

# 拓扑结构对网络承载能力的影响

孙磊<sup>1</sup>, 李荣<sup>2</sup>, 靳聪<sup>1</sup>, 陈孝国<sup>3</sup>

1. 中国矿业大学力学与建筑工程学院, 北京 100083

2. 浙江商业职业技术学院财金学院, 杭州 310053

3. 黑龙江科技大学理学院, 哈尔滨 150022

**摘要** 通过建立3种典型的复杂网络模型及对应的运输模型, 数值计算并仿真试验拓扑结构指标和网络承载能力的变化。结果显示: 3种网络承载能力的数值计算结果和仿真试验结果基本吻合; 核心节点的存在使得无标度网络的节点最大介数值所占比重高于其他网络, 导致网络的承载能力最小; 随机网络的节点最大介数值所占比重低于其他网络, 导致承载能力最大; 随着平均度的增大, 各类型网络承载能力增加明显, 但各种拓扑结构指标对承载能力提升的贡献不同。

**关键词** 复杂网络; 承载能力; 仿真; 拓扑结构

**中图分类号** N94

**文献标志码** A

**doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2015.01.015

## Influence of network topology on network capacity

SUN Lei<sup>1</sup>, LI Rong<sup>2</sup>, JIN Cong<sup>1</sup>, CHEN Xiaoguo<sup>3</sup>

1. School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining & Technology, Beijing 100083, China

2. School of Accounting and Finance, Zhejiang Business College, Hangzhou 310053, China

3. School of Science, Heilongjiang University of Science and Technology, Harbin 150022, China

**Abstract** Three typical complex network models and corresponding traffic routing models were established to carry out numerical computation and simulation of topological indicators and network capacity, and empirical analysis of how network capacity is influenced by network topology was conducted. The results show that numerical calculation results and experimental results of the capacity of three different networks were roughly consistent. With existence of the core node, scale-free network had the shortest average travel path, and the proportion of the largest betweenness was much higher than that in other networks, leading to minimum capacity of the scale-free network; the proportion of the largest betweenness of nodes in random network was lower than that in other networks, leading to maximum capacity of the random network. The increase of average degree resulted in significant increase of network capacity, but the contribution of different topological indicators was not the same. Understanding the quantitative relation between network topology and network capacity is beneficial to conducting effective prevention and intervention concerning dynamic processes in the network.

**Keywords** complex network; network capacity; simulation; topology

1998年Watts等<sup>[1]</sup>提出的小世界网络模型与1999年Barabási等<sup>[2-3]</sup>提出的无标度网络模型, 引发了全球范围内复杂网络研究的浪潮。起初的研究主要集中在网络的拓扑结构上, 随着研究的深入, 更加关注网络上的动力学过程。

复杂网络的结构决定功能。网络上的动力学行为受到

网络拓扑结构的影响<sup>[4,5]</sup>。在网络上的相继故障动力学研究中, Moreno等<sup>[6,7]</sup>指出分布较均匀的网络对故障更有承受能力。Newman等<sup>[8]</sup>对比了相近平均度的均匀网络和无标度网络的相继故障, 指出均匀网络攻击的鲁棒性好于非均匀网络。田旭光等<sup>[9]</sup>从拓扑结构、链路容量优化、路由策略优化的

收稿日期: 2014-05-05; 修回日期: 2014-08-30

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12531577); 黑龙江科技大学青年才俊培养计划项目(20120501)

作者简介: 孙磊, 博士研究生, 研究方向为工程管理, 电子信箱: cumtb\_sunlei@163.com; 李荣(通信作者), 讲师, 研究方向为金融服务, 电子信箱:

lrlr1212@sina.com

引用格式: 孙磊, 李荣, 靳聪, 等. 拓扑结构对网络承载能力的影响[J]. 科技导报, 2015, 33(1): 86-89.

角度研究了抗毁性优化问题。为提高无标度网络对蓄意攻击的抗毁性,瞿泽辉等<sup>[10]</sup>提出了SL(switch link)和SH(split hub)。随着运输模型<sup>[5,11,12]</sup>研究的兴起,网络承载能力(即单位时间内网络所能承受的最大进入负荷数)的研究受到关注。以往关于拓扑结构对网络承载能力影响的研究,大都基于仿真试验并以定性研究为主。Guimerà等<sup>[13]</sup>证明了均匀网络由于缺少高介数节点而具有更大的网络承载能力,该结论也通过对无标度网络和均匀网络系统仿真得到证实<sup>[14]</sup>。Zhao等<sup>[11]</sup>基于概率统计方法对影响网络承载能力的因素进行了分析,指出承载能力与网络平均最短路径和节点最大介数值所占比重成反比,并提出网络承载能力的数值计算公式,但有效性还需要实践检验。

本研究从定量角度出发,基于Zhao等<sup>[11]</sup>提出的网络承载能力数值计算公式,以三大类型网络为底层拓扑结构,通过仿真试验对该计算公式进行检验;针对所构建的网络,实证分析不同类型网络拓扑结构指标与网络承载能力的数量变化关系,以明确不同拓扑结构指标对网络承载能力变动的贡献。

## 1 复杂网络

### 1.1 网络生成方法

1) BA(Barabási-Albert)无标度网络构造算法。从一个具有 $m_0$ 个节点的初始网络开始,每次引入一个新节点连接到 $m$ 个存在节点上, $m \leq m_0$ 。优先连接:新节点与存在节点 $i$ 相连接的概率 $\Pi_i$ 与节点 $i$ 的度 $k_i$ 、节点 $j$ 的度 $k_j$ 之间满足

$$\Pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (1)$$

2) WS小世界网络模型构造算法。规则图:考虑一个含有 $N$ 节点的最近邻耦合网络,围成环形,每个节点都与左右相邻的 $H/2$ 个节点相连, $H$ 是偶数。随机化重连:以概率 $p$ 随机地重连网络中每条边,边的一端不变,而另一端取网络中随机选择的一个节点。本研究规定,任意两个不同节点之间至多只能有一条边,并且每一个节点都不能有边与自身相连。

3) 在WS小世界网络模型构造中选择 $p=1$ ,即得到完全随机网络。

### 1.2 拓扑结构指标

1) 平均最短路径长度。平均最短路径长度是网络的一个重要统计特征,它确定了网络中节点对的平均分离度。平均最短路径长度是网络中所有节点对之间的最短路径长度的平均值,记为 $D$ 。

$$D = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{ij} d_{ij} \quad (2)$$

式中, $N$ 为网络中的节点数; $d_{ij}$ 为节点 $i$ 到 $j$ 的最短路径长度。

2) 节点介数。在使用最短路径路由算法的网络中,节点介数指标刻画了负荷经过给定节点的可能性。节点介数值

大,节点在网络中就居于核心地位。具体定义为

$$B_j = \frac{2}{(N-1)(N-2)} \sum_{h < k} \frac{g_{hk}(j)}{g_{hk}} \quad (3)$$

式中, $g_{hk}$ 表示节点 $h$ 和节点 $k$ 之间的最短路径数, $g_{hk}(j)$ 表示节点 $h$ 和节点 $k$ 之间经过节点 $j$ 的最短路径数, $(N-1)(N-2)/2$ 表示最大可能的节点介数。

### 1.3 运输模型

为模拟现实网络,引入运输模型,考虑网络的拓扑结构和网络上的负荷运动,本研究做以下假设:

1) 每时每刻进入网络的负荷数为 $R$ ,负荷的起点和终点随机在网络中产生,负荷按照最短路径行进(当起点和终点之间存在多条最短路径时,随机选取一条),同时每时每刻也有负荷到达目的地,而在下一时刻从网络中消失。

2) 在网络中每个节点都有一定处理负荷的能力 $C$ ,假设所有节点的处理能力均相等。当通过某个节点的负荷数超过其处理能力(节点处理能力表示节点能允许同时通过的负荷个数)时,会产生局部拥堵,局部拥堵会导致网络上的负荷集聚进而增大负荷到达目的地的难度。

3) 在网络中每个负荷都有它的目的地,因此即使在出现拥堵的情况下,也不改变自己的行进路线,只是延长通过拥堵节点的等待时间。此外负荷通过拥堵节点按照到达该节点的时间顺序“先进先出”。

### 1.4 网络承载能力数值计算

假设各节点处理能力 $C$ 均相同,根据介数定义,最大介数节点由于处于核心位置,最容易出现拥堵,并且拥堵会迅速传播到整个网络。基于上述假设,计算网络承载能力<sup>[11]</sup>。

负荷按照最短路径行进,一个刚产生的负荷通过最大介数节点 $L_{max}$ 的概率是 $B_{L_{max}} / \sum_{j=1}^N B_j$ 。在每个时间步有 $R$ 个负荷产生,因此每个时间步到达最大介数节点的负荷平均数为

$$Q_{in} = RDB_{L_{max}} / \sum_{j=1}^N B_j \quad (4)$$

式中, $D$ 为网络平均最短路径, $L_{max}$ 为最大介数节点编号。每个时间步最大介数节点的处理能力为

$$Q_{out} = C_{L_{max}} = C \quad (5)$$

当最大介数节点的进入负荷数持续超过其处理能力时,该节点产生拥堵,网络随之产生拥堵。因此式(4)和式(5)成立时,可计算网络的承载能力 $R_c$ ,即单位时间内网络保持稳定状态所能承受的最大进入负荷数。

$$Q_{out} = Q_{in} \quad (6)$$

$$R_c DB_{L_{max}} / \sum_{j=1}^N B_j = C \quad (7)$$

## 2 仿真试验

利用Matlab 7.11.0(R2010b)软件进行试验。

### 2.1 拓扑结构指标计算

1) 分别生成节点数 $N=100$ 、平均度 $\langle K \rangle=4$ 和 $\langle K \rangle=6$ 的BA

无标度网络、WS小世界网络( $p=0.1$ )和随机网络( $p=1$ )。要求:生成BA无标度网络时,选择 $m_0=5, m=2$ ;生成网络的节点之间必须是通达的。通过在程序中增加检验环节实现,直到产生符合要求的网络。

2) 运用dijkstra函数和betweenness\_centrality函数分别计算出三类网络的平均最短路径和各节点介数值。重复生成50个同类型网络,计算结果取平均值。

### 2.2 网络承载能力仿真

1) 每时刻在网络上产生 $R$ 个负荷,利用randint函数在 $[1, 100]$ 内随机选择起点和终点(起点和终点不能相同),按照dijkstra函数选择最短路径,每一时间步行进一步。

2) 每个节点都有一定处理能力 $C$ (试验中令 $C=3$ ), $t$ 时刻假设等待通过某节点 $i$ 的负荷数为 $Q$ (大于 $C$ ),则 $t+1$ 时刻节点 $i$ 只能允许 $C$ 个负荷通过(按照“先进先出”原则),超过部分在 $t+1$ 时刻继续等待,在 $t+2$ 及以后时刻通过。负荷全部通过节点 $i$ 的时间用函数 $\text{ceil}(Q/C)$ 表示。

3) 按照步骤2循环下去,直到 $t=2000$ 。

4) 分别计算 $t$ 从1到2000时间步对应的网络上的负荷数,形成总负荷数时间序列。引入 $Z = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \langle \Delta N_p \rangle / (\Delta t \cdot R)$ 指标,其中 $\Delta N_p = N(t + \Delta t) - N(t)$ , $N(t)$ 为 $t$ 时刻网络上的负荷数, $\langle \Delta N_p \rangle$ 表示在 $\Delta t$ 时刻内取平均数。 $Z$ 值的几何意义是总负荷数序列随时间的变化斜率,即网络上总负荷数的增长速度,且 $0 \leq Z \leq 1$ 。 $Z=0$ 时,网络处于平稳状态; $Z>0$ 时,随着时间延续网络上的负荷数越来越多,网络处于拥堵状态。

### 2.3 三大网络拓扑结构对比

计算上述网络节点的最大介数值以及网络的平均最短路径(表1)。

表1  $\langle K \rangle=4$ 和 $\langle K \rangle=6$ 时不同网络主要指标对比

Table 1 Comparison of key indicators of different networks at  $\langle K \rangle=4$  and  $\langle K \rangle=6$

网络类型	$\langle K \rangle=4$			$\langle K \rangle=6$		
	$B_{L_{\max}}$	$B_{L_{\max}} / \sum_{j=1}^N B_j$	$D$	$B_{L_{\max}}$	$B_{L_{\max}} / \sum_{j=1}^N B_j$	$D$
BA无标度网络	0.6858	0.174	2.941	0.4300	0.135	2.571
WS小世界网络	0.3816	0.047	4.987	0.2412	0.044	3.680
随机网络	0.1894	0.037	3.502	0.1260	0.035	2.778

从表1可以看出:

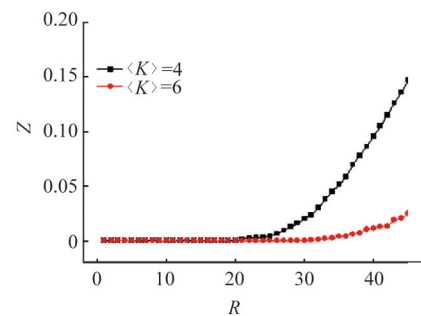
1) 各网络拓扑结构指标对比。BA无标度网络的 $B_{L_{\max}} / \sum_{j=1}^N B_j$ 远高于其他两种类型网络,而 $D$ 最短;随机网络的 $B_{L_{\max}} / \sum_{j=1}^N B_j$ 最小,而 $D$ 介于其他网络之间;WS小世界网络的 $D$ 最大, $B_{L_{\max}} / \sum_{j=1}^N B_j$ 介于其他网络之间。

2) 平均度对拓扑结构指标的影响。随着平均度 $\langle K \rangle$ 从4增加到6,三大网络的 $D$ 均下降,其中WS小世界网络和随机网络下降明显,分别从4.987和3.502下降到3.680和2.778,降幅均超过20%;三大网络的 $B_{L_{\max}} / \sum_{j=1}^N B_j$ 均下降,其中BA无标度网络下降的最明显,从0.174下降到0.135,降幅达22.4%。

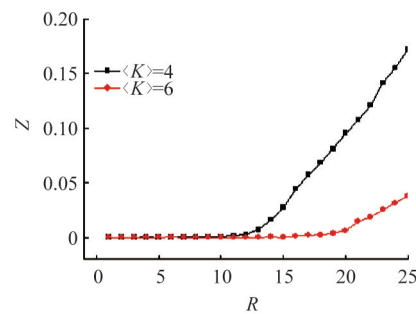
### 2.4 三大网络承载能力仿真试验结果对比

平均度 $\langle K \rangle=4$ 和 $\langle K \rangle=6$ 时,三大网络承载能力仿真试验结果如图1所示。对应的 $Z$ 指标为重复试验50次(即生成50个同类型网络进行试验)再取平均值。

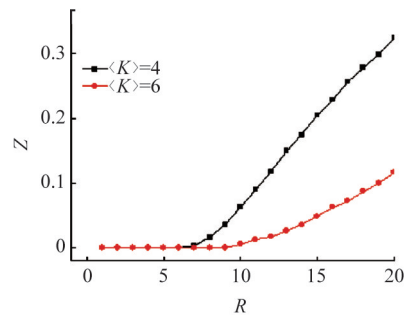
在实证分析中,可以通过 $Z$ 指标从0向非0的转变寻找网络承载能力 $R_c$ 。从图1可以看出,BA无标度网络的承载能力最小,其次是WS小世界网络,随机网络的承载能力最大;随着平均度的增加,3种类型网络的承载能力均大幅上升。



(a) 随机网络模型



(b) WS小世界网络模型



(c) BA无标度网络模型

图1 不同网络的 $Z$ 与 $R$ 之间的关系

Fig. 1 Relationship of  $Z$  and  $R$  in different networks

### 3 结果分析

#### 3.1 网络承载能力试验值与数值计算结果比较

由公式(7)可以得到网络承载能力的数值计算结果,而仿真试验值可以由图1根据 $Z$ 指标从0向非0的转变而得到,具体结果如表2所示。

表2 网络承载能力的数值计算结果和试验值对比  
Table 2 Comparison of calculation results and experimental results of network capacity

网络类型	$\langle K \rangle=4$		$\langle K \rangle=6$	
	数值计算结果	仿真试验值	数值计算结果	仿真试验值
无标度网络	6	7	9	10
小世界网络	13	12	19	18
随机网络	22	20	31	31

从表2可以看出:三大网络承载能力的数值计算结果和仿真试验值基本吻合。网络承载能力与平均最短路径 $D$ 和节点最大介数值所占比重 $B_{i_{\max}}/\sum_{j=1}^N B_j$ 成反比,且 $D \cdot B_{i_{\max}}/\sum_{j=1}^N B_j$ 越大,网络承载能力越小。

#### 3.2 拓扑结构对网络承载能力的影响分析

从表1、2和图1可以看出:

1) 3种典型网络承载能力差异的原因各不相同。平均度 $\langle K \rangle$ 为4和6时,BA无标度网络的 $B_{i_{\max}}/\sum_{j=1}^N B_j$ 分别为0.174和0.135,远远高于其他2个网络,虽然 $D$ 最小,但 $D \cdot B_{i_{\max}}/\sum_{j=1}^N B_j$ 最大,导致它的承载能力最低;而平均度 $\langle K \rangle$ 为4和6时,随机网络均具有最小的 $B_{i_{\max}}/\sum_{j=1}^N B_j$ (分别为0.037和0.035)和较短的 $D$ ,导致它的承载能力最大。

2) 不同拓扑结构指标对网络承载能力变动的贡献大小不同。随着平均度的增大,三大网络的承载能力均增长50%左右,但增长的主要原因各不相同。其中:BA无标度网络 $B_{i_{\max}}/\sum_{j=1}^N B_j$ 从0.174大幅下降到0.135,降幅达22.4%,导致该网络承载能力的大幅上升;WS小世界网络和随机网络的 $D$ 分别从4.987和3.502大幅下降到3.680和2.778,降幅均超过20%,导致他们承载能力的大幅上升。

### 4 结论

1) 3种类型网络承载能力的数值计算结果和仿真试验值基本吻合。网络承载能力与平均最短路径 $D$ 和节点最大介数值所占比重 $B_{i_{\max}}/\sum_{j=1}^N B_j$ 成反比。

2) 拓扑结构对网络承载能力影响显著。3种类型网络承载能力差异的原因各不相同。BA无标度网络的 $B_{i_{\max}}/\sum_{j=1}^N B_j$

远远高于其他2个网络,导致它的承载能力最低;随机网络具有最小的 $B_{i_{\max}}/\sum_{j=1}^N B_j$ 和较短的 $D$ ,导致它的承载能力最大。其次,不同拓扑结构指标对网络承载能力变动的贡献大小不同。随着平均度的增大,三大网络的承载能力增大,其中: $B_{i_{\max}}/\sum_{j=1}^N B_j$ 的变动对BA无标度网络承载能力的提升贡献明显;而 $D$ 的变动对WS小世界网络和随机网络承载能力的提升贡献明显。

了解结构对功能的影响,对于从拓扑结构角度优化网络上的动力学过程具有重要意义。研究结果表明,无标度网络节点最大介数值所占比重在三大类型网络中最大,是导致无标度网络承载能力低的主要原因。因此在无标度网络模型构造中,可以添加几个核心节点,使得节点最大介数值所占比重大幅下降,而平均最短路径变化不大。如此,既保留了无标度网络的主要结构特性又大幅提高了网络承载能力。

#### 参考文献(References)

- [1] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of small world networks[J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442.
- [2] Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512.
- [3] Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks[J]. Reviews of Modern Physics, 2002, 74: 47-97.
- [4] Toroczkai Z, Bassler K E. Network dynamics: Jamming is limited in scale-free systems[J]. Nature, 2004, 428(6984): 716-716.
- [5] Arenas A, Díaz Guílera A, Guímera R. Communication in networks with hierarchical branching[J]. Physical Review Letters, 2001, 86(14): 3196.
- [6] Moreno Y, Gómez J B, Pacheco A F. Instability of scale-free networks under node-breaking avalanches[J]. Europhysics Letters, 2002, 58(4): 630-636.
- [7] Motter A E, Lai Y C. Cascade-based attacks on complex networks[J]. Physical Review E, 2002, 66(6): 065102.
- [8] Newman M E J, Strogatz S H, Watts D J. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications[J]. Physical Review E, 2001, 64(2): 026118.
- [9] 田旭光, 朱元昌, 邸彦强. 复杂网络抗毁性优化问题的研究[J]. 系统科学学报, 2014(1): 60-65.  
Tian Xuguang, Zhu Yuanchang, Di Yanqiang. Survey on optimization for invulnerability of complex networks[J]. Journal of Systems Science, 2014(1): 60-65.
- [10] Qu Z H, Wang P, Song C M, et al. Enhancement of scale-free network attack tolerance[J]. Chinese Physics B, 2010, 19(11): 110504.
- [11] Zhao L, Lai Y C, Park K, et al. Onset of traffic congestion in complex networks[J]. Physical Review E, 2005, 71(2): 026125.
- [12] Tadić B, Thurner S, Rodgers G J. Traffic on complex networks: Towards understanding global statistical properties from microscopic density fluctuations[J]. Physical Review E, 2004, 69(3): 036102.
- [13] Guimerà R, Diaz Guílera A, Vega Redondo F, et al. Optimal network topologies for local search with congestion[J]. Physical Review Letters, 2002, 89(24): 248701.
- [14] Tadić B, Rodgers G J, Thurner S. Transport on complex networks: Flow, jamming and optimization[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2007, 17(07): 2363-2385.

(编辑 陈华媛)