

# 基于勒让德多项式逼近法的 M-C 强度参数概率分布推断

李夕兵, 朱唤珍, 黄天朗

中南大学资源与安全工程学院, 长沙 410083

**摘要** 在岩土工程可靠度分析中, M-C 强度参数概率分布类型研究是一项基础性工作, 为此提出了岩土抗剪强度参数概率分布函数的勒让德多项式推断法。以岩石常规三轴试验数据为原始信息, 根据组合理论和线性回归分析方法, 构建了内摩擦角  $\varphi$ 、摩擦系数  $f$  和黏聚力  $c$  的小样本信息库, 对样本数据的概率分布类型进行假设检验, 通过有限比较法得到 M-C 强度参数的最优经典概率分布类型为正态分布。基于勒让德正交多项式逼近法得到了  $\varphi$ 、 $f$  和  $c$  的概率分布函数, 并利用 K-S 检验法与正态分布进行计算精度比较。结果表明, 勒让德多项式推断得到的概率分布函数的 K-S 检验值比正态分布的小, 更符合样本实际观测数据的分布规律。

**关键词** 概率分布函数; M-C 强度参数; 勒让德多项式; K-S 检验法; 组合理论

**中图分类号** TU452

**文献标志码** A

**doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2015.18.008

## Deduction of probability distribution of M-C strength parameters by Legendre polynomial

LI Xibing, ZHU Huanzhen, HUANG Tianlang

School of Resources and Safety Engineering, Central South University, Changsha 410083, China

**Abstract** It is a fundamental and important topic to study the probability distribution of M-C strength parameters in reliability analysis of geotechnical engineering. The Legendre polynomial is introduced to infer the probability distribution functions of geotechnical shear strength parameters. With the conventional triaxial test data as the original information, an information basis of internal friction angle  $\varphi$ , friction coefficient  $f$  and cohesion  $c$  is constructed based on combination theory and linear regression analysis method. Subsequently, hypothesis testing of the probability distribution functions of sample data is conducted. The optional classical probability distribution types of M-C strength parameters are normal distribution, as verified by limited comparison method. The probability distribution functions of internal friction angle, friction coefficient and cohesion are deduced by Legendre orthogonal polynomial numerical approximation method. The K-S test method is used to compare the results of the presented method and normal distribution. It is shown that the K-S test results of probability distribution functions of M-C shear strength parameters deduced by Legendre polynomial are smaller than those of the normal distribution and can be more close to the actual probability distribution.

**Keywords** probability distribution function; M-C strength parameters; the Legendre polynomial; K-S test method; combination theory

M-C 强度理论是广泛应用于岩土工程领域的强度理论之一<sup>[1-3]</sup>, 表征了岩土破坏时最大主应力与最小主应力之间的

线性关系, 没有考虑中主应力对岩土强度的影响<sup>[4-6]</sup>。但 M-C 强度准则的线性表达式是一个定值方程表达式, 其中涉及到

收稿日期: 2015-03-26; 修回日期: 2015-05-05

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)项目(2010CB732004); 国家自然科学基金项目(41272304)

作者简介: 李夕兵, 教授, 研究方向为岩石破裂、岩石动力学及地下工程可靠度, 电子信箱: xbli@mail.csu.edu.cn; 朱唤珍(共同第一作者), 硕士研究生, 研究方向为地下工程可靠度, 电子信箱: zhzcusu2014@163.com

引用格式: 李夕兵, 朱唤珍, 黄天朗. 基于勒让德多项式逼近法的 M-C 强度参数概率分布推断[J]. 科技导报, 2015, 33(18): 49-55.

的准则参数为常数,用这种方法对岩石材料的受力状态进行判别时,只能给出两个确定性的结果:稳定或破坏<sup>[7]</sup>。由于岩体是力学参数变异性较大的地质体,考虑岩体强度参数的变异性,将M-C强度准则概率化,用破坏概率作为岩体破坏的判定标准,可以提高岩体稳定性判别的客观科学性<sup>[8]</sup>。在M-C准则中,岩石抗剪强度参数的内摩擦角 $\varphi$ ,摩擦系数 $f = \tan \varphi$ 和黏聚力 $c$ 都由现场和室内试验来确定,由于受多种因素的影响, $\varphi$ 、 $f$ 和 $c$ 都是随机参数,而且样本容量往往很小,无法达到统计的要求。研究发现采用M-C准则进行岩土工程的可靠度分析时, $c$ 和 $\varphi$ 值的不同分布类型和相关结构对可靠度指标有较大的影响<sup>[9-12]</sup>,如姜彤等<sup>[10]</sup>的研究结果表明,边坡可靠度计算对 $c$ 和 $\varphi$ 值的概率分布形式十分敏感,最大相差10倍以上。唐小松等<sup>[11,12]</sup>依据copula理论研究了不完备信息条件下M-C准则参数 $c$ 和 $\varphi$ 间的相关结构对失效概率的影响,结果表明岩土结构的失效概率与所选用的copula函数有关,并且指出常用的Gaussian copula函数有时并不是反映 $c$ 和 $\varphi$ 间相关性最优的copula函数。但是研究两个参数相关结构的先决条件是知晓参数的概率分布类型,由于概率分布类型的合理与否将直接影响copula函数的选取和copula参数的取值。因此在岩土工程可靠度分析中,对M-C强度参数概率分布类型的研究是一项基础性工作,具有极其重要的意义。

岩土抗剪强度参数概率分布类型研究结果表明:岩土抗剪强度参数多数服从正态分布、对数正态分布和极值1型分布<sup>[13-15]</sup>。目前关于岩土参数概率分布类型推断常根据经验,先假定岩土参数服从一种或几种经典的理论分布(正态分布、对数正态分布等),然后通过检验(如K-S检验法等)做出拒绝或不拒绝假设<sup>[16]</sup>。宫凤强等<sup>[17,18]</sup>基于正交多项式最佳平方逼近法对随机参数的概率密度函数进行了研究,直接根据试验样本信息和统计分析方法得到随机参数的概率分布函数,而不是预先假定样本数据服从某经典分布,具有充分的数学和物理意义,避免了对样本数据概率分布的假设检验,取得较好效果。

本文以岩石的7组常规三轴试验数据为原始信息,基于勒让德正交多项式逼近法得到 $\varphi$ 、 $f$ 和 $c$ 的概率分布函数,并利用K-S检验法和最优的经典概率分布进行计算精度比较。

## 1 M-C 强度理论

岩石破坏面上的抗剪强度是作用在该面上的正应力的单值函数,在一定应力水平下,岩石的抗剪强度准则为

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi \quad (1)$$

式中, $\tau$ 为破坏面上的极限剪应力; $\sigma$ 为破坏面上的法向应力; $c$ 和 $\varphi$ 分别为岩石材料的黏聚力和内摩擦角。

式(1)即为M-C强度准则,其主应力型为

$$\sigma_1 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_3 + \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (2)$$

式中, $\sigma_1$ 和 $\sigma_3$ 分别为岩石破坏时的最大主应力和最小主应力。

图1为M-C强度准则的强度包络线, $\sigma_c$ 为单轴抗压强度,岩石抗剪强度随剪切面上的压应力线性增大,并且在各种应力状态下,岩石破坏面与最大主平面的夹角均为 $\beta = 45^\circ + \varphi/2$ 。从图1可看出,针对具体的岩石材料可以通过常规三轴试验获得岩石在不同围压 $\sigma_3$ 下的抗压强度 $\sigma_1$ 。然后在 $\tau - \sigma_n$ 坐标系下,分别以 $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ 为圆心, $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ 为半径做莫尔圆,以此为基础作出系列莫尔圆的公切线,即M-C强度包络线,进而根据式(2)确定岩石的黏聚力 $c$ ,内摩擦角 $\varphi$ 及摩擦系数 $f$ ,即可建立具体岩石的M-C抗剪强度准则。在实际工作中,在做莫尔圆时带有很大的随机性,因此所得到的黏聚力 $c$ ,内摩擦角 $\varphi$ 及摩擦系数 $f$ 都是随机参数<sup>[7]</sup>。

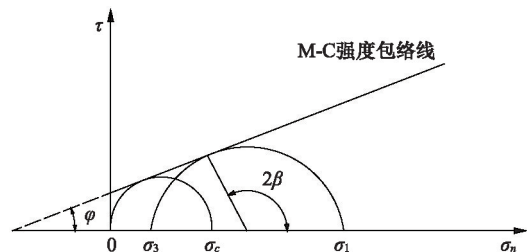


图1 Mohr-Coulomb 强度准则

Fig. 1 Mohr-Coulomb strength criterion

## 2 构建抗剪强度参数的小样本数据库

一般情况下,对于三轴压缩试验,利用线性回归统计分析方法,可以得到适合于各莫尔圆的最优公切线,然而这种方法得到的抗剪强度参数是个确定值,没有统计意义。但是在三轴压缩试验数据中,随机取出几个试验值,构造对应的系列莫尔圆,然后根据线性回归分析方法,即可得到一组抗剪强度参数值。根据组合理论就可以由有限的试验值构造出具有一定样本数的抗剪强度参数信息库。以三轴压缩试验数据为例来说明岩石抗剪强度参数信息库的构建方法。赵奎等<sup>[19]</sup>在RMT-150C岩石力学试验系统上对石英斑岩进行三轴压缩试验,当围压 $\sigma_3$ 为0、5、10、15、20、25和30 MPa时,对应的峰值应力 $\sigma_1$ 为114.25、179.10、182.18、267.61、234.04、270.88和316.42 MPa。

在构建抗剪强度参数小样本信息库时,应保证每组数据中都包含单轴抗压强度试验值以及样本容量 $n \geq 5$ ,因此针对表1中的7组数据,在含围压的6组常规三轴抗压试验数据中根据组合理论,构建了 $C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 22$ 组数据<sup>[7]</sup>,然后根据线性回归方法可计算得到22组 $(\varphi, f, c)$ 样本值。

## 3 岩石抗剪强度参数的线性回归估计

目前利用三轴压缩试验数据,基于线性回归原理求解抗剪强度参数的方法主要有两种: $\sigma_1 - \sigma_3$ 法和 $p - q$ 法<sup>[20]</sup>。然而通过严格的数学推导,理论上证明采用 $\sigma_1 - \sigma_3$ 法的回归结果更为合理<sup>[21]</sup>。因此下面仅对线性回归的 $\sigma_1 - \sigma_3$ 法做简要介绍。

3.1  $\sigma_1-\sigma_3$ 法

由式(2)得

$$\sigma_1 = A\sigma_3 + B \quad (3)$$

式(3)中,

$$A = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad B = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (4)$$

利用三轴压缩试验数据,基于线性回归原理直接对 $(\sigma_3, \sigma_1)$ 进行线性回归得到  $A$  和  $B$ , 然后根据式(4)计算出抗

剪强度参数  $c, \varphi$  和  $f$  [20,21]。

3.2 抗剪强度参数的线性回归估计

对依据组合理论得到的22组样本值,分别根据  $\sigma_1 - \sigma_3$  法进行线性回归计算得到  $A$  和  $B$ , 然后利用式(4)计算出  $c, \varphi$  和  $f$ , 具体计算结果如表1所示。表中剔除的数据是指在该组参数线性回归过程中未使用的试验值。例如剔除的数据为(5, 179.10)时,采用除这组试验值之外的其他6组试验值进行回归估计。

表1 岩石抗剪强度参数的样本数据

Table 1 Sample data for shear strength parameters of rock

A	B/MPa	$\varphi /(^{\circ})$	f	c/MPa	剔除的数据/MPa
132.0786	6.0080	45.6114	1.0216	26.9425	—
114.6066	6.4707	47.0784	1.0753	22.5271	(5, 179.10)
136.2425	5.8941	45.2266	1.0079	28.0590	(10, 182.18)
124.6866	6.0575	45.7755	1.0274	25.3305	(15, 267.61)
133.3488	6.1619	46.1160	1.0397	26.8598	(20, 234.04)
131.3818	6.2523	46.4044	1.0503	26.2716	(25, 270.88)
133.5531	5.8124	44.9443	0.9981	27.6978	(30, 316.42)
126.1897	6.2663	46.4485	1.0519	25.2052	(5, 179.10), (10, 182.18)
113.3976	6.4769	47.0972	1.0760	22.2787	(5, 179.10), (15, 267.61)
122.1957	6.4961	47.1549	1.0782	23.9717	(5, 179.10), (20, 234.04)
114.5138	6.5903	47.4346	1.0888	22.3036	(5, 179.10), (25, 270.88)
116.1692	6.1215	45.9851	1.0350	23.4765	(5, 179.10), (30, 316.42)
126.4671	6.0052	45.6021	1.0212	25.8038	(10, 182.18), (15, 267.61)
138.6011	6.0528	45.7602	1.0269	28.1681	(10, 182.18), (20, 234.04)
135.6651	6.1638	46.1220	1.0400	27.3221	(10, 182.18), (25, 270.88)
137.5068	5.7768	44.8195	0.9937	28.6056	(10, 182.18), (30, 316.42)
125.8268	6.1575	46.1018	1.0392	25.3537	(15, 267.61), (20, 234.04)
124.5847	6.1640	46.1226	1.0400	25.0902	(15, 267.61), (25, 270.88)
128.3022	5.6148	44.2388	0.9738	27.0729	(15, 267.61), (30, 316.42)
132.1588	6.6201	47.5220	1.0921	25.6823	(20, 234.04), (25, 270.88)
132.6843	6.3489	46.7064	1.0614	26.3294	(20, 234.04), (30, 316.42)
129.5891	6.5583	47.3401	1.0852	25.3014	(25, 270.88), (30, 316.42)

4 基于勒让德多项式逼近法的M-C强度参数概率分布推断

4.1 勒让德正交多项式

勒让德(Legendre)多项式为定义在闭区间[-1,1]上,权函数  $w(x)=1$  的正交多项式,用  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$  表示。

正交性

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases} \quad (5)$$

递推关系

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, \\ (k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x) \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

勒让德多项式中各项的系数定义为

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P_k(x) f(x) dx \quad k=0,1,2,\dots \quad (7)$$

式中,  $f(x)$  为所要逼近的函数, 本研究指岩石抗剪强度参数的概率密度函数。

#### 4.2 岩石抗剪强度参数的勒让德多项式展开

假设岩石抗剪强度参数  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的样本的分布区间为  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , 为了满足勒让德多项式的定义区间, 需对样本分布区间进行线性变换。设  $y_i = [2x_i - (a+b)] / (b-a)$  ( $a$  稍小于  $x_{\min}$ ,  $b$  稍大于  $x_{\max}$ )<sup>[16,17]</sup>, 相应的概率密度函数为  $f(y)$ 。根据数理统计理论, 其均值  $\mu$ 、 $k$  阶原点矩  $\mu_k$  以及  $k$  阶样本矩  $A_k$  分别为

$$\mu = \int_{-1}^1 y f(y) dy, \quad \mu_k = \int_{-1}^1 y^k f(y) dy, \quad A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^k \quad (8)$$

根据数理统计理论, 随机变量的样本矩  $A_k$  依概率收敛于总体原点矩  $\mu_k$ , 因此有

$$\mu_k = A_k \quad (9)$$

勒让德多项式的  $P_k(y)$  是最高次项为  $k$  的多项式, 设  $P_k(y) = \beta_{k0} + \beta_{k1}y + \dots + \beta_{kk}y^k$ , 则

$$\int_{-1}^1 P_k(y) f(y) dy = \int_{-1}^1 (\beta_{k0} + \beta_{k1}y + \dots + \beta_{kk}y^k) f(y) dy = \beta_{k0} \int_{-1}^1 P_k(y) dy + \beta_{k1} \int_{-1}^1 y P_k(y) dy + \dots + \beta_{kk} \int_{-1}^1 y^k P_k(y) dy$$

代入式(8)和(9)得

$$\int_{-1}^1 P_k(y) f(y) dy = \beta_{k0} \mu_0 + \beta_{k1} \mu_1 + \dots + \beta_{kk} \mu_k = \sum_{i=0}^k \beta_{ki} \mu_i = \sum_{i=0}^k \beta_{ki} A_i \quad (10)$$

将式(10)代入式(7)得

$$a_k = \frac{\sum_{i=0}^k \beta_{ki} A_i}{2(2k+1)} \quad k=0,1,2,\dots \quad (11)$$

因此  $f(y)$  的勒让德正交多项式展开为

$$f(y) \approx f_n(y) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(y) \quad (12)$$

将  $y = [2x - (a+b)] / (b-a)$  代入式(12), 可求得岩石抗剪强度参数  $X$  在闭区间  $[a, b]$  上的概率密度函数为

$$f(x) \approx f_n(x) = \frac{2}{b-a} \sum_{k=0}^n a_k P_k \left[ \frac{2x - (a+b)}{b-a} \right] \quad (13)$$

由式(13)可得强度参数  $X$  的概率分布函数为

$$F(x) \approx F_n(x) = \begin{cases} 1 & x > b \\ \int_a^x f_n(x) dx & a < x \leq b \\ 0 & x \leq a \end{cases} \quad (14)$$

## 5 K-S法检验与分析讨论

### 5.1 经典理论概率分布函数分析

岩土抗剪强度参数概率分布类型方面大量的研究工作表明岩土抗剪强度参数多数服从正态分布、对数正态分布和极值1型分布<sup>[13-15]</sup>, 因此首先对表2得到的22组  $(\varphi, f, c)$ , 采用精度较高的K-S检验法对经典理论分布函数进行假设检验。K-S检验值的柱状图如图2所示。

表2 正态分布的分布参数

Table 2 Distribution parameters of Gaussian distribution

类型	$\varphi/(^\circ)$	$f$	$c/\text{MPa}$
均值	46.1642	1.0420	25.7115
标准差	0.8950	0.0325	1.8835

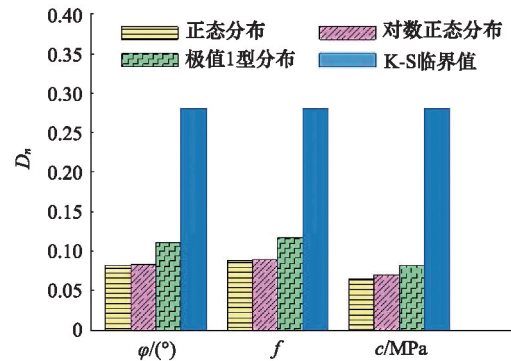


图2 传统分布拟合的K-S检验结果

Fig. 2 K-S test results of classical probability distribution functions

从图2可以看出,  $\varphi, f$  和  $c$  对于3种经典理论分布(正态分布、对数正态分布和极值1型分布)都能通过K-S检验。这时可以通过比较不同概率分布检验值  $D_n$  的大小来遴选出样本值的最优理论分布概型。由图2可得, 对于抗剪强度参数  $\varphi, f$  和  $c$ , 正态分布检验值都小于其他两种分布的检验值。因此, 岩石抗剪强度参数的最优分布类型均为正态分布, 分布参数如表2所示。

### 5.2 抗剪强度参数分布函数的勒让德多项式推断

根据概率密度函数的勒让德多项式逼近法可知, 本研究方法的关键步骤在于根据样本矩  $A_k$  依概率收敛于总体原点矩  $\mu_k$  来确定勒让德多项式系数  $a_k$ 。根据文献[16]、[22]可知, 当勒让德多项式的阶数  $n \geq 6$  时, 所得到的概率密度函数已经有很好的收敛效果, 并且趋于稳定。便于比较分析, 本文分别采用六阶、七阶和八阶勒让德多项式对M-C强度参数的概率密度函数进行推断。根据式(11)可计算得到概率密度函数的六阶、七阶和八阶勒让德多项式逼近表达式  $f_6(y)$ 、 $f_7(y)$  和  $f_8(y)$  的系数, 如表3所示。

将计算得到的勒让德多项式逼近表达式的系数代入式(13)可得抗剪强度参数  $X$  的概率密度函数  $f_6(x)$ 、 $f_7(x)$  和  $f_8(x)$  的具体表达式, 然后代入式(14)可得对应的概率分布函数  $F_6(x)$ 、 $F_7(x)$  和  $F_8(x)$  的表达式。

### 5.3 K-S检验及讨论分析

为了说明岩石抗剪强度参数概率密度函数的勒让德多项式推断法在小样本下的适用性, 利用K-S检验法分别对参数  $\varphi, f$  和  $c$  的正态分布函数和勒让德多项式函数  $F_6(x)$ 、 $F_7(x)$  和  $F_8(x)$  进行检验, 检验结果如表4、表5、表6所示。由于3个强度参数的样本容量均为22, 显著水平  $\alpha$  为0.05时, K-S检验统计量的临界值  $D_{n,\alpha} = 0.2807$ 。

表3 拟合勒让德多项式系数  
Table 3 Coefficients for fitting Legendre polynomial

系数	内摩擦角			摩擦系数			黏聚力		
	$f_6(y)$	$f_7(y)$	$f_8(y)$	$f_6(y)$	$f_7(y)$	$f_8(y)$	$f_6(y)$	$f_7(y)$	$f_8(y)$
$a_0$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$a_1$	0.1232	0.1232	0.1232	0.0794	0.0794	0.0794	0.0907	0.0907	0.0907
$a_2$	-0.5079	-0.5079	-0.5079	-0.5212	-0.5212	-0.5212	-0.1997	-0.1997	-0.1997
$a_3$	-0.2013	-0.2013	-0.2013	-0.1530	-0.1530	-0.1530	-0.4238	-0.4238	-0.4238
$a_4$	0.0787	0.0787	0.0787	-0.0800	-0.0800	-0.0800	0.2296	0.2296	0.2296
$a_5$	-0.2307	-0.2307	-0.2307	-0.2680	-0.2680	-0.2680	-0.0227	-0.0227	-0.0227
$a_6$	-0.3785	-0.3785	-0.3785	-0.3060	-0.3060	-0.3060	-0.4814	-0.4814	-0.4814
$a_7$		0.2935	0.2935		0.4210	0.4210		0.2108	0.2108
$a_8$			0.6203			0.5988			-0.0848

表4  $\varphi$ 值概率分布函数的K-S检验结果  
Table 4 K-S test results of probability distribution function of  $\varphi$

区间长度	样本数	实际频率	K-S检验结果			
			正态分布	$F_6(\varphi)$	$F_7(\varphi)$	$F_8(\varphi)$
[44, 44.7860)	1	0.0455	0.0085	0.0290	0.0304	0.0429
[44, 45.3332)	4	0.1818	0.0130	0.0133	0.0224	0.0275
[44, 45.8804)	8	0.3636	0.0041	0.0104	0.0207	0.0110
[44, 46.4276)	14	0.6364	0.0284	0.0261	0.0265	0.0073
[44, 46.9748)	16	0.7273	0.0824	0.0575	0.0489	0.0317
[44, 48]	22	1.0000	0.0279	0.0000	0.0000	0.0000
$D_n$			0.0824	0.0575	0.0489	0.0429
临界值 $D_{n,\alpha}$						0.2807

表5  $f$ 值概率分布函数的K-S检验结果  
Table 5 K-S test results of probability distribution function of  $f$

区间长度	样本数	实际频率	K-S检验结果			
			正态分布	$F_6(f)$	$F_7(f)$	$F_8(f)$
[0.9657, 0.9935)	1	0.0455	0.0128	0.0301	0.0334	0.0441
[0.9657, 1.0132)	4	0.1818	0.0036	0.0020	0.0118	0.0150
[0.9657, 1.0329)	8	0.3636	0.0167	0.0300	0.0440	0.0329
[0.9657, 1.0526)	15	0.6818	0.0176	0.0580	0.0568	0.0378
[0.9657, 1.0723)	16	0.7273	0.0882	0.0658	0.0523	0.0369
[0.9657, 1.1106]	22	1.0000	0.0266	0.0000	0.0000	0.0000
$D_n$			0.0882	0.0658	0.0568	0.0441
临界值 $D_{n,\alpha}$						0.2807

表6  $c$ 值概率分布函数的K-S检验结果  
Table 6 K-S test results of probability distribution function of  $c$

区间长度	样本数	实际频率	K-S检验结果			
			正态分布	$F_6(c)$	$F_7(c)$	$F_8(c)$
[22, 23.3332)	3	0.1364	0.0574	0.0323	0.0342	0.0327
[22, 24.3877)	5	0.2273	0.0106	0.0179	0.0239	0.0228
[22, 25.4422)	10	0.4545	0.0358	0.0651	0.0570	0.0565
[22, 26.4967)	14	0.6364	0.0009	0.0017	0.0027	0.0044
[22, 27.5512)	18	0.8182	0.0069	0.0025	0.0029	0.0009
[22, 29]	22	1.0000	0.0648	0.0000	0.0000	0.0000
$D_n$			0.0648	0.0651	0.0570	0.0565
临界值 $D_{n,\alpha}$						0.2807

从表4~表6可以看出,由勒让德多项式推断得到的强度参数 $\varphi$ 、 $f$ 和 $c$ 的概率分布函数的检验值都小于临界值 $D_{n,\alpha}$ ,且比正态分布的检验值小。因此用勒让德多项式逼近法得到的随机参数的概率分布函数能够通过拟合良好性检验,而且比正态分布函数更能反映样本的真实分布情况。如由表4可知, $\varphi$ 值的正态分布的检验值为0.0824,正交多项式 $F_6(\varphi)$ 、 $F_7(\varphi)$ 和 $F_8(\varphi)$ 的检验值分别为0.0575,0.0489和0.0429,都远小于 $D_{n,\alpha}$ ,说明正态分布和勒让德多项式都可通过K-S检验法检验。但是勒让德多项式的检验值比正态分布的小,说明由勒让德多项式推断的概率分布函数更接近 $\varphi$ 值样本数据的实际分布。通过K-S检验法检验,勒让德正交多项式也更符合 $f$ 和 $c$ 值样本数据的分布规律。

为了更加直观地说明勒让德正交多项式和正态分布概率密度函数的表现形式,分别作出了二者的函数曲线,并与

样本实测数据的频率分布直方图作对比,如图3所示。图3直观地说明了由勒让德正交多项式逼近法得到的M-C强度参数的概率密度函数可以有多个峰值,能够更好地拟合样本数据的频率分布直方图,进一步说明了本研究方法的合理性和适用性。由于经典理论分布(如正态分布、对数正态分布和极值1型分布等)的概率密度函数为单峰值函数,因此用经典分布函数拟合多峰值函数,显然不合理。而勒让德正交多项式推断的概率密度函数能够有效解决经典分布所不能解决的多峰值函数的拟合问题。实际中的问题由于受多种因素的影响,可能并不严格服从某一经典概率分布,而是服从某种未知的分布或几种经典分布的组合<sup>[16,23]</sup>。采用勒让德正交多项式为基,由样本矩直接生成随机参数的概率密度函数,而不是先假定成经典分布,因此有更加充分的数学和物理意义<sup>[23]</sup>。

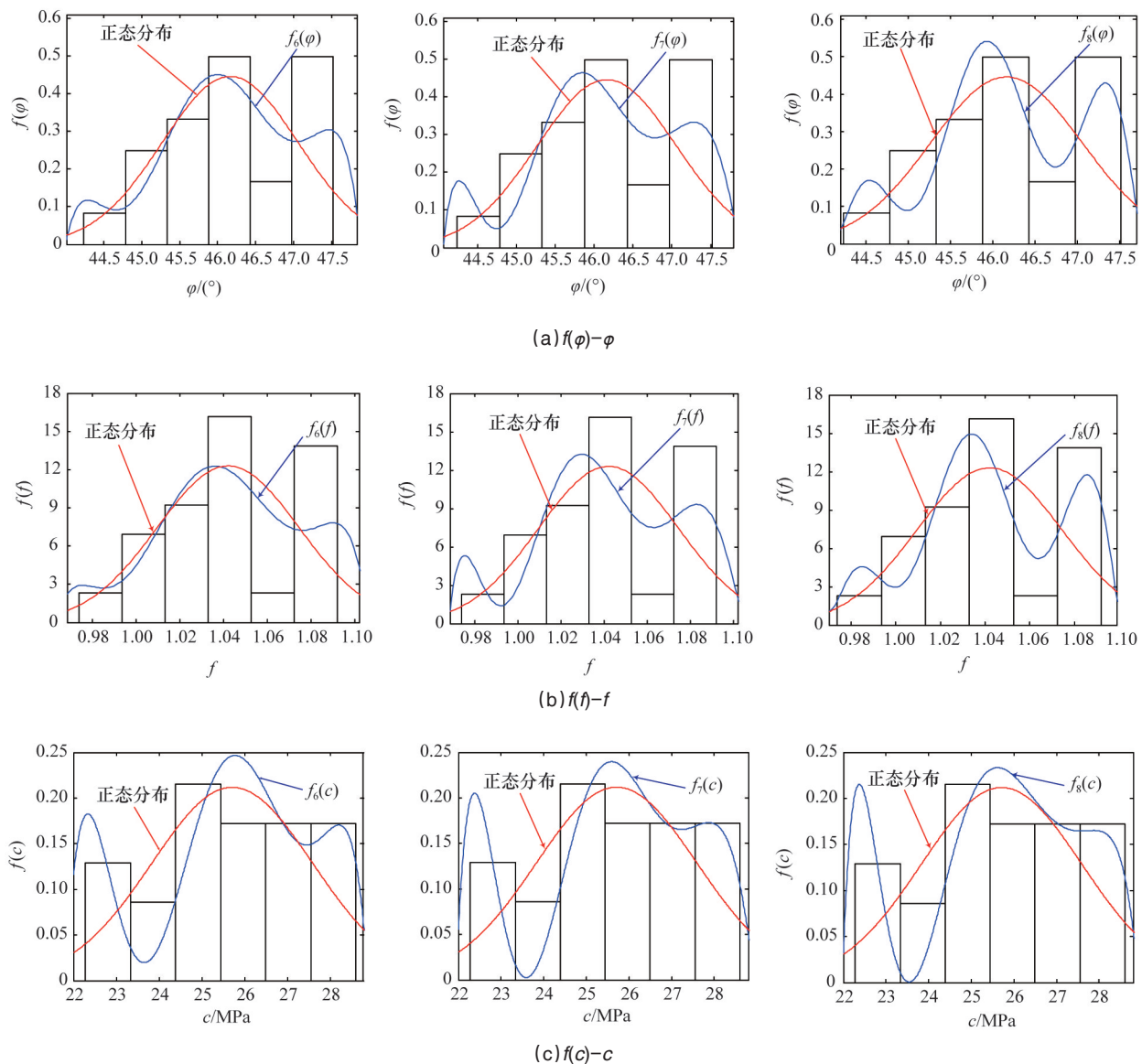


图3 概率密度函数曲线比较

Fig. 3 Comparison of probability density function curves

## 6 结论

1) 以7组常规三轴试验数据为原始信息,根据组合理论和线性回归分析方法,构建了参数 $\varphi$ 、 $\gamma$ 和 $c$ 的小样本信息库,克服了样本容量不足的缺陷。

2) 提出了用勒让德正交多项式推断M-C强度准则参数概率分布的方法。研究表明,所得到的概率分布的精度优于传统方法得到的正态分布,更加接近M-C强度准则参数实际观测数据的分布规律。相对于有限比较法得到的正态分布,基于勒让德多项式推断得到的概率分布函数能够适用于样本容量较小的情形。

3) M-C抗剪强度参数概率分布的勒让德多项式推断法,直接根据试验样本信息和统计分析方法得到随机参数的概率分布函数,而不是预先假定样本数据服从某经典分布,因此具有更加充分的数学和物理意义。

## 参考文献 (References)

- [1] Jaeger J C, Cook N G W, Zimmerman R. Fundamentals of rock mechanics [M]. John Wiley & Sons Inc., 2009.
- [2] Bejarbaneh B Y, Armaghani D J, Amin M F M. Strength characterisation of shale using Mohr-Coulomb and Hoek-Brown criteria[J]. Measurement, 2015, 63: 269-281.
- [3] Wang S, Wu Z, Guo M, et al. Theoretical solutions of a circular tunnel with the influence of axial in situ stress in elastic-brittle-plastic rock[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2012, 30: 155-168.
- [4] Al-Ajmi A M, Zimmerman R W. Relation between the Mogi and the Coulomb failure criteria[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2005, 42(3): 431-439.
- [5] You M. Three independent parameters to describe conventional triaxial compressive strength of intact rocks[J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2010, 2(4): 350-356.
- [6] You M. Comparison of the accuracy of some conventional triaxial strength criteria for intact rock[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2011, 48(5): 852-863.
- [7] 宫凤强, 侯尚骞, 岩小明. 基于正态信息扩散原理的Mohr-Coulomb强度准则参数概率模型推断方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(11): 2225-2234.  
Gong Fengqiang, Hou Shangqian, Yan Xiaoming. Probability model deduction method of Mohr-Coulomb criteria parameters based on normal information diffusion principle[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, 32(11): 2225-2234.
- [8] 刘东升, 张浪, 宋强辉, 等. 岩体结构面强度的可靠度分析[J]. 岩土力学, 2009, 30(2): 328-332.  
Liu Dongsheng, Zhang Lang, Song Qianghui, et al. Reliability analysis of strength for joint in rock mass[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(2): 328-332.
- [9] 严春风, 刘东燕, 张建辉, 等. 岩土工程可靠度关于强度参数分布函数模型的敏感性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(1): 36-39.  
Yan Chunfeng, Liu Dongyan, Zhang Jianhui, et al. The susceptibility analysis of reliability for the probability distribution types of parameters in strength criterion[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1999, 18(1): 36-39.
- [10] 姜彤, 马莎, 李永新. 抗剪强度 $c$ 、 $\varphi$ 值概率分布对边坡可靠性分析的影响[J]. 华北水利水电学院学报, 2004, 25(3): 46-49.  
Jiang Tong, Ma Sha, Li Yongxin. The study of effect on the reliability of rock slope by different probability distribution of shear strength  $c$ ,  $\varphi$  [J]. Journal of North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, 2004, 25(3): 46-49.
- [11] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 基于Copula函数的抗剪强度参数间相关性模拟及边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(12): 2284-2291.  
Tang Xiaosong, Li Dianqing, Zhou Chuangbing, et al. Modeling dependence between shear strength parameters using Copulas and its effect on slope reliability[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 34(12): 2284-2291.
- [12] Tang X S, Li D Q, Rong G, et al. Impact of copula selection on geotechnical reliability under incomplete probability information[J]. Computers and Geotechnics, 2013, 49: 264-278.
- [13] 罗冲, 殷坤龙, 陈丽霞, 等. 万州区滑坡滑带土抗剪强度参数概率分布拟合及其优化[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(9): 1588-1593.  
Luo Chong, Yin Kunlong, Chen Lixia, et al. Probability distribution fitting and optimization of shear strength parameters in sliding zone along horizontal-stratum landslides in Wanzhou city[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(9): 1588-1593.
- [14] 杨凯, 刘东升, 易前应, 等. 重庆市岩石抗剪强度参数统计分析及应用[J]. 后勤工程学院学报, 2008, 24(2): 18-21.  
Yang Kai, Liu Dongsheng, Yi Qianying, et al. Parameter statistic analysis and application of rock shearing strength in Chongqing[J]. Journal of Logistical Engineering University, 2008, 24(2): 18-21.
- [15] 李红英, 谭跃虎, 赵辉. 某滑坡体岩土参数概率分布统计分析方法研究[J]. 地下空间与工程学报, 2012, 8(3): 659-665.  
Li Hongying, Tan Yuehu, Zhao Hui. The statistical analysis technique research on probability distribution of geotechnical parameters of one landslide[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2012, 8(3): 659-665.
- [16] 宫凤强, 李夕兵, 邓建. 基于正交多项式逼近法的岩土参数概率分布推断[J]. 岩土工程技术, 2005, 19(3): 144-147.  
Gong Fengqiang, Li Xibing, Deng Jian. The inference of probabilistic distribution of geotechnical parameter by using orthogonal polynomial[J]. Geotechnical Engineering Technique, 2005, 19(3): 144-147.
- [17] 宫凤强, 李夕兵, 邓建, 等. 岩土参数概率密度函数的正交多项式推断[J]. 地下空间与工程学报, 2006, 2(1): 108-111.  
Gong Fengqiang, Li Xibing, Deng Jian, et al. Assessment of probability distribution of mechanical parameters of rock and soil by using Legendre polynomial[J]. Chinese Journal Underground Space and Engineering, 2006, 2(1): 108-111.
- [18] 宫凤强, 李夕兵. 基于Legendre正交多项式逼近法的结构可靠性分析[J]. 工程力学, 2008, 25(6): 225-229.  
Gong Fengqiang, Li Xibing. Structural reliability analysis using Legendre orthogonal polynomial approximate method[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(6): 225-229.
- [19] 赵奎, 邓晓平, 曾鹏, 等. 三轴试验确定抗剪强度参数的计算方法[J]. 矿业研究与开发, 2013, 33(4): 27-29.  
Zhao Kui, Deng Xiaoping, Zeng Peng, et al. Calculation methods of parameters of shear strength by triaxial compression test[J]. Mining Research and Development, 2013, 33(4): 27-29.
- [20] 余东明, 姚海林, 吴少锋. 三轴试验抗剪强度参数值回归分析法的区别与修正[J]. 岩土力学, 2012, 33(10): 3037-3042.  
Yu Dongming, Yao Hailin, Wu Shaofeng. Difference and modification of regression analysis methods to estimate shear strength parameters obtained by triaxial test[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, 33(10): 3037-3042.
- [21] 陈立宏, 陈祖煜, 李广信. 三轴试验抗剪强度指标线性回归方法的讨论[J]. 岩土力学, 2005, 26(11): 1785-1789.  
Chen Lihong, Chen Zuyu, Li Guangxin. Discussion of linear regression method to estimate shear strength parameters from results of triaxial tests [J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(11): 1785-1789.
- [22] 宫凤强, 李夕兵, 邓建. 基于第二类切比雪夫多项式的岩土参数概率分布推断[J]. 土工基础, 2005, 19(4): 54-57.  
Gong Fengqiang, Li Xibing, Deng Jian. Probabilistic distribution of rock and soil parameter by using the second Chebyshe polynomial[J]. Soil Engineering and Foundation, 2005, 19(4): 54-57.
- [23] 邓建, 李夕兵, 古德生. 岩石力学参数概率分布的信息熵推断[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(13): 2177-2181.  
Deng Jian, Li Xibing, Gu Desheng. Probability distribution of rock mechanics parameters by using maximum entropy method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(13): 2177-2181.

(编辑 陈华蛟)