

# 正域为有限区间的三区间套一维关联函数

李桥兴<sup>1,2,3</sup>, 杨春燕<sup>2</sup>

1. 兰州理工大学经济管理学院, 兰州 730050
2. 广东工业大学可拓学与创新方法研究所, 广州 510006
3. 兰州大学管理学院, 兰州 730000

**摘要** 可拓集合从变换的角度描述事物具有某种性质的程度及其变化,并用关联函数定量研究变化的分类和分类的变化以及矛盾问题的转化,因此关联函数是可拓集合的核心内容和可拓学的重要理论基础。基于现实生活中人们对客观事物特征的量值存在满意区间、可接受区间和不可接受区间等区别,在定义点与三区间套的位置值的概念基础上,构造了正域为有限区间的三区间套一维关联函数公式并探讨其性质,深化了一维关联函数的研究内容,拓展了可拓学描述现实矛盾问题的范围。

**关键词** 可拓集合;关联函数;三区间套;位置值

**中图分类号** N945.16

**文献标志码** A

**doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2014.36.007

## One-dimensional Dependent Function Based on Three Nested Intervals with Finite Positive in Extension Set

LI Qiaoxing<sup>1,2,3</sup>, YANG Chunyan<sup>2</sup>

1. School of Economics and Management, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China
2. Institute of Extenics and Innovation Method, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China
3. School of Management, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China

**Abstract** Extension set studies the degree and its change of some characteristic that one thing owns from the point of transformation, and describes them by using dependent functions. So, the dependent function is the core of the extension set and an important theoretic foundation of extenics. We summarize the current results of one-dimensional functions and unify the simple and elementary dependent functions. On the basis of the definitions of both distance and side-distance between the point and all kinds of intervals and position value between the point and various types of nested intervals, we propose the basic formulas and properties of general-dependent functions. The results can further deepen the contents of one-dimensional dependent functions and provide theoretical basics for the study on the multi-dimensional ones.

**Keywords** extension set; dependent function; three nested intervals; position value

可拓集合是可拓学的集合论基础,是从变化的角度描述研究对象具有某种性质的程度及其变化,并用关联函数定量研究变化的分类和分类的变化以及矛盾问题的转换<sup>[1,2]</sup>。目前,关联函数研究成果包括一维关联函数<sup>[3-10]</sup>、多元关联函数<sup>[11,12]</sup>和不确定关联函数<sup>[13-15]</sup>等。但是,这些关联函数只探讨

了由两个区间构成的区间套函数形式,描述了事物的正域、零界、过渡负域和标准负域等。由于探讨事物拓展的可能性是可拓学的主要研究任务之一,因此关联函数的取值范围应能够同时描述事物的各种变化。鉴于现实生活中除了事物特征的可接受区间和不可接受区间之外,人们还特别关注特

收稿日期:2014-10-31;修回日期:2014-11-19

基金项目:国家自然科学基金项目(61273306)

作者简介:李桥兴,博士后,研究方向为系统科学与复杂性管理,电子邮箱:liqiaoxing@eyou.com

引用格式:李桥兴,杨春燕.正域为有限区间的三区间套一维关联函数[J].科技导报,2014,32(36):48-51.

征的满意区间。基于此,文献[2]中提出了同时能描述事物特征的满意区间、可接受区间和不可接受区间的关联函数形式。本文在此基础上定义由3个区间构成的区间套位置值概念,构造正域为有限区间的三区间套关联函数公式并探讨其性质。

### 1 预备知识

在可拓学研究中,统一用  $\langle a, b \rangle$  表示闭区间  $[a, b]$ 、开区间  $(a, b)$ 、左闭右开区间  $[a, b)$  和左开右闭区间  $(a, b]$  4种情形。若  $a, b$  为确定的实数,则  $\langle a, b \rangle$  表示有限区间。同时,本文把正无穷区间  $\langle a, +\infty \rangle$  和负无穷区间  $\langle -\infty, b \rangle$  统一称为无穷区间,把  $R = \langle -\infty, +\infty \rangle$  称为全体实数区间。

**定义1** 设  $X = \langle a, b \rangle (X \neq R)$  为实数域内任意(有限或无限)区间,其中  $a$  是确定或负无穷实数,  $b$  是确定或正无穷实数,则对任意点  $x$ ,称  $\rho(x, X) = \max\{a - x, x - b\}$  为点  $x$  关于(有限或无限)区间  $X = \langle a, b \rangle$  的一般距。

**定义2** (点与全体实数区间之距<sup>[10]</sup>) 实轴上的点  $x$  和全体实数区间  $R = \langle -\infty, +\infty \rangle$  之距为  $\rho(x, R) = -1/|x|$ 。

**性质1** 实轴上的点  $x$  关于实数域上任意给定区间  $X$  (包括  $X=R$ ) 之距满足:

- (1) 点  $x \in X$  且  $x$  不等于  $X$  端点的充要条件是  $\rho(x, X) < 0$ ;
- (2) 点  $x \notin X$  且  $x$  不等于  $X$  端点的充要条件是  $\rho(x, X) > 0$ ;
- (3) 点  $x$  等于  $X$  端点的充要条件是  $\rho(x, X) = 0$ 。

**性质2** 若实轴上任意两个区间  $X_1$  和  $X_2 (X_2 \neq R)$  满足  $X_1 \subset X_2$ , 则对任意点  $x$ , 有

- (1) 若  $X_1$  和  $X_2$  无公共端点, 则  $\rho(x, X_2) < \rho(x, X_1)$ ;
- (2) 若  $X_1$  和  $X_2$  有公共端点, 则  $\rho(x, X_2) \leq \rho(x, X_1)$ 。

**性质3** 设  $X_1$  是任意区间且  $X_1 \subset R$ , 则对任意点  $x$ , 有  $\rho(x, R) \geq \rho(x, X_1)$  可能成立。

文献[1]定义了任意点  $x$  关于点  $x_0$  与有限区间  $X$  的左侧距  $\rho_l(x, x_0, X)$ 、右侧距  $\rho_r(x, x_0, X)$ , 并且左侧距和右侧距统称为侧距, 记为  $\rho(x, x_0, X)$ 。当  $x \notin X$  或  $x_0$  为  $X$  的中点时, 有  $\rho(x, x_0, X) = \rho(x, X)$ 。若点  $x_0 \in X$  为区间  $X$  的非端点, 则  $\rho(x, x_0, X)$  满足:

- (1) 点  $x \in X$  且  $x$  不等于  $X$  端点的充要条件是  $\rho(x, x_0, X) < 0$ ;
- (2) 点  $x \notin X$  且  $x$  不等于  $X$  端点的充要条件是  $\rho(x, x_0, X) > 0$ ;
- (3) 点  $x$  等于  $X$  端点的充要条件是  $\rho(x, x_0, X) = 0$ ;
- (4)  $\rho(x, x_0, X)$  当且仅当  $x = x_0$  时取最小值。

**性质4** 设  $x$  为实数域上的任意点和  $X = \langle a, b \rangle$  为有限区间, 点  $x_0 \in X$  为区间  $X$  的非端点, 则  $\rho(x, x_0, X) \leq \rho(x, X)$ 。

**证明** 下面只证明  $x_0 \in (a, (a+b)/2)$ , 分3种情况。

- (1) 当  $x \leq a$  和  $x \geq (a+b)/2$  时, 有  $\rho(x, x_0, X) = \rho(x, X)$ ;

(2) 当  $a \leq x \leq x_0$  时, 有  $\rho(x, x_0, X) = (b - x_0)(a - x)/(x_0 - a)$  和  $\rho(x, X) = a - x$ 。由  $b - x_0 \geq (b - a)/2 \geq x_0 - a \geq 0 \Rightarrow \rho(x, x_0, X) \leq$

$\rho(x, X)$ ;

(3) 当  $x_0 \leq x \leq (a+b)/2$  时, 有  $\rho(x, x_0, X) = x - b \leq (a - b)/2$  和  $\rho(x, X) = a - x \geq (a - b)/2$ , 即  $\rho(x, x_0, X) \leq \rho(x, X)$ 。

**定义3** (点与区间套的位置值) 设  $X_1 = \langle a, b \rangle$  为有限区间,  $X_2$  为任意区间(包括有限区间、无限区间和全体实数区间)且  $X_1 \subset X_2$ , 则对实数域上任意一点  $x$ , 称

$$D(x, X_1, X_2) = \begin{cases} a - b & \rho(x, X_2) \geq \rho(x, X_1) \\ \rho(x, X_2) - \rho(x, X_1) + a - b & \rho(x, X_2) < \rho(x, X_1) \text{ 且 } x \in X_1 \\ \rho(x, X_2) - \rho(x, X_1) & \rho(x, X_2) < \rho(x, X_1) \text{ 且 } x \notin X_1 \end{cases}$$

为点  $x$  关于区间套  $X_1$  和  $X_2$  的位置值。

**性质5** 设有限区间  $X_1 = \langle a, b \rangle$  和任意区间  $X_2$  (包括  $X_2 = R$ ) 满足  $X_1 \subset X_2$ , 点  $x$  关于区间套  $X_1$  和  $X_2$  的位置值为  $D(x, X_1, X_2)$ , 则  $\rho(x, X_2) - \rho(x, X_1) \geq D(x, X_1, X_2)$ 。特别地, 当  $X_2 \neq R$  时, 有  $0 \geq \rho(x, X_2) - \rho(x, X_1) \geq D(x, X_1, X_2)$ 。

**证明** 若  $\rho(x, X_2) \geq \rho(x, X_1)$ , 则有  $\rho(x, X_2) - \rho(x, X_1) \geq 0 > a - b$ ; 若  $\rho(x, X_2) < \rho(x, X_1)$ , 则有  $\rho(x, X_2) - \rho(x, X_1) > \rho(x, X_2) - \rho(x, X_1) + a - b$ 。根据定义3, 显然有  $\rho(x, X_2) - \rho(x, X_1) \geq D(x, X_1, X_2)$ 。

当  $X_2 \neq R$  时, 由性质2, 显然有  $0 \geq \rho(x, X_2) - \rho(x, X_1) \geq D(x, X_1, X_2)$ 。

### 2 正域为有限区间的三区间套关联函数及性质

假设3个区间满足  $X_0 \subset X \subset X'$ , 并且  $X_0$ 、 $X - X_0$  和  $X' - X$  分别表示人们对事物某个特征量值的满意区间、可接受区间和不可接受区间。在可拓学中,  $X_0$ 、 $X$  和  $X'$  分别称为标准正域、正域和节域, 并且称满足  $X_0 \subset X \subset X'$  的3个区间为三区间套。

当正域为有限区间即  $X = \langle a, b \rangle$  时, 标准正域  $X_0 = \langle a_0, b_0 \rangle$  必为有限区间, 但是节域  $X'$  可以包括有限区间  $\langle c, d \rangle$ 、负无穷区间  $\langle -\infty, d \rangle$ 、正无穷区间  $\langle c, +\infty \rangle$  和全体实数区间  $R$  4种类型。为了叙述方便, 本文采用  $X_0 \overset{\leftarrow}{\subset} X \overset{\leftarrow}{\subset} X'$  表示3个区间  $X_0$ 、 $X$  和  $X'$  不但满足  $X_0 \subset X \subset X'$ , 同时表示  $X_0$  和  $X$  最多有两个公共端点以及  $X$  和  $X'$  最多有一个公共端点。三区间套的其他关联函数形式将另文介绍。

**定义4** 设标准正域  $X_0 = \langle a_0, b_0 \rangle$  和正域  $X = \langle a, b \rangle$  为有限区间, 节域  $X'$  为任意区间(包括有限区间、无限区间和全体实数区间)且  $X_0 \overset{\leftarrow}{\subset} X \overset{\leftarrow}{\subset} X'$ , 则对实数域任意点  $x$ , 称

$$D(x, X_0, X, X') = \begin{cases} a_0 - b_0 & \rho(x, X) \geq \rho(x, X_0) \text{ 且 } x \in X \\ \rho(x, X) - \rho(x, X_0) & \rho(x, X) < \rho(x, X_0) \text{ 且 } x \in X \\ a - b & \rho(x, X') \geq \rho(x, X) \text{ 且 } x \notin X \\ \rho(x, X') - \rho(x, X) & \rho(x, X') < \rho(x, X) \text{ 且 } x \notin X \end{cases}$$

为点  $x$  关于三区间套  $X_0$ 、 $X$  和  $X'$  的一般位置值, 简称位值。

根据性质2, 当  $X' \neq R$  时, 定义4即为

$$D(x, X_0, X, X') = \begin{cases} a_0 - b_0 & \rho(x, X) = \rho(x, X_0) \text{ 且 } x \in X \\ \rho(x, X) - \rho(x, X_0) & \rho(x, X) \neq \rho(x, X_0) \text{ 且 } x \in X \\ a - b & \rho(x, X') = \rho(x, X) \text{ 且 } x \notin X \\ \rho(x, X') - \rho(x, X) & \rho(x, X') \neq \rho(x, X) \text{ 且 } x \notin X \end{cases}$$

**性质 6** 正域为有限区间的三区间套位置值  $D(x, X_0, X, X') < 0$ 。

**证明** 根据定义 4, 有  $a_0 - b_0 < 0$  和  $a - b < 0$ , 从而性质 6 显然成立。

**定义 5** (正域为有限区间的三区间套关联函数) 若正域  $X = \langle a, b \rangle$  为有限区间和节域  $X'$  为实数域上任意区间, 记标准正域  $X_0 = \langle a_0, b_0 \rangle$  且  $X_0 \overset{\leftarrow}{\subseteq} X \overset{\leftarrow}{\subseteq} X'$ , 点  $x_0 \in X_0$  且为  $X$  的非端点。记  $X_0$  和  $X$  的公共端点为  $x_u$  (若无公共端点, 则  $x_u$  为空),  $X$  和  $X'$  的公共端点为  $x_v$  (若无公共端点, 则  $x_v$  为空), 则对任意实数  $x \neq x_u$  和  $x_v$ , 令

$$k(x) = \begin{cases} \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') + 1 & \rho(x, X) = \rho(x, X_0) \text{ 且 } x \in X \\ \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') - 1 & \rho(x, X') \geq \rho(x, X) \text{ 且 } x \notin X \\ \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') & \text{其余} \end{cases}$$

若  $x = x_u$  ( $x_u$  存在), 则当  $x_u \notin X_0$  时, 令  $k(x_u) = 1$ ; 当  $x_u \in X_0$  时, 令  $k(x_u) = 0 \otimes 1$ , 表示  $k(x_u)$  既等于 0 又等于 1; 若  $x = x_v$  ( $x_v$  存在), 则当  $x_v \notin X$  时, 令  $k(x_v) = -1$ ; 当  $x_v \in X$  时, 令  $k(x_v) = -1 \otimes 0$ , 表示  $k(x_v)$  既等于 -1 又等于 0, 称  $k(x)$  为点  $x$  关于三区间套  $X_0, X$  和  $X'$  且在  $X$  的非中点  $x_0$  取最大值的一般关联函数。

定义 5 的函数有以下几种形式:

(1) 当  $x_0$  为  $X$  的中点时, 由性质 4, 有

$$k(x) = \begin{cases} \rho(x, X) / D(x, X_0, X, X') + 1 & \rho(x, X) = \rho(x, X_0) \text{ 且 } x \in X \\ \rho(x, X) / D(x, X_0, X, X') - 1 & \rho(x, X') \geq \rho(x, X) \text{ 且 } x \notin X \\ \rho(x, X) / D(x, X_0, X, X') & \text{其余} \end{cases}$$

称  $k(x)$  为点  $x$  关于三区间套  $X_0, X$  和  $X'$  且在  $X$  的中点  $x_0$  取最大值的一般关联函数。

(2) 当  $X \neq R$  时, 根据性质 2, 有

$$k(x) = \begin{cases} \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') + 1 & \rho(x, X) = \rho(x, X_0) \text{ 且 } x \in X \\ \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') - 1 & \rho(x, X') = \rho(x, X) \text{ 且 } x \notin X \\ \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') & \text{其余} \end{cases}$$

(3) 特别地, 当  $X \neq R$  且  $x_0 = (a+b)/2$  时, 有

$$k(x) = \begin{cases} \rho(x, X) / D(x, X_0, X, X') + 1 & \rho(x, X) = \rho(x, X_0) \text{ 且 } x \in X \\ \rho(x, X) / D(x, X_0, X, X') - 1 & \rho(x, X') = \rho(x, X) \text{ 且 } x \notin X \\ \rho(x, X) / D(x, X_0, X, X') & \text{其余} \end{cases}$$

**性质 7** 设正域  $X = \langle a, b \rangle$  为有限区间和标准正域为  $X_0 = \langle a_0, b_0 \rangle$ , 节域  $X'$  ( $X' \neq R$ ) 为实数域上任意区间且  $X_0 \overset{\leftarrow}{\subseteq} X \overset{\leftarrow}{\subseteq} X'$ , 点  $x_0 \in X_0$  且为  $X$  的非端点, 则  $k(x)$  满足:

- (1)  $x \in X_0$  且  $x$  不等于  $X_0$  的端点  $\Leftrightarrow k(x) > 1$ ;
- (2)  $x$  等于  $X_0$  的端点即  $x = a_0$  或  $b_0 \Leftrightarrow k(x) = 1$ ;
- (3)  $x \in X - X_0$  且  $x$  不等于  $X_0$  和  $X$  的端点  $\Leftrightarrow 0 < k(x) < 1$ ;
- (4)  $x$  等于  $X$  的端点即  $x = a$  或  $b \Leftrightarrow k(x) = 0$ ;
- (5)  $x \in X' - X$  且  $x$  不等于  $X$  和  $X'$  的端点  $\Leftrightarrow -1 < k(x) < 0$ ;
- (6)  $x$  等于  $X'$  的端点  $\Leftrightarrow k(x) = -1$ ;
- (7)  $x \notin X'$  且  $x$  不等于  $X'$  的端点  $\Leftrightarrow k(x) < -1$ ;
- (8)  $k(x)$  在  $x \in (-\infty, x_0]$  单调递增, 在  $x \in [x_0, +\infty)$  单调递减, 且当  $x = x_0$  取最大值。

**证明** 下面只证明性质 7 的 (1)、(3)、(5) 和 (7) 成立。

**必要性** 性质 7 的 (1) 当  $x \in X_0$  且  $x$  不等于  $X_0$  的端点, 有  $\rho(x, x_0, X) < 0$  和  $\rho(x, X_0) < 0$ 。分以下两种情况讨论。

若  $\rho(x, X) = \rho(x, X_0)$ , 则有  $k(x) = \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') + 1 > 1$ ;

若  $\rho(x, X) \neq \rho(x, X_0)$ , 则  $k(x) = \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X')$  和  $D(x, X_0, X, X') = \rho(x, X) - \rho(x, X_0)$ , 根据性质 4 和定义 4, 有  $k(x) \geq \rho(x, X) / [\rho(x, X) - \rho(x, X_0)] = 1 + \rho(x, X_0) / [\rho(x, X) - \rho(x, X_0)] > 1$ 。

性质 7 的 (3) 当  $x \in X - X_0$  且  $x$  不等于  $X$  和  $X_0$  端点, 有  $\rho(x, X) \neq \rho(x, X_0)$  和  $\rho(x, x_0, X) < 0$ , 因此  $k(x) = \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') > 0$ 。另一方面, 反证法假设存在点  $x \in X - X_0$  使  $k(x) < 1$  不成立, 即  $k(x) \geq 1$ , 则有  $\rho(x, x_0, X) \leq \rho(x, X) - \rho(x, X_0)$  对任意点  $x_0 \in X$  成立, 因此当  $x_0 = (a+b)/2$  时有  $\rho(x, X_0) \leq 0 \Rightarrow x \in X_0$ , 与已知条件  $x \notin X_0$  矛盾, 因此必有  $k(x) < 1$ 。

性质 7 的 (5) 当  $x \in X' - X$  且  $x$  不等于  $X$  和  $X'$  的端点, 有  $\rho(x, X') < 0 < \rho(x, x_0, X) \leq \rho(x, X)$ , 则  $k(x) = \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') < 0$  且  $D(x, X_0, X, X') = \rho(x, X') - \rho(x, X)$ 。由性质 5, 有  $k(x) \geq \rho(x, X) / [\rho(x, X') - \rho(x, X)] = -1 + \rho(x, X') / [\rho(x, X') - \rho(x, X)] > -1$ 。

性质 7 的 (7) 当  $x \notin X'$  且  $x$  不等于  $X'$  的端点, 分两种情况讨论。

若  $\rho(x, X') \geq \rho(x, X)$ , 则  $k(x) = \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') - 1$ , 显然有  $k(x) < -1$ 。

若  $\rho(x, X') < \rho(x, X)$ , 则有  $k(x) = \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X')$  和  $D(x, X_0, X, X') = \rho(x, X') - \rho(x, X)$ 。反证法假设存在点  $x \notin X'$  使  $k(x) \geq -1$  成立, 即对任意点  $x_0 \in X$ , 有  $\rho(x, x_0, X) \leq \rho(x, X) - \rho(x, X')$ , 因此当  $x_0 = (a+b)/2$  时有  $\rho(x, X') \leq 0 \Rightarrow x \in X'$ , 与已知条件  $x \notin X'$  矛盾, 因此必有  $k(x) < -1$ 。

**充分性** 性质 7 的 (1) 当  $k(x) > 1$  时, 必有  $\rho(x, x_0, X) < 0$ , 即  $x \in X_0$ 。以下分两种情况讨论。

若  $\rho(x, X) = \rho(x, X_0)$ , 则由  $x \in X \Rightarrow \rho(x, X) = \rho(x, X_0) < 0 \Rightarrow x \in X_0$ , 此时  $k(x) = \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') + 1$ ;

若  $\rho(x, X) \neq \rho(x, X_0)$ , 则  $k(x) = \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X')$  和  $D(x, X_0, X, X') = \rho(x, X) - \rho(x, X_0)$ 。由  $k(x) > 1 \Rightarrow \rho(x, x_0, X) < \rho(x, X) - \rho(x, X_0)$  对任意点  $x_0 \in X$  成立。反证法假设存在点  $x \notin X_0$  使上式成立, 则当  $x_0 = (a+b)/2$  时, 有  $\rho(x, X_0) < 0$ , 即  $x \in X_0$ , 与假设条件  $x \notin X_0$  矛盾。因此若  $\rho(x, X) \neq \rho(x, X_0)$ , 必有  $k(x) > 1 \Rightarrow x \in X_0$ 。

性质 7 的 (3) 当  $0 < k(x) < 1$  时, 若  $k(x) = \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') + 1$ , 则  $\rho(x, x_0, X) > 0 \Rightarrow x \notin X$ , 与必备条件  $x \in X_0$  矛盾; 若  $k(x) = \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') - 1$ , 则  $\rho(x, x_0, X) < 0 \Rightarrow x \in X$ , 与必备条件  $x \notin X$  矛盾, 因此必有  $k(x) = \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X')$ 。由  $0 < k(x) \Rightarrow x \in X$ , 则  $D(x, X_0, X, X') = \rho(x, X) - \rho(x, X_0)$ ; 由  $k(x) < 1 \Rightarrow \rho(x, x_0, X) > \rho(x, X) - \rho(x, X_0)$  对任意点  $x_0 \in X$  成立。反证法假设存在点  $x \in X_0$  使上式成立, 则当  $x_0 = (a+b)/2$  时, 有  $\rho(x, X_0) > 0 \Rightarrow x \notin X_0$ , 与假设条件  $x \in X_0$  矛盾, 因此必有  $x \notin X_0$ , 即  $x \in X - X_0$ 。

性质7的(5) 当  $-1 < k(x) < 0$  时, 类似(3) 必有  $k(x) = \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X')$ 。由  $k(x) < 0 \Rightarrow x \notin X$ , 因此  $D(x, X_0, X, X') = \rho(x, X') - \rho(x, X)$ , 则由  $k(x) > -1 \Rightarrow \rho(x, x_0, X) < \rho(x, X) - \rho(x, X')$  对任意点  $x_0 \in X$  成立。反证法假设存在点  $x \notin X'$  使上式成立, 则当  $x_0 = (a+b)/2$  时, 有  $\rho(x, X') < 0 \Rightarrow x \in X'$ , 与假设条件  $x \notin X'$  矛盾, 因此必有  $k(x) < -1 \Rightarrow x \in X'$ , 即  $x \in X' - X$ 。

性质7的(7) 当  $k(x) < -1$  时, 有  $\rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X') < 0 \Rightarrow x \notin X$ 。反证法假设存在点  $x \in X'$  使  $k(x) < -1$  成立, 则  $x \in X' - X$ , 此时有  $k(x) = \rho(x, x_0, X) / D(x, X_0, X, X')$  和  $D(x, X_0, X, X') = \rho(x, X') - \rho(x, X)$ , 则  $k(x) < -1 \Rightarrow \rho(x, x_0, X) > \rho(x, X) - \rho(x, X')$  对任意点  $x_0 \in X$  成立, 因此当  $x_0 = (a+b)/2$  时有  $\rho(x, X') > 0 \Rightarrow x \notin X'$ , 与假设条件  $x \in X'$  矛盾, 因此必有  $k(x) < -1 \Rightarrow x \notin X'$ 。

性质8 设正域  $X = \langle a, b \rangle$ , 标准正域  $X_0 = \langle a_0, b_0 \rangle$  和节域  $X = R$ , 点  $x_0 \in X_0$  且为  $X$  的非端点, 则  $k(x)$  满足:

- (1)  $x \in X_0$  且  $x$  不等于  $X_0$  的端点  $\Leftrightarrow k(x) > 1$ ;
- (2)  $x$  等于  $X_0$  的端点即  $x = a_0$  或  $x = b_0 \Leftrightarrow k(x) = 1$ ;
- (3)  $x \in X - X_0$  且  $x$  不等于  $X_0$  和  $X$  的端点  $\Leftrightarrow 0 < k(x) < 1$ ;
- (4)  $x$  等于  $X$  的端点即  $x = a$  或  $x = b \Leftrightarrow k(x) = 0$ ;
- (5)  $x \notin X$  且  $x$  不等于  $X$  的端点  $\Leftrightarrow -1 < k(x) < 0$ ;
- (6)  $k(x)$  在  $x \in (-\infty, x_0]$  单调递增, 在  $x \in [x_0, +\infty)$  单调递减, 且当  $x = x_0$  取最大值。

证明 证明过程与性质7类似, 略。

### 3 结论

基于现实中人们对事物特征量的不同取值要求, 定义了三区套位置值并提出了正域为有限区间的三区套一般关联函数公式, 讨论了有关性质。本研究使可拓学能更细化地定量描述矛盾问题, 可为深化研究可拓集合和多维关联函数提供理论基础。

#### 参考文献 (References)

- [1] 杨春燕, 蔡文. 可拓工程[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 1-2.  
Yang Chunyan, Cai Wen. Extensics engineering[M]. Beijing: Science Press, 2007: 1-2.
- [2] 杨春燕, 蔡文. 可拓集合中关联函数的研究进展[J]. 广东工业大学学报, 2012, 29(2): 7-14.  
Yang Chunyan, Cai Wen. Recent research process in dependent functions in extension sets[J]. Journal of Guangdong University of Technology, 2012, 29(2): 7-14.
- [3] 陈俊. 关联函数的一种构造方法[J]. 系统工程理论与实践, 1995(4): 60-62.  
Chen Jun. A way of the constructions of the dependent function[J]. Systems Engineering, Theory & Practices, 1995(4): 60-62.
- [4] 李桥兴, 刘思峰. 一般位值公式及一般初等关联函数构造方法[J]. 系统工程, 2006, 24(6): 116-118.  
Li Qiaoxing, Liu Sifeng. A method to construct the general location value

and general elementary dependent function[J]. Systems Engineering, 2006, 24(6): 116-118.

- [5] 陈薇. 可拓学中关联函数的构造及零界的确定[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(4): 154-159.  
Chen Wei. The structure of dependent function and determination of zero boundary on the extensics[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(4): 154-159.
- [6] 李桥兴. 正域为无限区间的初等关联函数构造[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(4): 142-146.  
Li Qiaoxing. The method to construct elementary dependent function based on infinite interval[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(4): 142-146.
- [7] Li Qiaoxing, Li Xingsen. The method to construct elementary dependent function on single interval[J]. Key Engineering Materials Journal, 2011, 474-476: 651-654.
- [8] Li Qiaoxing, Chen Shicheng, Li Xingsen. The method to construct elementary dependent function whose discussion field is an infinite interval and positive field finite [J]. Advanced Materials Research, 2011, 179(1): 32-36.
- [9] Li Qiaoxing, Qiang Baohua. Method to construct elementary dependent function based on weights of characteristics[J]. Advanced Materials Research, 2011, 295-297: 2241-2244.
- [10] 李桥兴. 节域为负无穷区间和全体实数域的初等关联函数构造[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(12): 2740-2744.  
Li Qiaoxing. Method to construct the elementary dependent function whose discussion fields are negative infinite interval and whole real field [J]. Systems Engineering, Theory & Practices, 2012, 32(12): 2740-2744.
- [11] 李桥兴. 多元多维基元及高阶多元多维可拓集合构造[J]. 广东工业大学学报, 2009, 26(4): 1-4.  
Li Qiaoxing. The method to construct multivariate and multidimensional basic-element and extensible set with high order and multivariates and multidimensions[J]. Journal of Guangdong University of Technology, 2009, 26(4): 1-4.
- [12] 李桥兴. 一元多维位值公式及一元多维初等关联函数构造方法[J]. 兰州大学学报, 2010, 46(2): 86-90.  
Li Qiaoxing. Method to construct the location value and elementary dependent function having one variable and some dimensions [J]. Journal of Lanzhou University, 2010, 46(2): 86-90.
- [13] 胡宝清, 王孝礼, 何娟娟. 区间上的可拓集及其关联函数[J]. 广东工业大学学报, 2000, 17(2): 101-104.  
Hu Baoqing, Wang Xiaoli, He Juanjuan. Extension set and the independent function on intervals[J]. Journal of Guangdong University of Technology, 2000, 17(2): 101-104.
- [14] 李桥兴, 刘思峰. 基于区间距和区间侧距的初等关联函数构造[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2006, 38(7): 1097-1100.  
Li Qiaoxing, Liu Sifeng. The method to construct interval elementary dependent function based on the interval distance and side-distance[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2006, 38(7): 1097-1100.
- [15] 李桥兴, 刘思峰. 区间型一般初等关联函数构造方法[J]. 系统工程理论与实践, 2007(6): 173-176.  
Li Qiaoxing, Liu Sifeng. The method to construct interval general elementary dependent function[J]. Systems Engineering, Theory & Practices, 2007(6): 173-176.

(责任编辑 赵业玲)