

# 基于四叉树网格的2.5D直流电阻率法有限元数值模拟

邹桂红, 梁华庆, 耿敏

中国石油大学(北京)地球物理与信息工程学院, 北京 102249

**摘要** 在VC环境下,使用C语言实现了基于四叉树网格的2.5D直流电阻率法有限元数值模拟程序。3个典型模型的算例被用来证明四叉树网格方案适合于复杂地电模型的数值模拟:分别使用四叉树网格和等距全网格对水平两层模型进行了计算。后一方案与前一方案相比,在数值模拟精度上没有明显的差别,而使用的网格数却有大幅度的减少;计算了覆盖层下倾斜高阻板状体模型,高阻板状体的形态、埋深清晰地显示在偶极-偶极视电阻率断面图上;仿真了中间梯度法测量2D地形下埋藏直立高阻板状体的情形,利用比较法对计算结果进行地形改正后,高阻体的埋深被计算出来。

**关键词** 四叉树网格;2.5D;有限元法;电阻率法;悬挂节点

**中图分类号** P631.32

**文献标志码** A

**doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2014.h1.017

## Finite Element 2.5D Direct Current Resistivity Modeling Based on Quadtree Mesh

ZOU Guihong, LIANG Huaqing, GENG Min

College of Geophysics and Information Engineering, China University of Petroleum, Beijing 102249, China

**Abstract** A geoelectric numerical modeling program based on quadtree is developed using C language under VC development environment. Three experiments are used to prove the scheme based on quadtree mesh is suitable for complex geoelectric model simulations. The first experiment is the calculation of horizontal two-layer model and the result shows that the scheme using quadtree mesh does not have significantly lower numerical simulation accuracy than that using equidistant grids, but many grids are saved. The second experiment is the calculation of the model with an inclined high-resistivity plate-like body buried, with the contour and the burial depth of the body shown clearly on the dipole-dipole apparent resistivity pseudosection. The third experiment is the measuring of the model with a high-resistivity plate-like body in the vertical direction buried under 2D terrain using intermediate gradient method. After eliminating the effect of terrain factors by the comparative method, the burial depth of the high-resistivity body is calculated.

**Keywords** quadtree mesh; 2.5D; finite element method; resistivity method; hanging node

直流电阻率法是电法勘探的基本方法之一,是一种稳定电流场下进行的勘探方法。从20世纪70年代开始,学者对稳定电流场有限元数值模拟进行了大量的研究,取得丰富的成果<sup>[1]</sup>。其中,进行2D数值模拟时网格单元多为结构化四边形,进行3D数值模拟时网格单元多为结构化六面体<sup>[2-5]</sup>。原理上只要网格剖分得足够小,使用结构化四边形/六面体的网格剖分方案可以模拟任意复杂地电模型,但是在实际应用中,计算资源有限性和地电模型复杂性总是存在着矛盾,因

此在仿真复杂地电模型时,如果要追求更高的精度,就要考虑结构化四边形/六面体网格在拟合复杂地电模型时所引起的几何误差,因为几何误差会传递到最终的数值结果中去。

减小几何误差的办法主要有3类,第1类是对结构化四边形/六面体进行改造,把四边形/六面体分解为三角形/四面体、三棱柱等其它形状的多边形/多面体,或者把规则四边形/六面体转为曲面四边形/六面体,此类改造一定程度上减小了网格与模型之间的几何误差,使得某些场合有很好的应用效

收稿日期:2013-07-15;修回日期:2014-01-08

基金项目:中国石油大学(北京)科研基金项目(FZG201003)

作者简介:邹桂红,博士研究生,研究方向为地电场数值模拟,电子信箱:guihongzou@sina.com

引用格式:邹桂红,梁华庆,耿敏.基于四叉树网格的2.5D直流电阻率法有限元数值模拟[J].科技导报,2014,32(4/5):100-104.

果,如对起伏地形下地电模型的数值模拟<sup>[6-10]</sup>。但这种改造是局部的或是针对某种特定的应用,如果使用上述的改造方案对任意复杂模型进行高精度的数值模拟,无论从原理上还是从程序编制上来说都有难度。第2类是使用非结构化三角形/四面体网格,基于非结构化三角形/四面体直流电阻率法有限元数值模拟的优点是逼近复杂模型所使用的网格资源少,网格与模型之间几何误差小,数值模拟的精度高<sup>[11-15]</sup>。反演是地球物理的核心问题之一,反演程序要调用正演模块,有时还要构造光滑度矩阵、添加先验信息,但使用非结构化三角形/四面体网格的反演方案不利于构造光滑度矩阵和添加先验信息。第3类是使用四/八叉树网格,这种网格对曲面边界的拟合能力虽不如非结构化三角形/四面体,但优于结构化四边形/六面体。四/八叉树网格方案的优势是在反演程序中方便地构造光滑度矩阵,添加先验信息,即容易达成正反演模型的统一<sup>[16,17]</sup>。通常对复杂地质模型进行3D正演模拟会消耗大量的计算资源,当地质构造有明显的走向时,通过傅里叶变换,3D地电场数值模拟问题可以转换到2.5D问题来求解。

针对四/八叉树网格的数值模拟方案,一些学者已经给出了有限体积元的实现方法<sup>[18]</sup>,本文探讨基于四叉树网格的2.5D直流电阻率法有限元数值模拟,主要工作包括两部分:1)遵照四叉树网格生成原理<sup>[19]</sup>,在VC环境下使用C语言实现四叉树网格生成模块,在此基础上完成基于四叉树的2.5D数值模拟程序;2)用3个典型模型的算例来说明四叉树网格方案适合于复杂地电模型的数值模拟。

## 1 四叉树网格

### 1.1 四叉树网格的特点

有限元网格按生成的单元类型可以分为结构化网格和非结构化网格,所谓结构化网格是指内部节点所邻接的单元数相等的网格类型,地电场数值模拟中常用到的结构化四边形/六面体属结构化网格;与之对应的是非结构化网格,非结构化网格的内部节点所邻接的单元是不相等的,非结构化四面体网格、八叉树网格,非结构化三角形网格、四叉树网格都属于非结构化网格。非结构化网格的优点是局部的网格加密不会造成全局网格的调整,更容易拟合复杂的几何边界。

### 1.2 四叉树网格的悬挂节点问题

在做2.5D直流电阻率有限元数值模拟时,对求解域的离散多采用结构化网格,每个网格单元为四边形,单元内使用双线性插值,插值函数是

$$U = \sum_{i=1}^4 N_i U_i \quad (1)$$

式中, $U$ 是网格单元内待求的场值, $U_i$ 是 $U$ 在四边形四个顶点位置的值, $N_i$ 是对应的双线性插值形函数。四叉树网格的叶子单元也是四边形,如果把这些叶子单元作为最终的计算单元,单元内也使用双线性插值,不可避免地会遇到悬挂节点问题。

四叉树网格的悬挂节点是剖分过程中,相邻叶子单元层次不一致造成的。如图1(a)所示,右边的单元②、③比左边邻居单元①层次深,节点4即所谓悬挂节点。如果四边形单元内使用双线性插值,悬挂节点位置可能造成单元间 $U$ 变化的不一致,从而破坏有限元法的收敛性,如在左边单元①,如果单元内线性插值,那么节点4所在位置 $U$ 的值应该为 $\frac{U_3 + U_5}{2}$ ,而对于单元②、③,节点4则对应了一个独立的自由度 $U_4$ 。针对这种情况,一种简单有效的解决方案是,在粗网格单元内,增加一个节点,如图1(b)的节点9。增加节点9后,①分解成多个三角形,那么单元间 $U$ 的变化做到了协调一致,比如,节点(3,4,9)构成的单元④,如果单元内使用线性插值,那么单元④就与单元②在边(3,4)上 $U$ 都能一致线性变化,在节点3、4上的值分别是 $U_3$ 、 $U_4$ 。

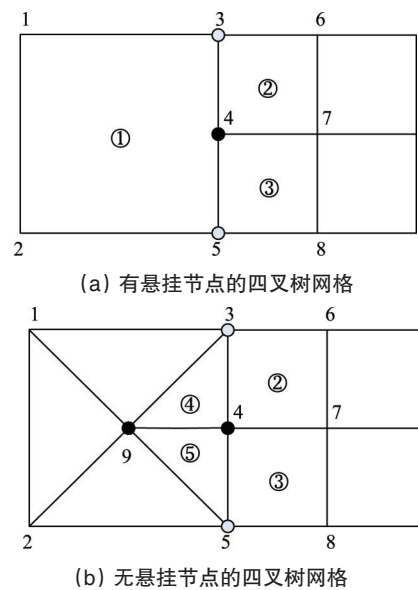


图1 四叉树网格的调整

Fig. 1 Adjustment of quadtree mesh

## 2 电阻率法2.5D有限元数值模拟

如图2所示直流电阻率法正演中,点源置于地表,在待求解区域形成3D电场,电位 $u$ 满足偏微分方程<sup>[20-23]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma \frac{\partial u}{\partial z}) = -I\delta(x-x_A)\delta(y-y_A)\delta(z-z_A) & \in \Omega \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \in \Gamma_s \\ u(x,y,z) = \frac{C}{r} & \in \Gamma_\infty \end{cases} \quad (2)$$

式中, $\sigma$ 为电导率, $I$ 为电流的大小, $\delta$ 为狄拉克函数, $A$ 为点源所在的位置, $\Omega$ 为待求区域, $n$ 是 $\Omega$ 边界的外法线方向单位向量, $\Gamma_s$ 为区域 $\Omega$ 的地表边界, $\Gamma_\infty$ 为区域 $\Omega$ 的无穷远边界, $C$ 是一个常数, $r$ 是无穷远边界上的点到源点的距离。

如果待求区域介质的电导率沿走向无变化,假定走向与 $y$ 方向一致,那么电导率是坐标轴 $x$ 、 $z$ 的函数,式(2)可以写成:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma \frac{\partial u}{\partial z}) + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -I\delta(x-x_A)\delta(y-y_A)\delta(z-z_A) \quad (3)$$

对电位  $u$  在  $y$  方向进行带参数  $k$  的傅里叶变换, 即

$$U(x, z, k) = \int_0^{\infty} u(x, y, z) \cos(ky) dy$$

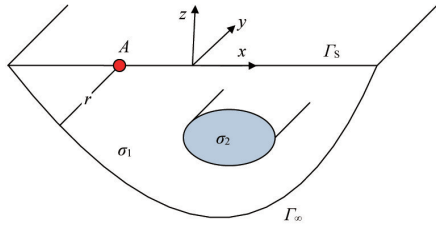


图 2 3D 地电模型示意

Fig. 2 Sketch of a 3D geoelectric model

同时对式(2)右端项及边界条件也进行带参数  $k$  的傅立叶变换, 3D 直流电阻率法方程有 2D 形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma \frac{\partial U}{\partial z}) - k^2 \sigma U = -I\delta(x-x_A)\delta(z-z_A) & \in \Omega \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 & \in \Gamma_s \\ \frac{\partial U}{\partial n} + k \frac{K_1(kr)}{K_0(kr)} \cos(r, n) U = 0 & \in \Gamma_\infty \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $K_0(kr)$ 、 $K_1(kr)$  分别为二类零阶、二类一阶修正贝塞尔函数。式(4)描述了 2.5D 直流电阻率法的边值问题, 其与下列变分问题等价:

$$\begin{cases} I(U) = \int_{\Omega} [\frac{1}{2} \sigma (\nabla U)^2 + \frac{1}{2} k^2 \sigma U^2 - I\delta(A)U] d\Omega \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\infty} \sigma k \frac{K_1(kr)}{K_0(kr)} \cos(r, n) U^2 d\Gamma \\ \delta I(U) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

对求解域用四叉树网格对进行离散, 网格单元为正四边形、三角形, 单元内插值函数是:

$$U = \sum_{i=1}^l N_i U_i \quad (6)$$

式中,  $l$  是单元的节点数,  $U_i$  是第  $i$  个节点自由度的值,  $N_i$  是对应的线性插值形函数。把式(6)代入式(5)得到

$$I(\phi) = \sum I_i(\phi) = \sum \frac{1}{2} U^T K_e U_e - U_A I = \frac{1}{2} U^T K U - U^T P \quad (7)$$

式中,  $I_i$  是式(5)在某个单元的积分,  $U$  是待求各节点  $U$  组成的向量,  $K$  是总刚度矩阵,  $K_e$  是单元积分所生产的系数矩阵,

$U_e$  是单元上各节点  $U$  所组成的向量,  $P$  为  $(0 \ 0 \ \dots \ \frac{U_A}{2} \ \dots \ 0 \ 0)^T$ , 仅电源点所对应位置不为零。对式(7)求得

$$K U = P \quad (8)$$

各单元上  $K_e = K_{1e} + K_{2e} + K_{3e}$ ,

$$K_{1e} = \sigma \int_{\Omega} \nabla N \nabla N^T d\Omega \quad (9)$$

$$K_{2e} = \sigma k^2 \int_{\Omega} N N^T d\Omega \quad (10)$$

$$K_{3e} = \sigma k \int_{\Gamma_\infty} \frac{K_1(kr) \cos(r, n)}{K_0(kr)} d\Omega \quad (11)$$

式(9)和式(10)中的  $N$  是单元内各节点形函数组成的向量。式(8)即是所求解的直流电阻率法有限元方程, 解方程组可得各节点的  $U$ 。最终各点的电位值要通过  $U$  进行反傅立叶变换得到, 通常只需要通过点电源剖面上的电位, 即当  $y=0$  时的电位。

$$u(x, 0, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U(x, z, k) dy \quad (12)$$

式(12)可以用数值积分的办法处理, 数值积分可写为

$$u(x, 0, z) \approx \sum_{i=1}^l g_i U(x, z, k_i) \quad (13)$$

式中,  $l$  为离散波数的个数, 波数  $k_i$  的选取可以通过最优化的方法计算得到<sup>[21,22]</sup>,  $g_i$  是相应的权系数, 本文的数值模拟直接使用了文献中给出的波数<sup>[21]</sup>, 波数及其权值如表 1 所示。

表 1 波数及相应的权系数

Table 1 Wavenumber and the corresponding weight

	1	2	3	4	5
波数	0.004758	0.0407011	0.1408855	0.393225	1.088038
权系数	0.0099472	0.0381619	0.0980327	0.2511531	0.7260814

### 3 数值模拟实验

#### 3.1 水平两层模型

为验证程序的正确性和计算效果, 首先考虑使用两种剖分方案计算水平两层地电模型, 一种是等距正方形完全网格剖分, 网格的大小为  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ , 另一种是四叉树网格剖分。图 3 是两层模型的截面图, 模型第一层电阻率  $\rho_1 = 1 \ \Omega \text{m}$ , 厚度  $h_1 = 4 \text{ m}$ , 第二层电阻率  $\rho_2 = 19 \ \Omega \text{m}$ ,  $h_2 = \infty$ , 点源供电, 电流强度为  $1 \text{ A}$ , 测量电极位置为  $M$ , 点源位置  $A$  设置为坐标原点, 剖分时在坐标原点附近进行了加密, 加密区域是  $24 \text{ m} \times 24 \text{ m}$  的矩形, 坐标原点是矩形上边的中点, 加密区域内网格尺寸为  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ , 四叉树剖分后生成网格的节点数为 2413, 使用等距正方形完全网格, 剖分后网格数是 263169。表 2 列出了两种网格剖分方案的计算结果, 平均相对误差分别是 1.917%、1.981%。两种方案最大相对误差出现在点源附近, 都约等于 14.1%, 这是由于点源的奇异性造成的, 点源 3 m 外的各点的相对误差都在 1% 以内, 平均相对误差分别为 0.56%、0.64%。从数值模拟结果来看, 使用四叉树网格方案较全网格方案, 精度上没有明显的降低, 而使用的网格数大幅度降低。对这个模型的计算初步验证了程序的正确性。

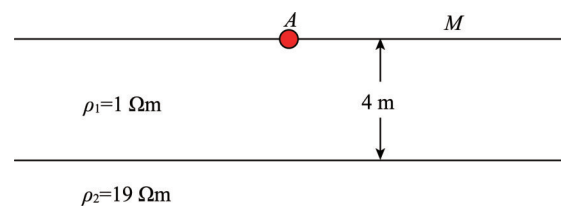


图 3 两层地电模型

Fig. 3 Two layered geoelectric model

表2 两种剖分方案的数值解对比

Table 2 Comparison of the numerical solution of two schemes

测点距离/m	解析解/V	全网格/V	四叉树/V
1	0.250449	0.215203	0.230702
2	0.169941	0.165787	0.166838
3	0.141978	0.139920	0.140622
4	0.126907	0.125824	0.126057
5	0.116904	0.116174	0.116259
6	0.109431	0.108855	0.108868
7	0.103437	0.102927	0.102904
8	0.098413	0.097932	0.097890
9	0.094079	0.093614	0.093559
10	0.090267	0.089810	0.089747
11	0.086865	0.086415	0.086345
12	0.083797	0.083352	0.083260
平均相对误差		1.917%	1.981%

### 3.2 倾斜板状模型

图4为倾斜高阻板状体模型的垂直截面示意图,测量使用的是偶极装置,供电偶极为A、B,AB距离为2 m,O是AB的中点,测量偶极为M、N,MN距离为2 m,O'是MN的中点,电极距 $n=1\sim 10$ ,围岩电阻率 $\rho_1=100\ \Omega m$ ,高阻体电阻率 $\rho_2=500\ \Omega m$ ,在垂直截面上高阻体的左、右顶点位置为 $V_1(-2\ m,-3\ m)$ 、 $V_2(0,-3\ m)$ ,高阻板倾角为 $45^\circ$ ,沿走向方向为无限长。图5是模拟计算所得的偶极—偶极视电阻率等值线图, $\rho_s$ 为视电阻率,从图5可以看出,浅部位置的半封闭圈与倾斜方向一致,空间位置也吻合得较好,这与文献所描述的理论一致<sup>[23]</sup>。

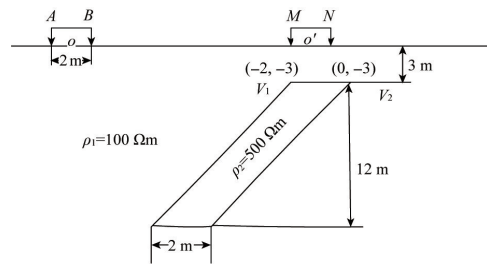


图4 倾斜高阻板状体模型

Fig. 4 Model with an inclined plate-like high-resistivity body

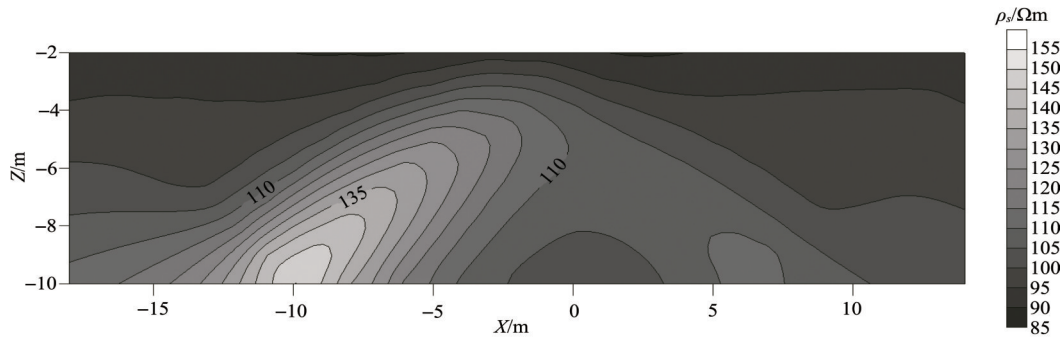


图5 倾斜板状高阻异常体偶极—偶极视电阻率等值线

Fig. 5 Dipole-dipole apparent resistivity pseudo section for the model with an inclined high-resistivity body

### 3.3 起伏地形及改正

在地形起伏区域进行电阻率法相关工作时,由于受地形影响,测量所得到的视电阻率曲线不能准确地反映地质体异常,在分析这些视电阻率曲线时,需要去除地形因素的影响,即所谓地形改正,常用的地形改正方法是对比法<sup>[23]</sup>。如图6所示,二维山脊地形下埋藏一个直立板状的高阻体,围岩电阻率 $\rho_1=100\ \Omega m$ ,高阻体在山脊正下方,顶部埋深 $h=10\ m$ ,电阻率 $\rho_2=500\ \Omega m$ ,截面为 $10\ m\times 80\ m$ ,垂直截面为无限长<sup>[12]</sup>。网格离散后如图7所示,节点数为5400,图形绘制采用了开源软件Geomview<sup>[24]</sup>。图8是中梯装置下的曲线对比,地形改正之前视电阻率曲线和纯地形视电阻率曲线相似,地质体异常没有得到很好的反映,经过对比法地形改正之后,视电阻率曲线和无地形情况下高阻直立板状模型的视电阻率曲线基本一致,通过直立板状的埋深计算公式计算可得异常

体埋深为9.38 m,这与实际埋深吻合较好。

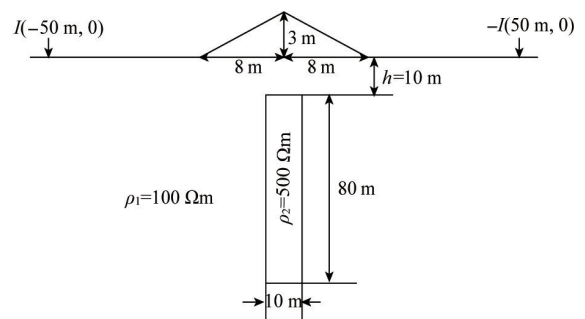


图6 山脊地形下的高阻异常体模型

Fig. 6 Model with a high-resistivity body buried under ridge terrain

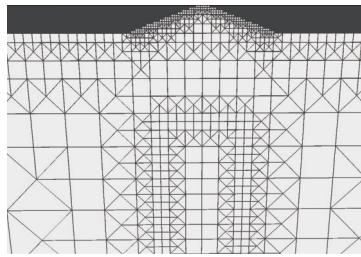


图7 山脊地形下的高阻异常体模型四叉树剖分  
Fig. 7 Quadtree-based mesh of a model with a high-resistivity body buried under ridge terrain

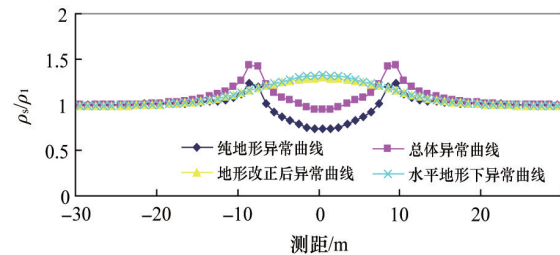


图8 地形影响改正中视电阻率曲线对比  
Fig. 8 Comparison of apparent resistivity curves of terrain correction

#### 4 结论

直流电阻率法有限元数值模拟和四叉树网格的性质决定了四叉树网格适合于复杂地电模型2.5D仿真。

1) 四叉树网格是一种非结构化网格,在逼近复杂地质体几何边界时,对局部网格的加密不会造成全局网格的调整。

2) 在直流电阻率法有限元数值模拟中,使用少量网格的数值模拟方案可以达到等距全网格方案大致相当的精度。

水平两层模型的计算验证了性质(2),即与等距全网格方案相比,四叉树网格数值模拟方案没有导致计算精度的显著降低,然而所使用的网格数却能大幅度减少。覆盖层下倾斜高阻板状模型和2D山脊下埋藏直立板状高阻体模型的计算结果说明,使用四叉树网格方案进行复杂地电模型的2.5D数值模拟是行之有效的。

#### 参考文献 (References)

- [1] Coggon J H. Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method[J]. *Geophysics*, 1971, 36(1): 132-155.
- [2] 阮百尧, 熊彬. 电导率连续变化的三维电阻率测深有限元模拟[J]. *地球物理学报*, 2002, 45(1): 131-138.  
Ruan Baiyao, Xiong Bing. A finite element modeling of three-dimensional resistivity sounding with continuous conductivity[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2002, 45(1): 131-138.
- [3] 阮百尧, 徐世浙. 电导率分块线性变化二维地电断面电阻率测深有限元数值模拟[J]. *地球科学*, 1998, 23(3): 303-307.  
Ruan Baiyao, Xu Shizhe. FEM for modeling resistivity sounding on 2-D geoelectric model with line variation of conductivity within each block [J]. *Earth Science*, 1998, 23(3): 303-307.
- [4] 吴小平, 汪彤彤. 利用共轭梯度算法的电阻率三维有限元正演[J]. *地球物理学报*, 2003, 46(3): 428-432.  
Wu Xiaoping, Wang Tongtong. A 3-D finite element resistivity forward modeling using conjugate gradient algorithm[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2003, 46(3): 428-432.
- [5] 吴小平. 非平坦地形条件下电阻率三维反演[J]. *地球物理学报*, 2005, 48(4): 932-936.  
Wu Xiaoping. 3-D resistivity inversion under the condition of uneven terrain[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2005, 48(4): 932-936.
- [6] Pridmore D F, Hohmann G W, Ward S H, et al. An investigation of finite-element modeling for electrical and electromagnetic data in three dimensions[J]. *Geophysics*, 1981, 46(7): 1009-1024.
- [7] Holcombe H T, Jiracek G R. Three-dimensional terrain corrections in resistivity surveys[J]. *Geophysics*, 1984, 49(4): 439-452.
- [8] 强建科, 罗延钟. 三维地形直流电阻率有限元法模拟[J]. *地球物理学报*, 2007, 50(5): 1606-1613.  
Qiang Jianke, Luo Yanzhong. The resistivity FEM numerical modeling on 3-D undulating topography[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2007, 50(5): 1606-1613.
- [9] 熊彬, 阮百尧, 罗延钟. 复杂地形条件下直流电阻率异常三维数值模拟研究[J]. *地质与勘探*, 2003, 39(4): 60-64.  
Xiong Bin, Ruan Baiyao, Luo Yanzhong. 3-D numerical simulation

- study of DC resistivity anomaly under complicated terrain[J]. *Geology and Prospection*, 2003, 39(4): 60-64.
- [10] 吕玉增, 阮百尧. 复杂地形条件下四面体剖分电阻率三维有限元数值模拟[J]. *地球物理学进展*, 2006, 21(4): 1302-1308.  
Lü Yuzeng, Ruan Baiyao. 3-D resistivity FEM numerical modeling based on tetrahedral element under complicated terrain[J]. *Progress in Geophysics*, 2006, 21(4): 1302-1308.
- [11] 汤井田, 任政勇, 化希瑞. 任意地球物理模型的三角形和四面体有限单元剖分[J]. *地球物理学进展*, 2006, 21(4): 1272-1280.  
Tang Jingtian, Ren Zhengyong, Hua Xirui. Triangle and tetrahedral finite element meshing from arbitrary geophysical model data[J]. *Progress in Geophysics*, 2006, 21(4): 1272-1280.
- [12] 汤井田, 王飞燕. 基于非结构化网格的2.5D直流电阻率模拟[J]. *物探化探计算技术*, 2008, 30(5): 413-413.  
Tang Jingtian, Wang Feiyang. 2.5 D direct current resistivity simulation based on the unstructured mesh[J]. *Computing Techniques Geophysical and Geochemical Exploration*, 2008, 30(5): 413-418.
- [13] 汤井田, 王飞燕, 任政勇. 基于非结构化网格的2.5-D直流电阻率自适应有限元数值模拟[J]. *地球物理学报*, 2010, 53(3): 708-716.  
Tang Jingtian, Wang Feiyang, Ren Zhengyong. 2.5 D resistivity modeling by adaptive finite-element method with unstructured triangulation[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2010, 53(3): 708-716.
- [14] 任政勇, 汤井田. 基于局部加密非结构化网格的三维电阻率法有限元数值模拟[J]. *地球物理学报*, 2009, 52(10): 2627-2634.  
Ren Zhengyong, Tang Jingtian. Finite element modeling of 3 DC resistivity using locally refined unstructured meshes[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2009, 52(10): 2627-2634.
- [15] Rücker C, Günther T, Spitzer K. Three-dimensional modelling and inversion of DC resistivity data incorporating topography- I. M[J]. *Geophysical Journal International*, 2006, 166(2): 495-505.
- [16] Lelièvre P, Carter-McAuslan A, Farquharson C, et al. Unified geophysical and geological 3D Earth models[J]. *The Leading Edge*, 2012, 31(3): 322-328.
- [17] Lelièvre P, Tycholiz C, Farquharson C. SEG technical program expanded abstracts 2012- Constrained geophysical inversion on unstructured meshes[M]. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, 2012: 1-6.
- [18] Haber E, Granek J, Marchant D, et al. SEG technical program expanded abstracts 2012-3D inversion of DC/IP data using adaptive OctTree meshes[M]. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, 2012: 1-5.
- [19] Frey P, George P L. Mesh generation[M]. Hoboken: Wiley-ISTE, 2010.
- [20] Dey A, Morrison H. Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures[J]. *Geophysics*, 1979, 44(4): 753-780.
- [21] 徐世浙. 地球物理中的有限元法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1994.  
Xu Shizhe. Finite element in geophysics[M]. Beijing: People's Education Press, 1994.
- [22] Xu S Z, Duan B C, Zhang D H. Selection of the wavenumbers k using an optimization method for the inverse fourier transform in 2.5D electrical modeling[J]. *Geophysical Prospecting*, 2000, 48(5): 789-796.
- [23] 李金铭. 地电场与电法勘探[M]. 北京: 地质出版社, 2005.  
Li Jinming. Geoelectric field and electrical exploration method[M]. Beijing: Geological Publishing House, 2005.
- [24] Geomview. An interactive 2D/3D viewing program[EB/OL]. 2007-08-01[2013-05-05] <http://www.geomview.org>. (编辑 季超)