

基于运输模型的网络相变过程

孙磊¹, 李荣², 陈孝国³

1. 中国矿业大学(北京)力学与建筑工程学院, 北京 100083
2. 浙江商业职业技术学院财会金融学院, 杭州 310053
3. 黑龙江科技大学理学院, 哈尔滨 150022

摘要 网络相变过程需重点关注网络上的总负荷数、网络上的消失负荷数、节点的排队负荷数等指标随单位时间进入网络的负荷数 R 的变化规律。为此建立了无标度网络上的运输模型, 用于定量计算这 3 种负荷数的变化规律。仿真结果表明: 最大介数节点最先产生拥堵, 导致网络的进入和消失负荷数出现不平衡, 进而导致网络进入拥堵状态; 当 R 小于临界值 R_c 时, 网络上的消失负荷数随 R 同步增长。当 R 超过临界值 R_c 时, 消失负荷数与 R 的比值持续下降, 表明随着 R 的增加, 负荷到达目的地越来越困难。

关键词 复杂网络; 运输模型; 相变过程; 仿真

中图分类号 TU621

文献标志码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2014.24.008

Phase Transition of Network Based on Traffic Routing Model

SUN Lei¹, LI Rong², CHEN Xiaoguo³

1. School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining & Technology(Beijing), Beijing 100083, China
2. School of Accounting and Finance, Zhejiang Business College, Hangzhou 310053, China
3. School of Science, Heilongjiang University of Science and Technology, Harbin 150022, China

Abstract With the development of complex networks, more and more attentions are paid to the phase transition. The phase transition is a process of transition from a stable state to a congested state. In this process, three kinds of variations of loads on the network are involved, which are the total loads on the network, the loads removed from the network and the loads waiting for passing through some node. Firstly, based on the traffic routing model, an order parameter is introduced to characterize the phase transition. With the increase of R (the number of loads which enter into the network per unit time), this parameter experiences a transition from zero to non-zero. That is to say, there will be a critical value of R_c that characterizes the traffic phase transition from a stable state to a congested state. Secondly through the simulation, the variations of different kinds of loads on a scale-free network are identified. The node with the maximum betweenness is easily to be congested, which results in an unbalance between the loads that enter into the network and the loads that are removed from the network, and eventually results in the network congestion; When $R < R_c$, the number of loads that are removed from the network increases synchronously with R . When $R > R_c$, the ratio of the number of the loads removed from the network and R decreases gradually, which means that it is more and more difficult for the loads to reach their destination. Understanding the variations of the key indicators in the phase-transition process is beneficial for the effective prevention and intervention against the network.

Keywords complex network; traffic routing model; phase transition; simulation

复杂网络是描绘和研究复杂系统拓扑结构和行为的关键因素, 1998 年 Watts 等^[1]提出的小世界网络模型、1999 年 Barabási 等^[2,3]提出的无标度网络模型, 引发了现代意义复杂

网络研究的浪潮。起初的研究主要集中在网络的拓扑结构, 随着研究的深入, 运用运输模型来研究网络上的动力学过程逐渐受到关注^[4,5]。

收稿日期: 2014-05-23; 修回日期: 2014-07-02

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12531577); 黑龙江科技大学青年才俊资助项目(20120501)

作者简介: 孙磊, 博士研究生, 研究方向为工程管理, 电子信箱: cumtb_sunlei@163.com; 李荣(通信作者), 讲师, 研究方向为复杂网络上的动力学, 电子信箱: lrlr1212@sina.com

引用格式: 孙磊, 李荣, 陈孝国. 基于运输模型的网络相变过程[J]. 科技导报, 2014, 32(24): 56-59.

相变过程指网络从稳定状态向拥堵状态的转变过程。关于相变过程的研究,首先侧重于网络承载能力的计算。Zhao等^[6]针对具体的网络,通过数值计算方法求得承载能力;而实证做法则是通过指标 $Z = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \Delta N_p \rangle / (\Delta t R)$ ^[7] 从0向非0的转变来寻找承载能力 R 。其次侧重于提高网络承载能力的方法研究。王文旭等^[8,9]提出通过改变负荷的行走策略来提高网络承载能力;刘刚等^[10]提出一种具有引力约束的路由算法;Zhang等^[11]通过边删除策略改变了底层网络拓扑结构,进而提高网络的承载能力。由于上述 Z 指标的几何意义是总负荷数序列随时间的变化斜率,因此承载能力的研究归属于网络上的总负荷数范畴;Mukherjee等^[12]对相变过程中节点的平均负荷数的波动幅度进行了研究;Tadić等^[13]对相变过程前后的网络负荷数序列和单个负荷的等待时间分布等进行研究;Barankai等^[14]利用离散时间随机游走模型研究了网络结构对相变过程的影响。为了完整准确的剖析相变发生过程,除关注网络上的总负荷数外,还应着重关注进入负荷数、消失负荷数的变化规律。另外,通过研究相变过程中关键节点的排队负荷数的变化规律,有助于了解在 R 增大过程中,哪些节点最先出现拥堵,拥堵是怎样传播以及节点出现拥堵与网络出现拥堵是否具有同步性等。本文中通过仿真试验,分析 R 增大过程中无标度网络上的总负荷数、消失负荷数和节点的排队负荷数等指标的变化规律。

1 预备知识

1.1 运输模型

为了模拟现实网络,引入运输模型,既考虑到网络的拓扑结构,还考虑到网络上的负荷运动,这里做以下假设:

1) 每时每刻进入网络的负荷数为 R , 这些负荷的起点和终点随机在网络上产生, 负荷按照最短路径行进(当起点和终点之间存在多条最短路径时, 随机选取一条), 同时每时每刻也有负荷到达目的地, 而在下一时刻从网络中消失。

2) 在网络中每个节点都有一定处理负荷的能力 C , 这里假设所有节点的处理能力均相等。当通过某个节点的负荷数超过其处理能力(节点处理能力表示节点能允许同时通过的负荷个数)时, 会产生局部拥堵, 局部拥堵会导致网络上的负荷集聚进而会增大负荷到达目的地的难度。

3) 在网络中每个负荷都有它的目的地, 因此即使在出现拥堵的情况下, 也不改变自己的行进路线, 只是延长通过拥堵节点的等待时间。此外负荷通过拥堵节点按照到达该节点的时间顺序“先进先出”。

1.2 BA无标度网络生成方法

BA无标度网络构造算法为

增长: 从一个具有 m_0 个节点的初始网络开始, 每次引入一个新节点连接到 m 个存在节点上, $m \leq m_0$ 。

优先连接: 新节点与存在节点 i 相连接的概率 Π_i 与节点 i 的度 k_i 、节点 j 的度 k_j 之间满足关系

$$\Pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (1)$$

本文选取 $m_0=5, m=2$, 生成平均度 $\langle K \rangle=4, N=100$ 的BA无标度网络。

1.3 网络节点的介数

在使用最短路径路由算法的网络中, 节点介数指标刻画了负荷经过给定节点的可能性。节点介数值大, 节点在网络中就居于核心地位。具体定义式为

$$B_j = \frac{2}{(N-1)(N-2)} \sum_{h < v} \frac{g_{hv}(j)}{g_{hv}} \quad (2)$$

式中, g_{hv} 为节点 h 与节点 v 之间的最短路径数, $g_{hv}(j)$ 为节点 h 与节点 v 之间经过节点 j 的最短路径数, $(N-1)(N-2)/2$ 为最大可能的节点介数。

2 网络上的总负荷数随 R 的变化规律

对于相变过程, 首先关注的是网络何时出现拥堵状态, 即网络的承载能力问题。在最短路径路由策略下, 网络承载能力有基于概率统计的数值计算方法和仿真试验方法。

2.1 网络承载能力数值计算

假设各节点的处理能力 $C=3$ (下同), 最大介数节点由于处于核心位置, 最容易出现拥堵, 并且拥堵会迅速传播到整个网络。基于上述假设, 计算网络的承载能力^[6]。

负荷按照最短路径行进, 一个刚产生的负荷通过最大介数节点 L_{\max} 的概率是 $B_{L_{\max}} / \sum_{j=1}^N B_j$ 。在每个时间步有 R 个负荷产生, 因此每个时间步到达最大介数节点的负荷平均数为

$$Q_{in} = RDB_{L_{\max}} / \sum_{j=1}^N B_j \quad (3)$$

式中, D 为网络的平均最短路径, L_{\max} 为最大介数节点编号。另一方面每个时间步最大介数节点的处理能力为

$$Q_{out} = C_{L_{\max}} \quad (4)$$

当最大介数节点的进入负荷数持续超过其处理能力时, 该节点产生拥堵, 网络随之产生拥堵。因此

$$Q_{out} = Q_{in} \quad (5)$$

$$R_c DB_{L_{\max}} / \sum_{j=1}^N B_j = C_{L_{\max}} \quad (6)$$

式中, R_c 为网络承载能力临界值。由于 $C_{L_{\max}}=3$, 对生成的无标度网络进行数值计算, 得到平均最短路径 $D=2.941$, 最大介数值所占比重 $B_{L_{\max}} / \sum_{j=1}^N B_j = 0.163$ (两项指标均为重复实验50次的平均值), 代入等式(6)求得 $R_c=6.3$, 取整数 $R_c=7$ 。

2.2 网络上的总负荷数随 R 的变化规律

2.2.1 试验过程

利用 Matlab 7.11.0(R2010b) 软件进行仿真试验。主要过程为:

1) 根据无标度网络的构造方法, 选取 $m_0=5, m=2$, 生成 $N=100$, 平均度 $\langle K \rangle=4$ 的BA无标度网络。

2) 每一时刻在无标度网络上产生 R 个负荷, 利用 randint 函数在 $[1, 100]$ 内随机生成起点和终点, 起点和终点不能相同, 按照 dijkstra 函数选择最短路径行进。

3) 每个节点都有一定处理能力 C (试验中令 $C=3$), 若 t 时刻等待通过某节点 i 的负荷数为 Q (大于 C), 则 $t+1$ 时刻节点 i 只能允许 C 个负荷通过 (按照“先到先通过”原则), 超过部分在 $t+1$ 时刻继续等待, 在 $t+2$ 及以后时刻依次通过。这些等待负荷全部通过节点 i 的时间用函数 $\text{ceil}(Q/C)$ 表示。

4) 按照步骤 3 循环, 直到 $t=2000$ 。

5) 分别计算 t 从 1 到 2000 时间步对应的网络上的负荷数, 形成总负荷数时间序列。引入 $Z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta N_p) / (\Delta t R)$ 指标 (Z 值的几何意义是总负荷数序列随时间的变化斜率), 即网络上总负荷数的增长速度, 因此总负荷数的变化规律等价于 Z 指标的变化规律。 $Z=0$ 时, 网络处于平稳状态; $Z>0$ 时, 网络处于拥堵状态。

2.2.2 仿真结果

通过分析 Z 指标随 R 的变化规律, 得出网络承载能力的实验值, 并与数值计算结果对比。需说明: ① 在实际操作中选择总负荷数序列中相差 100 时间步的 50 对负荷数对应斜率的平均值来代替 Z 指标; ② 选取 R 从 2 变化到 90, 对应的 Z 指标为重复试验 50 次 (即生成 50 个不同的无标度网络进行实验) 再取平均值, 变量 Z 与 R 的关系如图 1 所示。

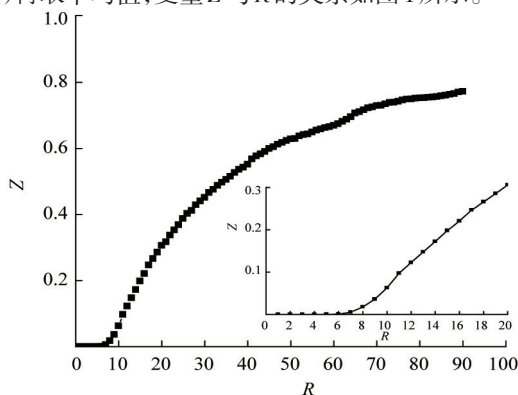


图 1 变量 Z 与 R 的关系

Fig. 1 Relationship between Z and R

可以看出: 当 R 从小于 7 变化到大于 7 的过程中, 网络上总负荷数的增长速度 Z 从等于 0 过渡到大于 0, $Z=0$ 表示随着时间延续网络上的总负荷数总体趋于一致, 而 $Z>0$ 表示随着时间延续网络上的总负荷数越来越多, 网络从平稳状态过渡到拥堵状态; R 越大, 网络上总负荷数的增速 Z 越大, 同一时刻网络上的总负荷数越多, 网络的拥堵程度越严重, 且 Z 最终趋近于 1。仿真实验值和数值计算结果是一致的, 显示 $R>7$ 时网络从稳定状态过渡到拥堵状态。

3 节点排队负荷数的变化规律

研究重要节点排队负荷数的变化规律, 有助于发现在 R 增大过程中哪些节点最先出现拥堵, 拥堵是怎样传播的以及节点出现拥堵与网络出现拥堵是否具有同步性等。

3.1 节点排队负荷数序列

对于一个给定的节点, 每一时刻都有等待通过该节点的负荷数。当某个节点的排队负荷数持续超过它的处理能力时, 该节点进入拥堵状态。在 R 一定的条件下, 分别选取 t 从 1001~2000 时间步所对应的排队负荷数, 形成该节点的排队负荷数时间序列。

3.2 节点排队负荷数随 R 的变化规律

引入 $P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta N_p) / (\Delta t R)$ 指标 (此时 N_p 为 t 时刻网络上某个节点的排队负荷数), 该指标表示节点的排队负荷数序列随时间的变化斜率。与 Z 指标类似, 可以根据 P 指标的数值来判断节点所处的状态。根据各节点的介数大小, 观察最大和次大介数节点的 P 指标随 R 的变化趋势, 具体如图 2 所示。这里选取 R 从 2 变化到 20, 每个 R 对应的 P 指标重复试验 50 次再取平均值。

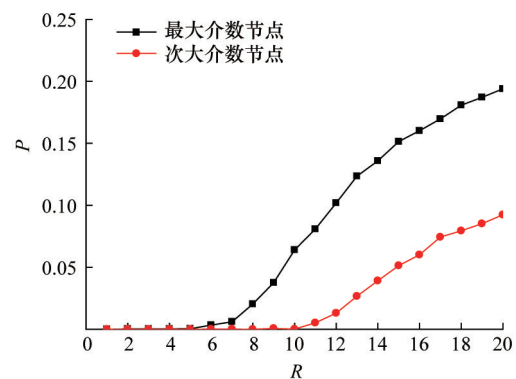


图 2 不同节点的 P 指标与 R 的关系

Fig. 2 Relationships between P and R for different nodes

可以看出: 当 R 从小于 7 变化到大于 7 的过程中, 最大介数节点的排队负荷数的增长速度 P 从等于 0 过渡到大于 0。 $P=0$ 表示随着时间延续最大介数节点的排队负荷数总体趋于一致, 而 $P>0$ 表示随着时间延续最大介数节点的排队负荷数越来越多, 最大介数节点当 $R>7$ 时出现拥堵状态, 与网络出现拥堵的临界值 R_c 相同, 两者具有同步性; 同理 $R>11$ 时次大介数节点开始出现拥堵, 最大介数节点的拥堵临界值低于次大介数节点的临界值; 通过实验, 可以类推其他节点出现拥堵的临界值, 这里不再重复。

4 网络消失负荷数随 R 的变化规律

网络上的负荷数由进入负荷数和消失负荷数汇总生成, 在 R 逐渐增大并超越临界值 R_c 的过程中, 部分节点出现拥堵状态, 进而网络出现拥堵状态, 导致负荷到达目的地越来越困难, 但消失负荷数随 R 如何变化, 很少有研究。

4.1 网络消失负荷数时间序列研究

1) 消失负荷数时间序列。消失负荷数序列是每一时刻从网络中消失的负荷数。试验中分别选取 t 从 1001 到 2000 时间步对应的消失负荷数, 形成消失负荷数时间序列。

2) 序列的稳定性判断。引入 $X = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta N_p) / (\Delta t R)$ 指标

(此时 $N_p(t)$ 为 t 时刻网络上的消失负荷数) 衡量消失负荷数序列随时间的变化斜率, 若 $X > 0$, 序列是不平稳的; 若 $X = 0$, 序列是平稳的。这里选取 R 从 2 变化到 35, 每个 R 对应的 X 指标重复试验 50 次再取平均值, 生成变量 X 随 R 的变化见图 3。

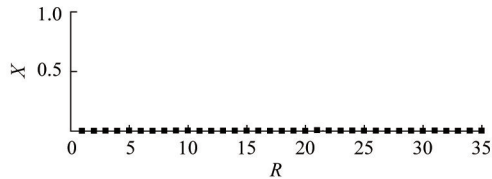


图3 变量 X 与 R 的关系

Fig.3 Relationship between X and R

从图 3 可以看出, X 指标始终近似等于 0, 意味着消失负荷数序列始终是平稳的。

4.2 网络消失负荷数随 R 的变化规律

在研究网络上的消失负荷数随 R 的变化规律时, 由于该时间序列是平稳的, 取该时间序列的平均值作为一次试验对应的消失负荷数水平, 重复试验 50 次再取平均值得到每个 R 对应的消失负荷数(用 X_s 表示)。用 X_s/R 表示对应的消失负荷数比率, 即进入网络的 R 个负荷到达终点的比率。消失负荷数比率 X_s/R 随 R 的变化规律如图 4 所示。

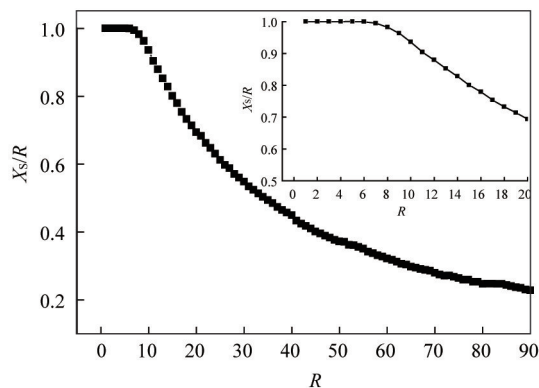


图4 消失负荷数比率 X_s/R 与 R 的关系

Fig.4 Relationship between X_s/R and R

可以看出: 当 R 小于网络临界值 R_c ($R_c=7$) 时, 消失负荷数比率 X_s/R 始终等于 1, 网络上的消失负荷数随 R 同步增长, 表示每一时刻进入网络的负荷数和消失负荷数保持平衡, 网络上的总负荷数也趋于一致。当 R 超过临界值 R_c 时, 消失负荷数比率 X_s/R 持续下降, 表示对于每一时刻进入网络的负荷数 R , 只有一部分负荷能到达目的地而从网络中消失, 且 R 越大, 到达比率越小, 负荷到达目的地越来越困难。

5 结论

实证分析了 $N=100$, 平均度 $\langle K \rangle=4$ 的无标度网络相变过程中 3 种负荷数随 R 的变化情况。

1) 网络上的总负荷数随 R 的变化规律。仿真实验和数值计算的承载能力是一致的; 随着 R 的增大并超越临界值, 总负荷数序列相对于时间的斜率指标 Z 从等于零过渡到大于

零, 网络也从稳定状态过渡到拥堵状态。

2) 各节点排队负荷数的变化规律。在各节点处理能力相同的前提下, 最大介数节点最先进入拥堵状态, 其次是次大介数节点; 最大介数节点的拥堵临界值和网络的拥堵临界值是相同的, 两者具有同步性, 这也为上面的数值计算假设提供佐证; 当 R 继续增大时, 会有更多的节点出现拥堵状态。

3) 网络上的消失负荷数随 R 的变化规律。 $R < 7$ 时, 网络上的进入负荷和消失负荷保持平衡, 网络处于稳定状态; 随着 R 超过临界值, 最大介数节点首先出现拥堵, 网络的进出负荷数出现不平衡, 引发整个网络的拥堵。由于一开始只有个别节点出现拥堵状态, 整个网络的拥堵程度较轻(对应 Z 指标较小); 随着 R 进一步增加, 越来越多的节点出现拥堵状态, 消失负荷数比率持续下降, 负荷到达目的地越来越困难。

参考文献(References)

- [1] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of small world networks[J]. Nature, 1998, 393: 440-442
- [2] Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286: 509-512
- [3] Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks[J]. Rev of Modern Phys, 2002, 74: 47-97.
- [4] 李树彬, 吴建军, 高自友, 等. 基于复杂网络的交通拥堵与传播动力学分析[J]. 物理学报, 2011, 60(5): 050701.
Li Shubin, Wu Jianjun, Gao Ziyou, et al. The analysis of traffic congestion and dynamic propagation properties based on complex network[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(5): 050701.
- [5] Chen S, Huang W, Cattani C, et al. Traffic dynamics on complex networks: A survey[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2012, 2012: ID732698.
- [6] Zhao L, Lai Y C, Park K, et al. Onset of traffic congestion in complex networks[J]. Physical Review E, 2005, 71(2): 026125.
- [7] Arenas A, Díaz-Guilera A, Guimera R. Communication in networks with hierarchical branching[J]. Physical Review Letters, 2001, 86(14): 3196.
- [8] Wang W X, Wang B H, Yin C Y, et al. Traffic dynamics based on local routing protocol on a scale-free network[J]. Physical Review E, 2006, 73(2): 026111.
- [9] Wang W X, Yin C Y, Yan G, et al. Integrating local static and dynamic information for routing traffic[J]. Physical Review E, 2006, 74(1): 016101.
- [10] 刘刚, 李永树. 基于引力约束的复杂网络拥塞问题研究[J]. 物理学报, 2012, 61(10): 108901.
Liu Gang, Li Yongshu. Study on the congestion phenomenon in complex network based on gravity constraint[J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(10): 108901.
- [11] Zhang G Q, Wang D, Li G J. Enhancing the transmission efficiency by edge deletion in scale-free networks[J]. Physical Review E, 2007, 76(1): 017101.
- [12] Mukherjee G, Manna S S. Phase transition in a directed traffic flow network[J]. Physical Review E, 2005, 71(6): 066108.
- [13] Tadić B, Thurner S, Rodgers G J. Traffic on complex networks: Towards understanding global statistical properties from microscopic density fluctuations[J]. Physical Review E, 2004, 69(3): 036102.
- [14] Barankai N, Fekete A, Vattay G. Effect of network structure on phase transitions in queuing networks[J]. Physical Review E, 2012, 86(6): 066111.

(责任编辑 赵业玲)