

页岩油气水力压裂的关键力学问题和数值计算方法

李明耀¹, 贺甲元², 苏业旺¹

1. 中国科学院力学研究所, 非线性力学国家重点实验室, 北京 100190

2. 中国石化石油勘探开发研究院, 北京 100083

摘要 论述了水力压裂过程中裂缝面内压力引起的岩石变形、裂缝的起裂和扩展、裂缝内流体的流动和流固耦合等关键力学问题, 综述了用于模拟水力压裂的有限元法、扩展有限元法、边界元法、离散元法及其他相关数值计算方法的基本原理、研究进展和发展趋势, 分析了各方法的优点及适用性。

关键词 水力压裂; 数值计算方法; 断裂力学; 裂缝扩展

近年来, 水力压裂作为一种常规技术被广泛应用于油气工业, 尤其在页岩气的开采中起到了至关重要的作用, 水力压裂技术的发展直接影响着非常规油气工业的产量和经济效益。实现高效准确地预测水力压裂过程, 对充分理解和掌握其中关键力学问题、发展和创新更先进的水力压裂技术, 提高油气工业的效率和产量均有着极其重要的意义^[1-2]。

水力压裂过程十分复杂, 涉及到流体压力引起的固体变形、裂缝起裂和扩展、裂缝内流体流动和流固耦合等关键力学问题。在工程实际中, 天然裂缝、岩层非均质性、地应力分布、流体滤失、支撑剂运移和裂缝闭合等现象及其相互作用使得水力压裂过程更加复杂^[3-5]。高效准确地预测水力压裂过程也成为自 20 世纪中期以来重要的研究课题^[6-10]。随着计算机水平的发展, 采用数值方法模拟是研究具有复杂力学机制的水力压裂过程的有效手段。由于水力压裂问题涉及流体在裂缝内的流动和裂缝增长之间的强非线性耦合过程及复杂的工程问题, 水力压裂数值模拟面临着极大的挑战^[11-16]。

基于不同的力学机理和模型, 水力压裂数值计算方法在过去几十年间从二维到三维得到了巨大的发展, 包括基于连续介质力学方法的有限元法 (FEM)^[17-30]、扩展有限元法 (XFEM)^[31-36]、边界元法 (BEM)^[37-40]、基于非连续介质力学的离散元法 (DEM)^[41-47] 以及近年来发展出的离散缝网模型 (DFN)^[48-53]、数值流形法 (NMM)^[54-56] 和相场法 (PFM)^[57-60] 等。

传统的有限元法能有效地模拟裂缝在非均质岩石中的扩展, 在解决非线性问题和复杂受力状态问题方面具有极大的优势, 大量基于有限元法的数值模型被用来研究水力压裂问题。传统有限元法通过将裂缝设为单元的边界, 裂缝尖端设为单元节点, 采用重新划分网格的方式实现裂缝在计算域内的动态扩展, 但网格重构极大的影响了算法的效率。扩展有限元法在标准有限元的框架内通过阶跃函数增加不连续界面的自由度, 实现了利用独立裂缝的网格模拟裂缝的扩展, 避免了重新划分网格, 减轻了对计算资源的要求, 提高了计算效率, 近年来逐渐被广泛用于水力压裂的研究。边界元法只需划分结构边界和不连续界面, 具有单元个数少、计算资源消耗少且效率高等优势。位移不连续法作为一种非直接的边界元法, 在处理裂缝扩展问题时不需要重新划分网格, 裂缝尖端可通过高阶位移不连续单元来处理, 但在求解非线性问题时, 存在数值求解不稳定等问题。离散元法的优势在于处理不连续、分区域的结构, 主要通过不同单元体之间的接触和相互影响来描述结构的不连续性, 在处理多裂缝、天然裂缝、多层岩理结构等方面具有优势。

从数值计算方法的角度, 每种方法在其适用领域具有特定的优势, 研究具有复杂力学机制的水力压裂过程需要从力学机理出发, 结合算法的优势建立最优化的数值模型。本文针对水力压裂技术的关键力学问题, 分析和对比不同数值计算方法的优点和适用性。

收稿日期: 2016-01-06; 修回日期: 2016-08-22

基金项目: 中国科学院“百人计划”项目

作者简介: 李明耀, 博士后, 研究方向为多尺度岩土本构理论和数值方法, 电子邮箱: mingyao.li@imech.ac.cn; 苏业旺 (通信作者), 研究员, 研究方向为页岩气开采中的关键力学问题, 电子邮箱: yewangsu@imech.ac.cn

引用格式: 李明耀, 贺甲元, 苏业旺. 页岩油气水力压裂的关键力学问题和数值计算方法[J]. 科技导报, 2016, 34(23): 32-42; doi: 10.3981/j.issn.1000-7857.2016.23.003

1 水力压裂关键力学问题及理论模型

水力压裂过程十分复杂(图1),其关键力学问题涉及缝内流体压力作用下的固体变形、裂缝的起裂和扩展、缝内流体的流动和流固耦合等。

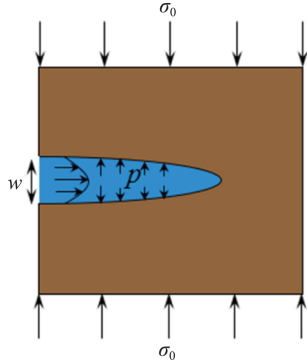


图1 水力压裂问题示意

Fig. 1 Sketch of hydraulic fracture

1.1 固体变形

水力压裂过程中岩体的变形主要由注入流体的压力作用在裂缝面引起,流体压力可作为求解固体变形的边界条件。岩体材料的本构关系主要采用线弹性理论,也有学者采用弹塑性理论和损伤理论等^[61-63],除此以外,基于Biot模型的多孔线弹性理论也被广泛用于模拟水力压裂问题^[64-67]。

在线弹性均质岩石材料的二维水力压裂中(图1),流体沿左侧注入裂缝,流体压力 p 作用在裂缝面上引起固体变形,采用线弹性理论建立裂缝宽度 w 和流体压力 p 的关系,描述固体模型的控制方程包括

$$\text{平衡方程} \quad \nabla \cdot \sigma = 0 \quad (1)$$

$$\text{几何关系} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (2)$$

$$\text{本构方程} \quad \sigma = C : \varepsilon \quad (3)$$

$$\text{和边界条件} \quad \sigma : nn = p \quad (4)$$

式中, σ 、 ε 和 u 分别表示应力、应变和位移, C 表示弹性系数张量, n 表示裂缝面法向向量。

裂缝上下表面位移差所产生的裂缝宽度为:

$$w = u^+ - u^- \quad (5)$$

式中, u^+ 和 u^- 表示裂缝两侧表面位移。

1.2 裂缝扩展

岩体的变形在高压流体持续作用下会引起裂缝起裂和扩展,目前广泛采用的理论包括线弹性断裂力学理论、内聚力模型和连续损伤力学理论等。线弹性断裂力学理论主要通过裂缝尖端的应力强度因子与岩体韧性强度作为判断裂缝开裂的条件,对于延性材料需进一步处理裂缝尖端效应。内聚力模型通过牵引分离准则描述材料的裂缝开裂和扩展,能很好处理缝尖塑性区,但必须预先设定裂缝扩展路径,不能预测裂缝在复杂受力状态下的扩展方向。连续损伤力学通过引入一个损伤参数来模拟材料力学性质在受力状态下的衰退从而模拟裂缝的起裂和扩展。

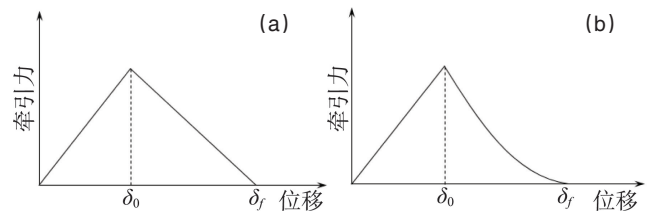
1) 线弹性断裂力学理论。根据线弹性断裂理论,裂缝扩展发生在裂缝尖端的应力强度因子达到材料的断裂韧性:

$$K_I = K_{IC} \quad (6)$$

式中, K_I 表示I型应力强度因子, K_{IC} 代表材料的韧性强度。

线弹性断裂理论中裂缝尖端问题,有大量的文献研究在不同受力状态下的开裂、应力强度因子的渐进解、裂缝扩展大小和方向等,不同的数值计算方法有不同的处理方法。

2) 内聚力模型。对于延性和颗粒型岩石,相比于线弹性断裂理论,内聚力模型能够更好地描述裂缝尖端产生的塑性区,从而处理裂缝尖端效应和界面断裂等现象。内聚力模型通过预定内聚力单元作为裂缝路径,内聚单元受力状态达到破坏条件后裂缝按照预定牵引分离准则开始起裂和扩展^[68]。典型内聚力单元的线性和非线性牵引分离法如图2所示。



δ_0 和 δ_f 分别为裂缝萌生位移和单元失效位移

图2 典型内聚力单元的线性(a)和非线性牵引分离法(b)

Fig. 2 Typical linear (a) and nonlinear (b) traction-separation evolution law of cohesive elements

内聚力模型在牵引分离法中引入渐进式破坏,常用的损伤起始准则有最大应力准则、最大应变准则、二次应力准则和二次应变准则,此处给出二次应力准则,即名义应力之间比值的二次函数达到临界值时损伤发生,准则可表述为^[69]:

$$\left(\frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0}\right)^2 + \left(\frac{t_s}{t_s^0}\right)^2 + \left(\frac{t_t}{t_t^0}\right)^2 = 1 \quad (7)$$

式中, t_n 、 t_s 和 t_t 分别代表法向拉力和两个剪拉力; t_n^0 、 t_s^0 和 t_t^0 分别表示相应方向的拉伸强度和剪切强度。 $\langle \cdot \rangle$ 是Macaulay符号,此处表示纯压缩变形或应力状态不引起损伤起裂。

在流体压力作用下内聚力单元的应力状态满足上述准则时,单元开始出现断裂,根据牵引分离法,内聚力单元开始分离,裂缝开始扩展。内聚力模型被广泛用于模拟时效性裂缝扩展问题,由于内聚力模型必须预先给定裂缝扩展的路径,因此不能预测复杂受力状态下裂缝的扩展方向。

3) 连续损伤理论。连续损伤力学通过引入一个损伤参数来模拟材料力学性质在受力状态下的衰退从而模拟裂缝的扩展。损伤的程度决定了裂缝起裂、扩展和闭合等现象,在一定程度上能够预测复杂受力状态下裂缝扩展的方向、宽度等。对于非均质材料需要增加损伤参数指数来模拟各向异性损伤现象,另外,为了描述损伤的起裂、扩展及其损伤附近的特征,需要更优化的网格来描述,在一定程度上需要更

多的计算资源^[70-71]。

1.3 缝内流体流动

对于缝内流体的流动,通常采用流体流动润滑理论,通过建立流体流动速度、裂缝宽度和压力空间梯度的非线性偏微分方程来描述,具体为泊肃叶定律^[66]:

$$q = -\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (8)$$

式中, q 为流量, $\partial p / \partial x$ 为流体压力梯度, w 为裂缝宽度, μ 为流体动力粘度系数。

缝内流体流动连续性方程为:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + (q_l + q_b) = Q(t) \delta(x, y) \quad (9)$$

式中, $Q(t)$ 为流体注入率, $\delta(x, y)$ 为狄拉克函数。 q_l 和 q_b 为流体渗漏进入裂缝两侧表面的法向流率,也就是流体通过断裂面进入岩体的渗流量。

渗流量与裂缝内流体压力的关系为^[72-75]:

$$q_l = c_l(p - p_l), q_b = c_b(p - p_b) \quad (10)$$

式中, p_l 和 p_b 分别表示断裂面上表面和下表面的孔隙压力, c_l 和 c_b 分别代表对应的流体渗漏系数。

对于不可渗透性岩体可忽略渗漏现象,渗流量 $q_l = q_b = 0$ 。在不考虑渗漏现象的情况下,将流体流动方程代入流体连续性方程,可得到缝内流体流动的全局连续性方程:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (11)$$

上述分析基于假设流体完全充满裂缝,裂缝尖端和流体前沿完全重合。Lecampion 等^[38]、Garagash^[67]利用独立的网格分别描述缝尖和流体前沿研究了流体滞后现象。

1.4 流固耦合

在进行水力压裂时,随着注入流体不断增多,流体压力不断增加,裂缝面的压力相应增大,岩体的受力状态相应变化,裂缝出现起裂和扩展。相应地,岩体受力状态和结构的变化反过来影响流体的流动和压力的变化。因此,水力压裂过程是流体流动和岩体变形之间互相影响动态耦合过程。

根据虚功原理,对于求解域 Ω 中任一时刻,联立上述固体控制方程组和边界条件(公式(1)~(5))可推出固体平衡方程的弱形式:

$$\int_{\Omega} \sigma : \delta \varepsilon d\Omega - \int_{\Gamma} t \cdot \delta u d\Gamma - \int_{\Gamma_c} p \delta w d\Gamma = 0 \quad (12)$$

式中, t 是 Γ 面上的给定面力, p 是裂缝面 Γ_c 上作用的流体压力, δu 和 $\delta \varepsilon$ 分别是虚位移和虚应变。

同理,缝内流体连续性方程的弱形式可表达为:

$$\int_{\Omega} \delta p \frac{\partial w}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \nabla(\delta p) d\Omega = 0 \quad (13)$$

式中, δp 是任意允许的试探函数。

式(12)和(13)描述了最基本的水力压裂过程,在通过数值计算方法模拟水力压裂问题时,可通过求解方程(12)和(13)的耦合形式实现。如最经典的有限元法,通过空间离散化引入插值函数得到方程的离散形式。当使用隐式求解时,

方程被写成时间增量形式(如向后有限差分法)求解。水力压裂问题是强非线性问题,有限元法通过使用 Newton-Raphson 迭代法最终求解。

在基本方程(12)和(13)的基础上,通过引入不同的理论与数值模型,可以研究水力压裂过程中涉及的其他问题,如裂缝扩展、滤失、流体滞后、支撑剂运移、岩层非均质性及天然裂缝等对水力压裂过程的影响等。针对这些关键力学问题,发展了大量的数值计算方法以实现对水力压裂过程的模拟和预测,例如有限元法、扩展有限元法、离散元法、位移不连续法、界面元法等。

2 水力压裂数值计算方法

水力压裂过程是流体流动和岩体变形之间互相影响动态耦合的过程,利用数值计算方法模拟水力压裂过程,需要通过求解岩体的平衡方程和流体流动方程构成的耦合方程组来实现。

传统有限元法基于强大的理论基础和商业化软件在处理非线性问题上的优势,成为水力压裂数值计算方法中强有力的工具。扩展/广义有限元法克服了传统有限元法在处理裂缝扩展的不连续移动界面需重构网格的缺点,实现了高效模拟水力压裂裂缝扩展问题。由于仅需要对结构边界和不连续界面进行网格划分,边界元法和位移不连续法结合线弹性断裂力学理论作为最常见的方法被广泛用于模拟水力压裂问题。离散元法处理不连续问题的优势使得水力压裂问题中天然裂缝、岩层不均质等问题得到高效的解决。除此以外,还有大量针对不同情况下的水力压裂数值计算方法。为了更好的利用这些数值计算方法,实现高效、准确地模拟和预测,本节将分析、对比各种数值计算方法的优缺点及其适用性,为水力压裂技术的选择、设计和改进提供理论支持和指导。

2.1 有限元法(finite element method, FEM)

根据有限元法基本理论,在分析水力压裂问题时,首先要对计算域进行空间离散化,在每个单元上得到离散化单元的位移函数和压力函数。通过几何方程和材料本构关系推出和位移相应的应力函数,将离散化后的应力函数和压力函数带入固体平衡方程和流体流动润滑方程,最终推导出水力压裂耦合方程组的有限元格式。

根据有限元原理,对上述水力压裂固体平衡方程(12)和流体连续性方程(13)在求解域内进行空间离散化,可得到单元位移函数和单元压力函数:

$$u = \sum_{i=1}^N N_i^u \hat{u}_i, \quad \delta u = \sum_{i=1}^N N_i^u \delta \hat{u}_i \quad (14)$$

$$p = \sum_{i=1}^N N_i^p \hat{p}_i, \quad \delta p = \sum_{i=1}^N N_i^p \delta \hat{p}_i \quad (15)$$

式中, N_i^u 、 N_i^p 分别表示位移和压力的形函数, $\hat{u}_i$ 、 $\hat{p}_i$ 分别为节点位移和节点压力。

通过对裂缝宽度 w 在空间上离散化可以得到:

$$w = \sum_{i=1}^N N_i^w \hat{u}_i, \quad \delta w = \sum_{i=1}^N N_i^w \delta \hat{u}_i \quad (16)$$

流体连续性方程第一项裂缝宽度 w 和时间相关,在时间域内对其进行向后有限差分离散化可得:

$$\dot{w}_{i+\Delta t} = \frac{\hat{w}_j(t_{n+1}-t_n) - \hat{w}_j(t_n)}{t_{n+1}-t_n} \quad (17)$$

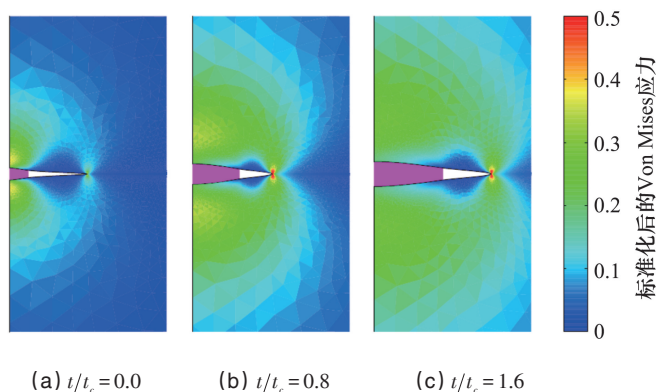
式中, N_i^w 是裂缝宽度的形函数, t_{n+1} 和 t_n 分别表示当前时刻和前一时刻, $\hat{w}_j$ 是节点第 j 个方向的裂缝宽度。

将单元位移函数、压力函数和裂缝宽度函数代入流体连续性方程,可推出第 i 个单元的连续性方程有限元形式:

$$\int_{\Omega} N_i \left(\sum_{j=1}^N N_j \frac{\hat{w}_j(t_{n+1}-t_n) - \hat{w}_j(t_n)}{t_{n+1}-t_n} \right) d\Omega + \frac{1}{12\mu} \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^N N_k \hat{w}_k \right)^3 (\nabla N_i) \nabla \left(\sum_{j=1}^N N_j \hat{p}_j \right) d\Omega = 0 \quad (18)$$

基于以上的推导,水力压裂的耦合控制方程通过在时间和空间上进行离散化,初始准静态问题在每个时间步内可以通过联立求解固体平衡方程和流体流动方程得到节点位移和节点流体压力。

Ouyang 等^[24]利用移动网格建立的自适应有限元法,描述了水力压裂过程中支撑剂的分布情况。Carrier 等^[19]在有限元法的框架内利用内聚力单元模拟了孔隙线弹性介质中水力压裂裂缝扩展问题,研究了孔隙材料的渗透性、流体粘性和渗漏等现象对水力压裂过程的影响。Hunsweck 等^[23]研究了可渗透性弹性介质中平面应变直线扩展水力压裂问题,利用有限元法考虑了流体压力和裂缝宽度之间的非线性耦合,通过分别模拟裂缝尖端和流体前沿的演化得出了流体滞后现象(图3^[23])。



(a) $t/t_c = 0.0$ (b) $t/t_c = 0.8$ (c) $t/t_c = 1.6$
 t_c 是特征时间,粉色表示流体,其余区域颜色表示平面应变模量
 标准化后的 Von Mises 应力分布

图3 有限元法模拟水力压裂及流体滞后现象时流体注入不同时刻下的岩体快照

Fig. 3 Finite element simulation of hydraulic fracturing with lag: Snapshots of the rock with the injected fluid at different times

2.2 扩展有限元法 (extended finite element method, XFEM)

和传统有限元法不同,扩展有限元法在处理不连续问题时能够通过阶跃函数近似位移的不连续性,从而使裂缝不需

要严格与单元界面和节点重合,裂缝扩展无需网格重构。这个技术极大地减少了计算资源,提高了计算效率和精度。近年来扩展有限元法逐渐被许多学者引入模拟水力压裂问题。

为了不重新划分网格,针对与裂缝相关的单元和节点,扩展有限元法引入 Heaviside 函数 $H(x)$ 和裂缝尖端近似位移函数 $F_a(x)$,分别表征不连续位移场和缝尖奇异场^[76]:

$$u = \sum_{i=1}^N N_i(x) [u_i + H(x)a_i + \sum_{a=1}^4 F_a(x)b_i^a] \quad (19)$$

式中, $N_i(x)$ 是一般的节点形函数, u_i 是和有限元解中连续性部分相关的节点位移向量, a_i 是节点富集自由度向量, $H(x)$ 是穿过裂缝界面的不连续跳跃函数。 $H(x)$ 和 a_i 的积只对被裂缝切割的单元节点的形函数有效。 b_i^a 是针对裂缝尖端的富集函数自由度向量, $F_a(x)$ 是裂缝尖渐进函数。 $F_a(x)b_i^a$ 项只对被裂缝尖端切割的节点有效。

图4为采用扩展有限元方法计算的模型,表达任意裂缝与单元及节点的关系。



图4 扩展有限元中光滑裂缝的坐标、单元与节点示意

Fig. 4 Illustration of coordinates, elements and nodes for a smooth crack with XFEM

Heaviside 阶跃函数与水平集法结合,用于判断节点相对裂缝的位置,从而描述裂缝两侧的位移场,在局部裂缝坐标系中定义跳跃函数:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x-x^*) \cdot n \geq 0 \\ -1 & (x-x^*) \cdot n < 0 \end{cases} \quad (20)$$

式中, x 是一个高斯点, x^* 是裂缝上最靠近 x 的点, n 是裂缝上点 x^* 的外法线方向。

通过建立以缝尖为原点的局部坐标系 (r, θ) , 裂缝尖在均匀弹性材料中的渐进函数 $F_a(x)$ 可以定义为:

$$F_a(x) = \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right] \quad (21)$$

式中, (r, θ) 是以裂缝尖端为原点的极坐标系。

基于以上技巧性处理,扩展有限元法无需网格和裂缝重合,裂缝扩展不再需要网格重构,极大的简化了对裂缝扩展的处理。

庄茁等^[77]在一般扩展有限元法的基础上,引入虚拟节点以简化显示方法对单元内裂缝的处理,通过使用一点积分和沙漏控制,大大提高了计算效率,并采用有限差分法模拟了缝内流体流动。在页岩水力压裂实验的基础上,利用改进后的扩展有限元法模拟了水力压裂大物模实验,取得了较好的

数值模拟结果。Taleghani^[28]利用扩展有限元法,建立了复杂水力压裂模型来处理复杂扩展条件下地应力各向异性、岩石韧性、天然裂缝强度及其方向对水力压裂过程的影响(图5^[28])。Lecampion^[31]在扩展有限元的基础上引入特殊的缝尖函数,研究了流体压力和裂缝开裂的近似。Mohammadnejad等^[32]在Biot孔隙介质理论框架下,利用扩展有限元法结合内聚力模型,研究了流体注入速率、压裂液性质、孔隙介质等引起的流体滞后现象。Wang^[35]在研究中结合扩展有限元法、内聚力模型和摩尔库仑塑性准则,分别模拟了脆性材料和延性材料中水力压裂起裂和扩展现象。研究表明,水力压裂引起的非弹性变形对扩展压力和几何形状有重大影响,对于低弹性模量的软岩在忽略延性变形的情况下,内聚力模型预测会出现较大偏差。

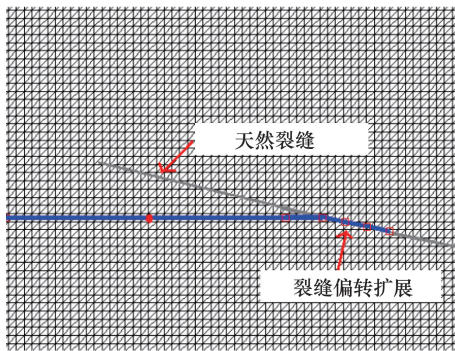


图5 扩展有限元法模拟水力裂缝和天然裂缝的相互影响

Fig. 5 XFEM simulation of the influence between hydraulic fracture and natural fracture

2.3 广义有限元法 (generalized finite element method, GFEM)

广义有限元法和扩展有限元法的原理类似,第 k 个扩展步的水力压裂固体平衡方程的弱形式表示如下^[78-79]:

$$\int_{\Omega} \sigma(u^k) : \varepsilon(v^k) d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot v^k d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{t} \cdot v^k d\Gamma + \int_{\Gamma_c^{k+}} \bar{t}^{k+} \cdot [v^k] d\Gamma \quad (22)$$

式中, Ω 和 $\partial\Omega$ 分别表示计算域及其边界, $\bar{t}$ 是 $\partial\Omega$ 界面应力, $[v^k] = v^{k+} - v^{k-}$ 表示穿过裂缝面 Γ_c^{k+} 上的虚位移, $\bar{t}^{k+}$ 是裂缝面上的应力,表示如下:

$$\bar{t}_c^{k+} = -p^k n^{k+} = p^k n^{k-} \quad (23)$$

式中, n^{k+} 和 n^{k-} 分别表示 Γ_c^{k+} 和 Γ_c^{k-} 面上的单位法向量。

广义有限元法是基于传统有限元法通过单位分解法建立新的形函数:

$$\phi_{\alpha}(x) = \varphi_{\alpha}(x) L(x) \quad (24)$$

式中, ϕ_{α} 和 φ_{α} 分别表示广义有限元、有限元的形函数, $L(x)$ 是富集函数。

区别于扩展有限元的跳跃函数,采用富集函数的广义有限元位移近似可表示为:

$$u^h(x) = \sum_{\alpha=1}^N \hat{u}_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x) + \sum_{\alpha \in I} \varphi_{\alpha}(x) \sum_{i=1}^{N_{\alpha}} \bar{u}_{\alpha i} L_{\alpha i}(x) \quad (25)$$

式中, $\hat{u}_{\alpha}$ 和 $\bar{u}_{\alpha i}$ 分别是标准有限元和广义有限元自由度, I 是

广义有限元形函数的节点集, N_{α} 是在节点 α 的富集函数数目, $L_{\alpha i}(x)$ 是富集函数^[78]。

Gupta等^[78]利用广义有限元法研究了水力压裂过程中三维任意裂缝在不同边界条件下的扩展、重新构向等问题。

2.4 边界元法 (boundary element method, BEM)

边界元法处理水力压裂问题的优势在于裂缝起裂和扩展的不连续界面问题。与有限元法相比,边界元法是只在定义域的边界或不连续界面上划分单元,通过对边界元插值离散,用满足控制方程的函数去逼近边界条件的一种数值方法。边界元法的计算模型单元个数少,计算资源大大节省,计算效率大大提高。由于边界元法利用微分算子的解析解作为边界积分方程的核函数,具有解析与数值相结合的特点,通常具有较高精度。对于边界变量变化梯度较大的问题,如边界变量出现了奇异裂缝,则边界元法更精确高效。

边界元法分为积分公式法 (integral equation approach) 和位移不连续法 (displacement discontinuity method) 两种,前者基于对已知影响函数 (格林函数) 在边界上的叠加而形成积分公式,后者从简单的系统几何方程中寻找未知边界值。一般而言,位移不连续法比积分公式法计算效率高,对于非线性问题精度更高,并被广泛用于水力压裂数值模拟。这里仅讨论位移不连续法。

位移不连续法作为边界元法的一种,首先由Crouch提出,并被广泛应用在模拟裂缝扩展问题上,其核心思想是对裂缝面进行离散化,以不连续位移为基本解,在裂缝扩展时,只需在新产生的裂缝面和裂缝尖端增加少许单元,相比于有限元法则大大减少了计算量,提高了运算效率。不连续位移表示为:

$$D_x(x) = u_x(x, 0^-) - u_x(x, 0^+) \quad (26)$$

$$D_y(x) = u_y(x, 0^-) - u_y(x, 0^+) \quad (27)$$

式中, $y=0^+$ 和 $y=0^-$ 分别表示线段的正负两侧。

为了更准确的描述裂缝尖端附近节点的位移和应力,通常采用高阶二次单元改进位移不连续函数:

$$D_i(\xi) = N_1(\xi)(D_i)_1 + N_2(\xi)(D_i)_2 + N_3(\xi)(D_i)_3 \quad (28)$$

式中, $(D_i)_{(i=x,y; j=1,2,3)}$ 表示位移不连续配置点, $N_k(\xi) (k=1,2,3)$ 表示配置点形函数,其形式可表达为

$$N_i(\xi) = a_{i1}\xi^2 + a_{i2}\xi + a_{i3}, \xi \in [-a, a] \quad (29)$$

式中, $a_{ij} (i, j=1,2,3)$ 是特征常量,可由条件 $N_i(\xi) = \delta_{ij}$ 求得。

上述描述可用于研究直线型裂缝,对于非直线型裂缝可采用线弹性断裂理论,裂缝尖端单元的位移不连续函数可表达为

$$D_i = (A_{1j} + A_{2j}\sqrt{r} + A_{3j}r)(D_i)_{(i=x,y; j=1,2,3)} \quad (30)$$

式中, A_{ij} 是相关常量, r 表示离裂缝尖的距离。

在定义了不连续位移函数之后,即可获得计算域内位移和应力的解析表达式。在水力压裂问题中,根据线弹性断裂力学理论的应力强度因子准则,裂缝的扩展可通过比较缝尖

应力强度因子和材料的断裂韧性判断。当扩展后裂缝尖端与其他裂缝或天然裂缝之间的距离小于特定值时,裂缝可以发生变向、交互等现象^[40]。

Behnia等^[40]利用边界元法的位移不连续形式,通过裂缝尖端单元和高阶边界不连续相结合的技巧,模拟了水力压裂裂缝与天然裂缝、岩石层理不连续之间的相互作用。图6^[40]给出了水力压裂裂缝和倾斜的天然裂缝之间的相互影响及平均应力分布,其中X轴和Y轴分别是最大和最小压应力方向。Sheibani^[39]利用位移不连续边界元法研究了垂直天然裂缝侧向扩展中裂缝高度的影响、水力压裂高度的增长和非平面增长路径等。Lecampion等^[38]建立了位移不连续法和隐式有限差分法相结合的新算法,研究了平面应变水力压裂问题中流体前沿和裂缝尖端不重合(流体滞后)现象。

2.5 离散元法(discrete element method, DEM)

离散元法是基于非连续介质力学的数值方法,首先由Cundall和Strack提出,利用显示差分法来模拟颗粒材料中颗粒的运动和相互影响,很快被发展并广泛应用到流固耦合等问题。离散元方法的主要思想是采用离散的方式将材料划为分离的刚性块体或颗粒,各刚性块体或颗粒通过接触连接描述运动和相互之间的作用,且在不连续块体或颗粒之间形成的通道内允许流体流动。离散元法的原理决定了其能够很好地描述水力压裂过程中天然裂缝、岩体层理的结构和缺陷等。

根据离散元法中最经典的颗粒粘聚模型,岩石材料通过一系列由法向、切线和旋转弹簧连接并相互作用的球形颗粒组成,颗粒之间通过特定材料强度粘聚在一起,其法向、切向和旋转力可表示为

$$F^n = K^n U^n, F^s = K^s U^s, F^0 = K^0 U^0 \quad (31)$$

式中, K^n 、 K^s 和 K^0 分别表示法向、切向和旋转弹簧刚度; U^n 、 U^s 和 U^0 分别表示颗粒的法向、切向和旋转位移。

颗粒之间的接触和振动通过引入阻尼来达到平衡,通过引入最大正应力和最大剪应力准则来判断颗粒之间的相互

作用。在水力压裂过程中,随着注入流体压力不断增大,刚体颗粒之间的接触力满足破坏准则,颗粒之间的接触破坏,描述接触的三个弹簧移除从而产生微裂缝。当此处裂缝产生之后,存储在接触点弹簧内的应变能被释放,应力重新分布从而产生新的裂缝,并逐渐形成裂缝扩展。在加载过程中产生的微裂缝形成流体流动通道,其中的流体流动可由泊肃叶定律来描述:

$$q = -\frac{w^3}{12\mu} \frac{\Delta p}{L_p} \quad (32)$$

式中, r 代表颗粒半径, $L_p = 4r_i r_j / (r_i + r_j)$ 表示接触颗粒的平均半径, $w = w_0 F_0 / (F + F_0)$ 代表接触颗粒之间的裂缝宽度, w_0 是初始相邻颗粒间缝隙,可作为岩体的初始渗透率参数, F_0 是法向力。

通过各个微裂隙通道内流体的流动,流体压力随之变化,反过来作用在颗粒表面改变材料的受力状态从而形成新的裂缝。基于以上原理,离散元法模拟水力压裂过程时,裂缝通过颗粒之间的连接通道自动形成,避免了重新划分网格。刚体块体或颗粒可以自然形成不连续性界面,如天然裂缝、缺陷、岩层不均质结构等。

Shimizu等^[45]利用离散元法研究了流体粘度、渗漏、颗粒尺寸效应对水力压裂过程的影响(图7)。Al-Busaidi等^[41]利用颗粒粘结型离散元法研究了水力压裂中的裂缝扩限问题。利用数值模拟分析了Lac du Nonnet花岗岩中水力压裂裂缝拉伸和天然裂缝中剪切引起的滑移现象,对比了均质性和非均质性水力压裂过程。Zhang等^[42]利用离散元法研究了在颗粒材料中水力压裂过程流体注入速率、流体黏性、杨氏模量衰退和介质渗透性等从渗漏控制到无渗漏转变过程中流体流动行为等。Deng等^[44]通过建立三维离散元模型模拟了水力压裂过程中支撑剂和页岩的相互作用。Tomac^[46]研究了强化地热系统中水力压裂裂缝起裂、扩展、支撑剂流动、运输和固定等问题。

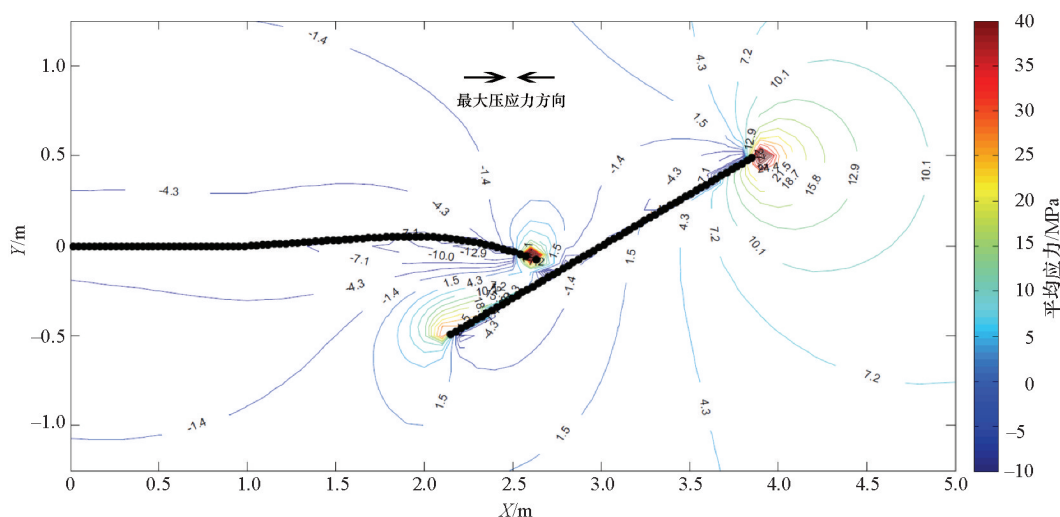


图6 位移不连续法模拟水力压裂裂缝与天然裂缝相互作用

Fig. 6 DDM simulation of hydraulic fracture towards to pre-existing crack

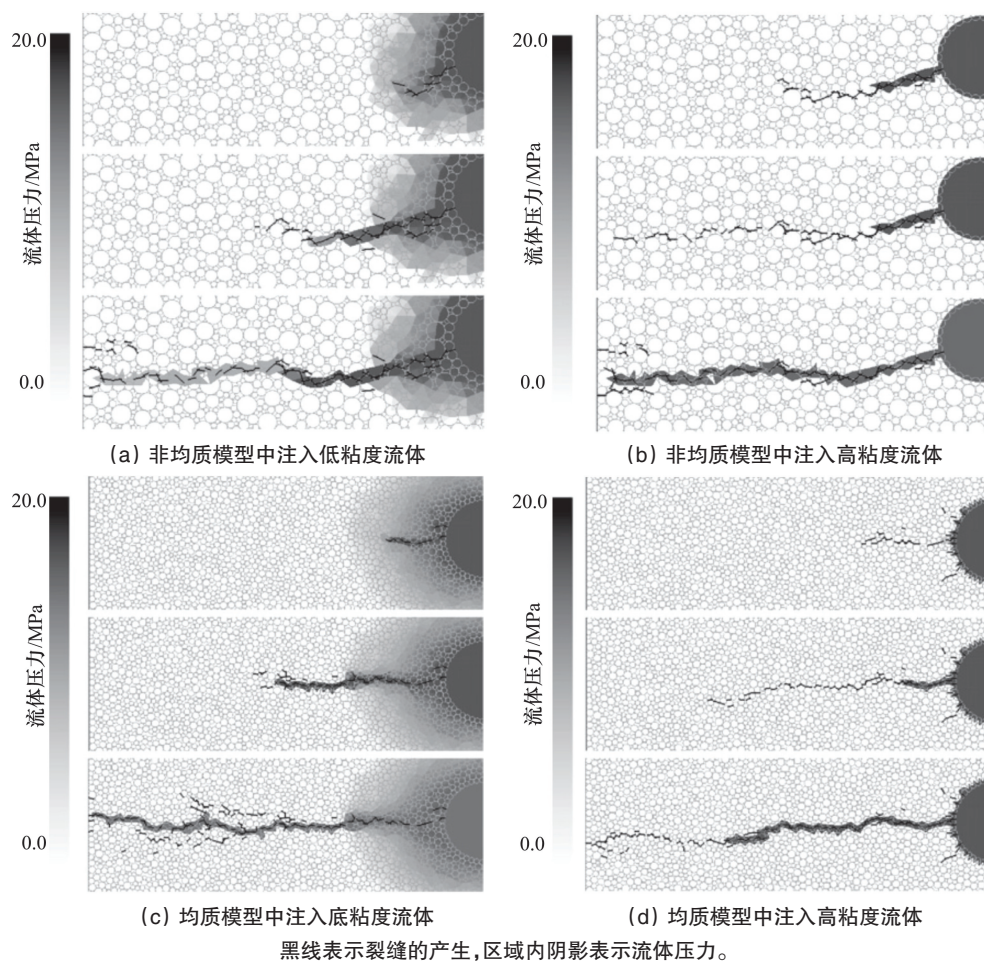


图7 离散元法模拟水力压裂和流体渗漏现象

Fig. 7 DEM simulation of hydraulic propagation and fluid infiltration

离散元的优势在不连续性问题得到了极大的发挥,能够研究压力加载率、流体黏性、热效应等、支撑剂运输等因素对水力压裂过程的影响。离散元法的缺点在于不能很好的处理连续体问题,如杨氏模量、过多局部化问题等,会导致计算量成倍增加从而限制了方法的计算效率。李世海等^[80-81]将连续介质模型和非连续介质模型的优势相结合,发展出统一的连续-离散模型并成功用于模拟地质体的渐进破坏分析。在处理连续性计算时,该方法通过具有明确物理意义的弹簧系统在局部坐标系下直接求解单元变形和应力,继承了有限元法优势同时提高了计算效率。单元满足破裂条件后进行局部块体切割,实现单元内部和边界破裂从而模拟裂缝的起裂和扩展。连续-离散介质模型避免了网格重构,同时能够有效的模拟复杂受力状态下多裂缝扩展问题。基于连续介质离散元法建立了双重介质渗流-应力耦合模型,研究了在库水涨落和降水作用下边坡的破坏过程^[82],为水力压裂数值模拟提供了新的思路和研究方法。

2.6 离散化缝网模型(discrete fracture network, DFN)

页岩的低孔隙度和超低渗透性使得页岩中的天然裂缝成为影响页岩气产量的关键因素,掌握和预测岩体结构及其天然裂缝网络成为页岩气开发的重要技术。传统的数值方

法往往忽略天然裂缝对于水力压裂的影响,离散化缝网模型的优势在于可根据天然裂缝网络建立随机的地质结构,在一定程度上提供近似于真实岩层的天然裂缝网络结构模型。在水力压裂问题中,离散化缝网可以高效地模拟出水力压裂裂缝和岩体中天然裂缝之间的相互影响。

Fu等^[50-51]从真实裂缝分布出发随机生成初始裂缝网络,用离散元法模拟了水力压裂过程和裂缝网络的变化,利用有限元-离散元结合的方式处理了显式流固耦合问题。评价了钻井技术中流体在非均质材料中的流动和热传导相关的微地震效应,并研究了具有天然裂缝网络的岩体中水力压裂过程。Yaghoubi等^[52]结合Barnett页岩的五口水平钻井的实际图形,利用离散缝网模型研究了水力压裂过程中天然裂缝的影响,研究表明,天然裂缝会引起滑移并且使渗透性增强。Damiganac等^[49]提出用合成岩体的方法,基于颗粒粘结型离散元法结合实时数据建立裂缝网模型,研究了水力压裂与周围岩体中连通性的相互影响等现象(图8)。

离散化缝网模型的缺点在于模拟复杂裂缝网络的扩展依赖于大量的影响因素,这些因素的影响很难用数值模拟定量分析。地质结构数据的获取难度大,需要大量数据和参数来描述天然裂缝的分布情况和地质结构等因素的影响。

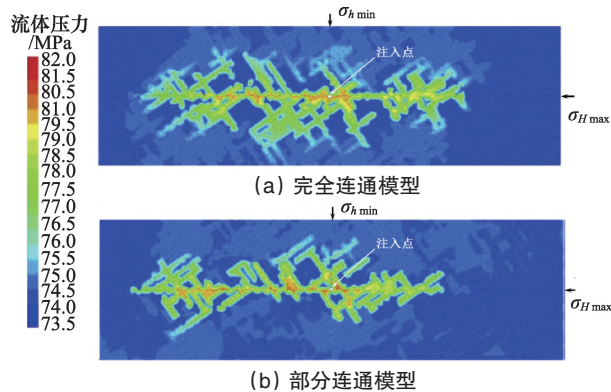


图8 离散化缝网模型模拟水力压裂的流体压力分布
Fig. 8 DFN simulation of hydraulic fracture with fluid pressure distribution

2.7 数值流形方法(numerical manifold method, NMM)

相比于其他数值计算方法,数值流形方法继承了有限元法(FEM)和位移不连续变形法(DDA)的优势,用统一的方法来处理连续性和不连续性变形。数值流形法简单的积分形式适用于应力和单元刚度矩阵的理论解,并且能够重新划分网格减少差值误差。和扩展有限元相比,数值流形方法可以用更简洁的方式来实现多个不连续问题,在处理水力压裂中人工裂缝和天然裂缝之间的相互影响具有很大的优势。总的来说,数值流形方法具有有限元法和位移不连续法的优势,同时也克服了有限元法和位移不连续法的缺点,因此,数值流形方法也被广泛应用于水力压裂数值模拟。

Zhang 等^[56]利用数值流形法结合水力弱耦合技巧研究了水力压裂过程并考虑了渗漏现象(图9)。Hu 等^[54]结合数值流形法和拉格朗日乘数法研究了材料界面引起强非均质性的地质材料中流体的流动。Wu 等^[55]将数值流形法扩展到流体流动作用下产生裂缝的岩石结构稳定性问题。

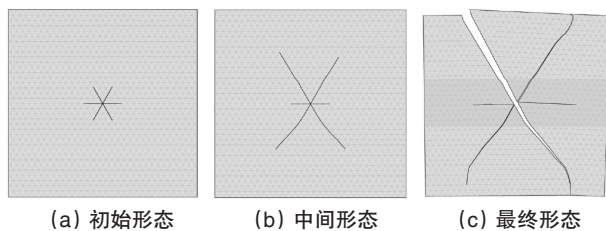


图9 数值流形法模拟水力压裂:流体注入不同阶段的裂缝扩展形态

Fig. 9 NMM simulation of hydraulic fracture: Crack propagation at different hydraulic fracturing steps

2.8 相场法(phase field method, PFM)

相场法作为一种新的数值计算方法在模拟非均质材料中裂缝融合、分叉和非平面扩展问题展现出了极大的优势。相场法采用固定网格法,克服了传统方法重新划分网格带来的计算资源耗费。相场法通过引入相场函数作为一个过渡区来近似描述裂缝面,描述裂缝面的场函数的取值介于0(非

破坏区)和1(破坏区)之间。相场法的优势在于裂缝起裂、扩展及扩展路径可由内部直接决定,不需要花费其他的计算代价,例如线弹性断裂力学理论的应力强度因子准则等。裂缝的融合、分叉等复杂的现象也不需要更新网格来捕捉裂缝面,能容易处理大量复杂裂缝网络。对于非均质材料中裂缝的增长也不需要特殊的处理。

基于相场法, Mikelić 等^[57, 59]研究了水力压裂裂缝扩展与多裂缝融合现象,建立三维模型计算了均质材料中硬币型裂缝扩展问题。Wick 等^[60]利用相场法模拟了水力压裂过程中裂缝扩展与天然裂缝融合现象及其引起的压力变化等,并研究了非均质材料中裂缝的融合和分叉现象。Miche 等^[58]利用相场法结合孔隙弹性理论研究了饱和孔隙材料中水力压裂问题,模拟了三维钻井中水力压裂过程(图10)。

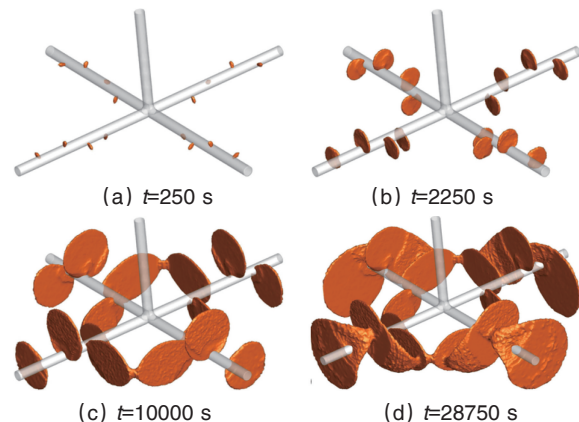


图10 相场法模拟三维钻井水力压裂不同时刻的断裂相场
Fig. 10 PFM simulation of three-dimensional hydraulic fracture from a borehole: Fracture phase fields at different times

3 结论

综述了水力压裂过程中的关键力学问题,讨论了水力压裂数值模拟方法,从基本原理、研究现状和发展趋势出发,分析了各数值计算方法的优缺点和适用性。

1) 有限元法能够精确描述裂缝的产生和扩展,适用于各种复杂受力状态和工程实际问题,例如岩体的非均质性等,但裂缝扩展问题要求网格重构,影响计算效率和精度。扩展有限元法利用独立于不连续性界面的网格模拟裂缝扩展,提高了计算效率,但对于具有多天然裂缝的岩体水力压裂模拟有待进一步发展和优化。位移不连续法作为边界元法能够高效准确求解不连续性界面问题,但在处理非均质材料等问题应用难度大。作为最传统的数值方法,在完善的理论和广阔的应用范围背景下,这几种方法在将来仍然是最常规的计算方法。未来的发展方向一方面可以集中在针对处理实际工程问题上,另一方面可以继续不断提高计算效率从而满足实际工程级别的应用。

2) 离散元法在处理多天然裂缝、多层理结构等问题时具有极大的优势,裂缝扩展和流体流动无需重新划分网格,缺

点在于处理连续性问题 and 局部化问题计算效率会受影响。处理不连续问题时的优势保证了离散元法在具有复杂动态裂缝的水力压裂问题的应用前景, 结合其他的算法来克服自身在连续性问题的缺点是其将来面临的挑战。

3) 离散缝网模型、数值流形模型和相场法等能够利用各自算法的优势实现模拟水力压裂过程中复杂裂缝网络、天然裂缝和非均质岩体对水力压裂效果的影响, 但算法还不成熟, 需要进一步优化和改进。作为新兴的数值计算方法优势明显, 在密切结合水力压裂相关技术进步的基础上, 推广到实际工程中的前景值得期待。

总体来说, 目前的数值计算方法各有优缺点和适用性, 但是仍然局限于处理较简单的水力压裂问题, 对于各种复杂工况和多场耦合问题仍然处于探索阶段。另一方面, 目前的数值计算均面临计算量大、计算时间长等问题, 大部分数值计算仍然处于理论研究阶段, 无法实现工程级别的应用。因此, 从长远来看, 结合不同算法的优势开发综合性的算法、通过并行计算等方法实现大规模计算来提高计算效率和处理实际工程问题, 是所有数值计算方法面临的机遇和挑战。

参考文献 (References)

- [1] Hubbert M K, Willis D G. Mechanics of hydraulic fracturing[J]. Transactions of Society of Petroleum Engineers of AIME, 1957(210): 153-168.
- [2] 庄茁, 柳占立, 王涛, 等. 页岩水力压裂的关键力学问题[J]. 科学通报, 2016, 61(1): 72-81.
Zhuang Zhuo, Liu Zhanli, Wang Tao, et al. The key mechanical problems on hydraulic fracture in shale[J]. Chinese Science Bulletin, 2016, 61(1): 72-81.
- [3] 庄茁, 柳占立, 王永亮. 页岩油气高效开发中的基础理论与关键力学问题[J]. 力学季刊, 2015, 36(1): 11-25.
Zhuang Zhuo, Liu Zhanli, Wang Yongliang. Fundamental theory and key mechanical problems of shale oil gas effective extraction[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2015, 36(1): 11-25.
- [4] 姚军, 孙海, 黄朝琴, 等. 页岩气藏开发中的关键力学问题[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43(12): 1527-1547.
Yao Jun, Sun Hai, Huang Zhaoqin, et al. Key mechanical problems in the development of shale gas reservoirs[J]. Science China: Physics, Mechanics & Astronomy, 2013, 43(12): 1527-1547.
- [5] Yuan B, Wood D A, Yu W. Stimulation and hydraulic fracturing technology in natural gas reservoirs: Theory and case studies (2012-2015) [J]. Journal of Natural Gas Science and Engineering, 2015, 26(3): 1414-1421.
- [6] Wu R. Some fundamental mechanics of hydraulic fracturing[D]. Atlanta: School of Civil and Environmental Engineering, Georgia Institute of Technology, 2006.
- [7] Ching H, Yew, Xiaowei W. Mechanics of hydraulic fracturing[M]. 2nd. Houston: Gulf Professional Publishing, 2014.
- [8] Brady B, Elbel J, Mack M, et al. Cracking rock: Progress in fracture treatment design[J]. Oilfield Review 1992, 4(4): 4-17.
- [9] Li Q, Xing H, Liu J, et al. A review on hydraulic fracturing of unconventional reservoir[J]. Petroleum, 2015, 1(1): 8-15.
- [10] Kovalyshen Y. Fluid-driven fracture in poroelastic medium[D]. Minnesota: Faculty of the Graduate School, University of Minnesota, 2010.
- [11] Sone H. Mechanical properties of shale gas reservoir rocks, and its relation to the in-situ stress variation observed in shale gas reservoirs [D]. Palo Alto: Stanford University, 2012.
- [12] Taleghani A D, Gonzalez M, Shojaei A. Overview of numerical models for interactions between hydraulic fractures and natural fractures: Challenges and limitations[J]. Computers and Geotechnics, 2016(71): 361-368.
- [13] Tang C A, Tham L G, Lee P K K, et al. Coupled analysis of flow, stress and damage (FSD) in rock failure[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2002, 39(4): 477-489.
- [14] Adachi J, Siebrits E, Peirce A, et al. Computer simulation of hydraulic fractures[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2007, 44(5): 739-757.
- [15] Hofmann H. Development of enhanced geothermal systems (EGS) in Northern Alberta[D]. Edmonton: University of Alberta, 2015.
- [16] Min K S. Numerical modeling of hydraulic fracture propagation using thermo-hydro-mechanical analysis with brittle damage model by finite element method[D]. College Station: Department of Petroleum Engineering, Texas A&M University, 2013.
- [17] Carter B J, Desroches J, Ingraffea A R, et al. Simulating fully 3D hydraulic fracturing[M]. Manhattan: John Wiley and Sons, 2000: 525-557.
- [18] Ahn C H, Dilmore R, Wang J Y. Development of innovative and efficient hydraulic fracturing numerical simulation model and parametric studies in unconventional naturally fractured reservoirs[J]. Journal of Unconventional Oil and Gas Resources, 2014(8): 25-45.
- [19] Carrier B, Granet S. Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2012(79): 312-328.
- [20] Chen Z, Bunger A P, Zhang X, et al. Cohesive zone finite element-based modeling of hydraulic fractures[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2009, 22(5): 443-452.
- [21] Therrien R, Sudicky E A. Three-dimensional analysis of variably-saturated flow and solute transport in discretely-fractured porous media[J]. Journal of Contaminant Hydrology, 1996, 23(1-2): 1-44.
- [22] Devloo P R B, Fernandes P D, Gomes S M, et al. A finite element model for three dimensional hydraulic fracturing[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2006, 73(1-4): 142-155.
- [23] Hunsweck M J, Shen Y, Lew A J. A finite element approach to the simulation of hydraulic fractures with lag[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, 37(9): 993-1015.
- [24] Ouyang S, Carey G F, Yew C H. An adaptive finite element scheme for hydraulic fracturing with proppant transport[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1997, 24(7): 645-670.
- [25] Wang S Y, Sun L, Au A S K, et al. 2D-numerical analysis of hydraulic fracturing in heterogeneous geo-materials[J]. Construction and Building Materials, 2009, 23(6): 2196-2206.
- [26] Chen Z. Finite element modelling of viscosity-dominated hydraulic fractures[J]. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2012(88): 136-144.
- [27] Wangen M. Finite element modeling of hydraulic fracturing in 3D[J]. Computational Geosciences, 2013, 17(4): 647-659.
- [28] Taleghani A. Analysis of hydraulic fracture propagation in fractured reservoirs: An improved model for the interaction between induced and natural fractures[D]. Austin: Department of Petroleum and Geosystems Engineering, University of Texas at Austin, 2009.

- [29] Taleghani A, Olson J E. Numerical modeling of multistranded-hydraulic-fracture propagation: Accounting for the interaction between induced and natural fractures[J]. Society of Petroleum Engineers, 2011 (16): 575-581.
- [30] Taleghani A D, Olson J E. Analysis of multistranded hydraulic fracture propagation: An improved model for the interaction between induced and natural fractures[C]//Annual Technical Conference and Exhibition. New Orleans, Louisiana: Society of Petroleum Engineers, 2009.
- [31] Lecampion B. An extended finite element method for hydraulic fracture problems[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2009, 25(2): 121-133.
- [32] Mohammadnejad T, Khoei A R. An extended finite element method for hydraulic fracture propagation in deformable porous media with the cohesive crack model[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2013 (73): 77-95.
- [33] Gordeliy E, Peirce A. Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the XFEM[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013(253): 305-322.
- [34] Salimzadeh S, Khalili N. A three-phase XFEM model for hydraulic fracturing with cohesive crack propagation[J]. Computers and Geotechnics, 2015(69): 82-92.
- [35] Wang H. Numerical modeling of non-planar hydraulic fracture propagation in brittle and ductile rocks using XFEM with cohesive zone method[J]. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2015(135): 127-140.
- [36] Hossain M M, Rahman M K. Numerical simulation of complex fracture growth during tight reservoir stimulation by hydraulic fracturing [J]. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2008, 60(2): 86-104.
- [37] Pecher R. Boundary element simulation of petroleum reservoirs with hydraulically fractured wells[D]. Calgary: Department of Chemical and Petroleum Engineering, University of Calgary, 1999.
- [38] Lecampion B, Detournay E. An implicit algorithm for the propagation of a hydraulic fracture with a fluid lag[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196(49): 4863-4880.
- [39] Sheibani F. Solving three-dimensional problems in natural and hydraulic fracture development: Insight from displacement discontinuity modeling[D]. Austin: Department of Civil, Architectural and Environmental Engineering, University of Texas at Austin, 2013.
- [40] Behnia M, Goshtasbi K, Fatehi Marji M, et al. On the crack propagation modeling of hydraulic fracturing by a hybridized displacement discontinuity/boundary collocation method[J]. Journal of Mining and Environment, 2011, 2(1): 1-16.
- [41] Al-Busaidi A, Hazzard J F, Young R P. Distinct element modeling of hydraulically fractured Lac du Bonnet granite[J]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2005, 110(B06302).
- [42] Zhang F, Damjanac B, Huang H. Coupled discrete element modeling of fluid injection into dense granular media[J]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2013, 118(6): 2703-2722.
- [43] Nikolic M, Ibrahimbegovic A, Miscevic P. Discrete element model for the analysis of fluid-saturated fractured poro-plastic medium based on sharp crack representation with embedded strong discontinuities[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016(298): 407-427.
- [44] Deng S, Li H, Ma G, et al. Simulation of shale-proppant interaction in hydraulic fracturing by the discrete element method[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2014(70): 219-228.
- [45] Shimizu H, Murata S, Ishida T. The distinct element analysis for hydraulic fracturing in hard rock considering fluid viscosity and particle size distribution[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2011, 48(5): 712-727.
- [46] Ingrid T. Micro-mechanical aspects of hydraulic fracture propagation and proppant flow and transport for stimulation of enhanced geothermal systems a discrete element study[D]. Golden: Department of Civil and Environmental Engineering, Colorado School of Mines, 2007.
- [47] Zeeb C, Konietzky H. Simulating the hydraulic stimulation of multiple fractures in an anisotropic stress field applying the discrete element method[J]. Energy Procedia, 2015, 76: 264-272.
- [48] McClure M W, Horne R N. Discrete fracture network modeling of hydraulic stimulation: coupling flow and geomechanics[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013.
- [49] Damjanac B, Cundall P. Application of distinct element methods to simulation of hydraulic fracturing in naturally fractured reservoirs[J]. Computers and Geotechnics, 2016(71): 283-294.
- [50] Fu P, Johnson S M, Hao Y, et al. Fully coupled geomechanics and discrete flow network modeling of hydraulic fracturing for geothermal applications[C]//Thirty-Sixth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, 2011. Palo Alto: Stanford University, 2011.
- [51] Fu P, Johnson S M, Carrigan C R. An explicitly coupled hydro-geomechanical model for simulating hydraulic fracturing in arbitrary discrete fracture networks[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, 37(14): 2278-2300.
- [52] Yaghoubi A, Zoback M D. Hydraulic fracturing modeling using a discrete fracture network in the barnett shale[C]//American Geophysical Union, Fall Meeting 2012. Palo Alto: Stanford University, 2012.
- [53] Zhang X, Jeffrey R G, Thiercelin M. Mechanics of fluid-driven fracture growth in naturally fractured reservoirs with simple network geometries[J]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2009, 114 (B12): 465-484.
- [54] Hu M, Wang Y, Rutqvist J. Development of a discontinuous approach for modeling fluid flow in heterogeneous media using the numerical manifold method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2015, 39(17): 1932-1952.
- [55] Wu Z, Wong L N Y. Extension of numerical manifold method for coupled fluid flow and fracturing problems[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2014, 38(18): 1990-2008.
- [56] Zhang G, Li X, Li H. Simulation of hydraulic fracture utilizing numerical manifold method[J]. Science China Technological Sciences, 2015, 58(9): 1542-1557.
- [57] Mikelić A, Wheeler M F, Wick T. A phase-field method for propagating fluid-filled fractures coupled to a surrounding porous medium[J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2015, 13(1): 367-398.
- [58] Miehe C, Mauthe S. Phase field modeling of fracture in multi-physics problems(Part III): Crack driving forces in hydro-poro-elasticity and hydraulic fracturing of fluid-saturated porous media[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016(304): 619-655.
- [59] Mikelić A, Wheeler M F, Wick T. Phase-field modeling of a fluid-driven fracture in a poroelastic medium[J]. Computational Geosciences, 2015, 19(6): 1171-1195.
- [60] Wick T, Singh G, Wheeler M F. Pressurized-fracture propagation using a phase-field approach coupled to a reservoir simulator[C]//SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. Woodlands: Society of

- Petroleum Engineers, 2014.
- [61] Papanastasiou P. Hydraulic fracture closure in a pressure-sensitive elastoplastic medium[J]. *International Journal of Fracture*, 2000, 103(2): 149–161.
- [62] Papanastasiou P C. A coupled elastoplastic hydraulic fracturing model [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 1997, 34(3): 240.e1–240.e15.
- [63] Shojaei A, Dahi Taleghani A, Li G. A continuum damage failure model for hydraulic fracturing of porous rocks[J]. *International Journal of Plasticity*, 2014(59): 199–212.
- [64] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low frequency range[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956(28): 168–178.
- [65] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. higher frequency range[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956(28): 179–191.
- [66] Batchelor G K. *An introduction to fluid dynamics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.
- [67] Garagash D I. Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag: Early-time solution[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(18): 5811–5835.
- [68] Yao Y. Linear elastic and cohesive fracture analysis to model hydraulic fracture in brittle and ductile rocks[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2012, 45(3): 375–387.
- [69] ABAQUS. Abaqus documentation version 6.14[EB/OL]. [2016-07-10]. <http://129.97.46.200:2080/v6.14/index.html>.
- [70] Howard G C, Fast C R. *Optimum fluid characteristics for fracture extension*[C]//*Drilling and Production Practice*. New York: American Petroleum Institute, 1957.
- [71] Sarris E, Papanastasiou P. Modeling of hydraulic fracturing in a poroelastic cohesive formation[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2012, 12(2): 160–167.
- [72] Peirce A, Detournay E. An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, 197(33): 2858–2885.
- [73] Vandamme L M, Roegiers J C. Poroelasticity in hydraulic fracturing simulators[J]. *Journal of Petroleum technology*, 1990, 42(09): 1199–1203.
- [74] Valko P P, Economides M J. *Fluid-leakoff delineation in high-permeability fracturing*[J]. *Society of Petroleum Engineers*, 1999, 14(2): 110–116.
- [75] Carter R D. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area[J]. *Drilling and Production Practices*, 1957. 261–270.
- [76] Moes N, Dolbow J, Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46(1): 131–150.
- [77] 王涛, 高岳, 柳占立, 等. 基于扩展有限元法的水力压裂大物模试验的数值模拟[J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 2014, 54(10): 1304–1309.
- Wang T, Gao Y, Liu Z L, et al. Numerical simulations of hydraulic fracturing in large objects using an extended finite element method[J]. *Journal of Tsinghua University: Science and Technology*, 2014, 54(10): 1304–1309.
- [78] Gupta P, Duarte C A. Simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fracture propagation[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2014, 38(13): 1397–1430.
- [79] Duarte C A, Oden J T. An h-p adaptive method using clouds[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1): 237–262.
- [80] 王杰, 李世海, 张青波. 基于单元破裂的岩石裂纹扩展模拟方法[J]. *力学学报*, 2015, 47(1): 105–118.
- Wang J, Li S, Zhang Q. Simulation of crack propagation of rock based on splitting elements[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(1): 105–118.
- [81] 魏怀鹏, 易大可, 李世海, 等. 基于连续介质模型的离散元方法中弹簧性质研究[J]. *岩土力学与工程学报*, 2006, 25(6): 1159–1169.
- Wei H P, Yi D K, Li S H, et al. Study on spring properties of continuum-based discrete element method[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, 25(6): 1159–1169.
- [82] 刘洋, 李世海, 刘晓宇. 基于连续介质离散元的双重介质渗流应力耦合模型[J]. *岩石力学与工程学报*, 2011, 30(5): 951–959.
- Liu Yang, Li Shihai, Liu Xiaoyu. Coupled fluid flow and stress computation model of dual media based on continuum-medium distinct element method[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2011, 30(5): 951–959.

Key mechanical problems and numerical methods of hydraulic fracture in shale

LI Mingyao¹, HE Jiayuan², SU Yewang¹

1. State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics; Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

2. Research Institute of Petroleum Exploration and Development, China Petroleum Exploration and Production Research Institute, SINOPEC, Beijing 100083, China

Abstract This paper provides an overview of the key mechanical problems of hydraulic fracturing process including rock deformation due to the fluid pressure on crack surfaces, crack initiation and propagation, fluid flow within cracks and their couplings. The fundamentals of the numerical methods for hydraulic fracturing are reviewed with their progress and development trend, for example, finite element method, discrete element method, boundary element method and other related numerical methods. These methods are analyzed and compared in terms of advantages and applicability.

Keywords hydraulic fracturing; numerical methods; fracture mechanics; crack propagation

(编辑 韩丹岫)