

参考文献(References)

- [1] Stauffer D, Aharony A. Introduction to percolation theory[M]. Boca Raton, Florida USA: CRC Press, 1994.
- [2] Christensen K, Moloney N R. Complexity and criticality[M]. London: Imperial College Press, 2005.

- [3] Ziff R M, Scullard C R. Exact bond percolation thresholds in two dimensions[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2006, 39 (49): 15083.
- [4] Newman M E J, Ziff R M. Efficient Monte Carlo algorithm and high-precision results for percolation[J]. *Physical Review Letters*, 2000, 85 (19): 4104.
- [5] Deng Y, Blöte H W J. Monte Carlo study of the site-percolation model in two and three dimensions[J]. *Physical Review E*, 2005, 72(1): 016126.
- [6] Newman M E J. Spread of epidemic disease on networks[J]. *Physical review E*, 2002, 66(1): 016128.
- [7] Pastor-Satorras R, Castellano C, Van Mieghem P, et al. Epidemic processes in complex networks[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2015, 87 (3): 925.
- [8] Cohen R, Erez K, Ben-Avraham D, et al. Resilience of the internet to random breakdowns[J]. *Physical Review Letters*, 2000, 85(21): 4626.
- [9] Cohen R, Erez K, Ben-Avraham D, et al. Breakdown of the internet under intentional attack[J]. *Physical Review Letters*, 2001, 86(16): 3682.
- [10] Cohen R, Havlin S. *Complex networks: Structure, robustness and function*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [11] Boccaletti S, Bianconi G, Criado R, et al. The structure and dynamics of multilayer networks[J]. *Physics Reports*, 2014, 544(1): 1-122.
- [12] Li W, Bashan A, Buldyrev S V, et al. Cascading failures in interdependent lattice networks: The critical role of the length of dependency links[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 108(22): 228702.
- [13] Lowinger S, Cwlich G A, Buldyrev S V. Interdependent lattice networks in high dimensions[J]. *Physical Review E*, 2016, 94(5): 052306.
- [14] Son S W, Grassberger P, Paczuski M. Percolation transitions are not always sharpened by making networks interdependent[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107(19): 195702.
- [15] Liu X W, Deng Y, Jacobsen J L. Recursive percolation[J]. *Physical Review E*, 2015, 92(1): 010103.
- [16] Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, et al. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks[J]. *Nature*, 2010, 464(7291): 1025-1028.
- [17] Bashan A, Berezin Y, Buldyrev S V, et al. The extreme vulnerability of interdependent spatially embedded networks[J]. *Nature Physics*, 2013, 9(10): 667-672.
- [18] Grassberger P. Percolation transitions in the survival of interdependent agents on multiplex networks, catastrophic cascades, and solid-on-solid surface growth[J]. *Physical Review E*, 2015, 91(6): 062806.
- [19] Son S W, Bizhani G, Christensen C, et al. Percolation theory on interdependent networks based on epidemic spreading[J]. *Europhysics Letters*, 2012, 97(1): 16006.
- [20] Feng L, Monterola C P, Hu Y. The simplified self-consistent probabilities method for percolation and its application to interdependent networks[J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(6): 063025.
- [21] 李明. 网络逾渗与级联故障[D]. 合肥: 中国科学技术大学近代物理系, 2014.
Li Ming. Network percolation and cascading failures[D]. Hefei: Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, 2014.
- [22] Li M, Wang B H. Percolation on networks with dependence links[J]. *Chinese Physics B*, 2014, 23(7): 076402.
- [23] Baxter G J, Dorogovtsev S N, Goltsev A V, et al. Avalanche collapse of interdependent networks[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109 (24): 248701.
- [24] Zhou D, Bashan A, Cohen R, et al. Simultaneous first- and second-order percolation transitions in interdependent networks[J]. *Physical Review E*, 2014, 90(1): 012803.
- [25] Lee D, Choi S, Stippinger M, et al. Hybrid phase transition into an absorbing state: Percolation and avalanches[J]. *Physical Review E*, 2016, 93(4): 042109.
- [26] Parshani R, Buldyrev S V, Havlin S. Interdependent networks: Reducing the coupling strength leads to a change from a first to second order percolation transition[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105(4): 048701.
- [27] Cellai D, López E, Zhou J, et al. Percolation in multiplex networks with overlap[J]. *Physical Review E*, 2013, 88(5): 052811.
- [28] Hu Y, Zhou D, Zhang R, et al. Percolation of interdependent networks with intersimilarity[J]. *Physical Review E*, 2013, 88(5): 052805.
- [29] Parshani R, Rozenblat C, Ietri D, et al. Inter-similarity between coupled networks[J]. *Europhysics Letters*, 2011, 92(6): 68002.
- [30] Valdez L D, Macri P A, Stanley H E, et al. Triple point in correlated interdependent networks[J]. *Physical Review E*, 2013, 88(5): 050803.
- [31] Bianconi G, Dorogovtsev S N. Multiple percolation transitions in a configuration model of a network of networks[J]. *Physical Review E*, 2014, 89(6): 062814.
- [32] Radicchi F. Percolation in real interdependent networks[J]. *Nature Physics*, 2015, 11(7): 597-602.
- [33] Bianconi G, Radicchi F. Percolation in real multiplex networks[J]. *Physical Review E*, 2016, 94(6): 060301.
- [34] Watanabe S, Kabashima Y. Cavity-based robustness analysis of interdependent networks: Influences of intranetwork and internetwork degree-degree correlations[J]. *Physical Review E*, 2014, 89(1): 012808.
- [35] Cellai D, Dorogovtsev S N, Bianconi G. Message passing theory for percolation models on multiplex networks with link overlap[J]. *Physical Review E*, 2016, 94(3): 032301.
- [36] Hackett A, Cellai D, Gómez S, et al. Bond percolation on multiplex networks[J]. *Physical Review X*, 2016, 6(2): 021002.
- [37] Bianconi G. Epidemic spreading and bond percolation in multilayer networks[J]. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 3, 2017, 3(3): 034001.
- [38] Li M, Liu R R, Peng D, et al. Channel is more important than effectiveness in spreading dynamics on multiplex networks[J]. *arXiv preprint arXiv*, 2016: 1604.05209.
- [39] Parshani R, Buldyrev S V, Havlin S. Critical effect of dependency groups on the function of networks[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2011, 108(3): 1007-1010.
- [40] Gao J, Buldyrev S V, Havlin S, et al. Robustness of a network of networks[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107(19): 195701.
- [41] Gao J, Buldyrev S V, Stanley H E, et al. Percolation of a general network of networks[J]. *Physical Review E*, 2013, 88(6): 062816.
- [42] Gao J, Buldyrev S V, Stanley H E, et al. Networks formed from interdependent networks[J]. *Nature physics*, 2012, 8(1): 40-48.
- [43] Azimi-Tafreshi N, Gómez-Gardenes J, Dorogovtsev S N. *K*-core percolation on multiplex networks[J]. *Physical Review E*, 2014, 90(3): 032816.
- [44] Brummitt C D, Lee K M, Goh K I. Multiplexity-facilitated cascades in networks[J]. *Physical Review E*, 2012, 85(4): 045102.
- [45] Gao J, Li D, Havlin S. From a single network to a network of networks

- [J]. National Science Review, 2014, 1(3): 346–356.
- [46] Kivelä M, Arenas A, Barthelemy M, et al. Multilayer networks[J]. Journal of complex networks, 2014, 2(3): 203–271.
- [47] Danziger M M, Bashan A, Berezin Y, et al. An introduction to interdependent networks[J]. Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, 2014, 438: 189–202.

Percolation transition on multilayer networks

LI Ming¹, WANG Binghong²

1. School of Engineering Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

2. Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

Abstract The percolation model describes the emergence of a giant component in a system, of which the sites are connected randomly with some mechanisms. Although the rule is very simple, the percolation model involves many concepts of statistical physics and nonlinear physics, and has also been applied to a large variety of natural, technological and social systems, most of which can be viewed as networks. In recent years, a new kind of networks, the multilayer networks, have been proposed to study the complex and interacting systems. Based on the percolation in these networks, a number of natural, technological and social problems have been solved. At the same time, the percolation transition itself also has some new properties, such as the discontinuous transition. This paper analyzes the mechanism of the percolation on multilayer networks first, and then briefly discusses the discontinuous transition in this model. Furthermore, the theoretical methods are also be reviewed.

Keywords percolation; multilayer networks; phase transition

(编辑 王志敏)