

基于李雅普诺夫控制的随机开放量子系统特性分析

丛爽, 胡龙珍, 薛静静, 温杰

中国科学技术大学自动化系, 合肥 230027

摘要 测量给确定性的开放量子系统带来了随机项,使随机开放量子系统本身产生一些马尔科夫和非马尔科夫开放量子系统所不具有的特性,这些特性给随机开放量子系统带来一些新的作用和影响。在目前有关随机开放量子系统李雅普诺夫控制理论研究的基础上,分别对无控制作用下随机开放量子系统的内部特性、开关控制和连续控制作用下系统的状态转移性能进行仿真研究。结果表明,在测量所带来的随机回馈项的作用下,在无控制的自由演化情况下,系统的状态最终随机地收敛到测量算符的某个本征态,其可能达到的本征态的个数与初态密度矩阵中对角线非零元素的个数相等;不论是开关控制还是连续控制,系统都能够从任意的初始纯态转移到期望的本征态,但相比于开关控制,连续控制的收敛速度更快,达到期望目标态所用时间更短。

关键词 随机开放量子系统;李雅普诺夫反馈控制;状态转移

中图分类号 TP202*.4

文献标志码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2014.22.001

Characteristic Analysis of Stochastic Open Quantum Systems via Lyapunov-based Control

CONG Shuang, HU Longzhen, XUE Jingjing, WEN Jie

Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China

Abstract Quantum measurement brings a stochastic term to deterministic open quantum systems, which makes the systems display some unique characteristics distinguished from the Markovian and non-Markovian open quantum systems. These characteristics bring some new roles to and effect on the stochastic open quantum system. Based on the related work on the global stability for stochastic open quantum systems via Lyapunov stabilization theorem established recently, the characteristic analysis without control fields and the state transfer with the switching control and continuous control are studied, respectively. Numerical simulation experiments are implemented under the Matlab environment. The simulation results demonstrate that the system without the action of the control will randomly converge to some eigenstate of the measurement operator and the numbers of eigenstates and diagonal non-zero elements of the initial state's density matrix are equal, and that under the action of the control, the stochastic open quantum system can transfer the state from an arbitrary initial pure state to the desired target eigenstate. However, compared to the switching control, the continuous control system performance has a faster convergence speed and a shorter transfer time.

Keywords stochastic open quantum systems; Lyapunov feedback control; state transfer

量子系统控制对量子信息技术的实现具有重要意义,尤其是在量子光学和原子物理上取得的技术进步,使得量子系统的实时反馈控制成为可能^[1]。从量子系统控制理论角度来

看,根据控制过程中是否存在测量,及是否将测量信息应用于控制律的变量中,可以将控制策略分为开环控制和反馈控制。其中,基于测量的反馈控制(measurement-based feedback

收稿日期:2014-03-10;修回日期:2014-06-11

基金项目:国家重点基础研究发展计划(973计划)项目(2006CB922000)

作者简介:丛爽,教授,研究方向为先进控制策略、人工智能、智能控制及量子系统控制等,电子信箱:scong@ustc.edu.cn;胡龙珍(共同第一作者),硕士研究生,研究方向为开放量子系统的特性分析和状态控制,电子信箱:lzhzh1217@mail.ustc.edu.cn

引用格式:丛爽,胡龙珍,薛静静,等.基于李雅普诺夫控制的随机开放量子系统特性分析[J].科技导报,2014,32(22):15-22.

control, MFC)是通过直接或者间接的量子观测来获取量子信息进行量子状态估计,进而设计控制律进行量子状态调控。对于经典系统,测量过程对被测系统本身的状态是没有影响的,但是对于量子系统,测量会对量子系统本身产生不可避免的随机影响,系统的状态会随机收敛到某些状态,即:量子态还原^[1]。在不同的测量手段或者检测方式下,量子系统状态的估计结果是不一样的,这可以归结为量子滤波问题,而量子滤波问题本质上可以看作是计算系统观测量的条件期望值^[2-4]。通常来说,条件期望的计算取决于相互作用系统状态的特性,因此,当被控系统处于真空态、相干态,或处在一个具备非经典光学特性的状态,量子滤波方程的形式都是不同的。值得注意的是,检测方式不同,量子滤波方程的形式也不同,比如:零差检测和光电检测下得到的量子滤波方程就有2种不同形式^[2]。量子滤波方程描述了测量下的量子态的动力学演化系统,滤波方程中包含通过测量和滤波所估计出的量子状态,可以通过将连续测量和反馈控制策略相结合,构成随机开放量子系统的反馈控制。

有关随机开放量子系统反馈控制的研究可以归纳为2大类:线性和非线性随机开放量子系统反馈控制。当量子系统处于某些特殊的初态或者某个时刻段时,可通过线性化处理加上测量将复杂的被控系统转化为线性随机开放量子系统,James和Petersen研究团队成功地将经典线性系统控制理论中的LQG控制^[5]、H[∞]控制^[6]应用到了线性光学量子系统中。有关非线性随机开放量子系统的研究焦点集中在设计全局稳定反馈控制律上,以实现系统的控制目标。2005年,Handel等^[7]针对原子系综,给出了量子反馈控制方案,并设计出全局稳定反馈控制律制备本征态;在将李雅普诺夫控制^[8]引入到随机开放量子系统的稳定性研究中,解决了低维随机开放量子系统的稳定问题,但此方法不适用于高维系统;Ticozzi等^[9]将研究对象扩展到了N维系统,但由于李雅普诺夫函数选取的局限性,所设计出的反馈控制律只能使系统几乎全局稳定。2007年,Mirrahimi和Handel利用李雅普诺夫稳定性定理和LaSalle不变原理,针对N维角动量系统,给出了全局收敛到观测量的任意本征态的反馈控制律^[10];针对双比特量子系统,给出了全局收敛到纠缠态的反馈控制律,但所设计出的控制律均为开关控制;2007—2008年,Tsumura对开关控制进行了改进,设计出连续反馈控制律,实现了系统全局收敛到任意本征态^[11,12]。此外,2013年,Ticozzi等从哈密顿控制的角度出发,研究了随机开放量子系统的稳定性问题^[13]。

总的来说,由于对开放量子系统的测量和滤波给系统带来了随机项,使得随机开放量子系统所表现出的特性更加复杂,对其内部特性的分析和控制器的设计也更加困难。有关随机开放量子系统控制的研究时间并不长,目前只能实现对本征态的收敛控制律的设计;在控制设计的形式上,主要有开关控制和连续控制两大类。本文在目前有关随机量子系统李雅普诺夫收敛性控制理论研究的基础上,分别对无控

制作用下的随机量子系统的内部特性、控制作用下系统的状态转移控制性能进行仿真研究,探讨开关与连续控制作用下的参数对系统控制性能的影响,并对2种控制作用下所获得的系统控制性能进行对比分析。

1 随机量子系统反馈控制策略

1.1 随机量子系统主方程

考虑在真空环境下连续测量的量子反馈控制系统,记t时刻的量子系统状态为 ρ_t ,则量子滤波方程,或称为随机主方程(stochastic master equation, SME)的一般表达形式为

$$\begin{cases} d\rho_t = -\frac{i}{\hbar}[H_t, \rho_t]dt + D(L, \rho_t)dt + \sqrt{\eta}H(L, \rho_t)dW_t \\ \rho_0 = \rho(0) \end{cases} \quad (1)$$

式中, $H_t = H_0 + u_t H_u$ 为总哈密顿量, H_0 为系统自由哈密顿量, H_u 为控制哈密顿量, u_t 是随时间变化的外部控制场; η 是测量效率,且满足 $0 < \eta \leq 1$;L是测量算符,系统信号通过此测量信道被检测,由测量引起的反作用效应则通过此信道反馈给量子系统; W_t 为具有随机特性的随机过程,也被称作“新息”。为了简单起见,一般设置普朗克常数 $\hbar = 1$ 。 $D(L, \rho_t)dt$ 和 $H(L, \rho_t)dW_t$ 分别体现了测量反作用效应中确定性漂移部分和随机耗散部分,其中, $D(L, \rho_t)$ 为开放量子系统中常见的Lindblad算子; $H(L, \rho_t)$ 是状态更新算子;真空环境下的 W_t 就是标准的实值Wiener过程, dW_t 作为标准Wiener过程的增量,代表着对测量白噪声的建模,满足:期望 $E(dW_t) = 0$,方差 $E((dW_t)^2) = dt$ 。Lindblad算子 $D(L, \rho_t)$ 、状态更新算子 $H(L, \rho_t)$ 以及随机过程增量 dW_t 的表达式分别为

$$D(L, \rho_t) \equiv L\rho_t L^* - \frac{1}{2}(L^*L\rho_t + \rho_t L^*L) \quad (2)$$

$$H(L, \rho_t) = L\rho_t + \rho_t L^* - \text{tr}((L+L^*)\rho_t)\rho_t \quad (3)$$

$$dW_t = dy_t - \sqrt{\eta} \text{tr}(\rho_t(L+L^*))dt \quad (4)$$

式中, L^* 是L的共轭转置。

从所给出的随机量子系统主方程(1)~(4)中可以看出:与确定性的开放量子系统模型相比,随机量子系统主方程多了一个随机耗散部分项,这个项的大小由测量效率 η 值得大小来确定。在实际的量子反馈控制系统中,不同测量方式决定不同的随机项,不同测量效率 η 也产生不同的随机项的大小。以角动量作为可观测量为例:当原子簇数目为n时,量子态的角动量维数则为 $N = 2J + 1$,其中 $J = n/2$ 是动量的绝对值。若在实验中以z方向的原子簇角动量为检测量,在于y方向上施加可控磁场,则相应的量子滤波方程可以整理为关于 ρ_t 的非线性Itô随机微分方程^[10]:

$$\begin{aligned} d\rho_t = & -iu_t[F_y, \rho_t]dt - \frac{1}{2}[F_z, [F_z, \rho_t]]dt + \\ & \sqrt{\eta}(F_z\rho_t + \rho_t F_z - 2\text{tr}(F_z\rho_t)\rho_t)dW_t \end{aligned} \quad (5)$$

式中, F_y 是沿y方向的角动量; F_z 是沿z方向的角动量,且 F_z 为对角实矩阵,且满足 $F_z = F_z^*$,它们分别为

$$F_y = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 0 & -c_1 & & & & \\ c_1 & 0 & & & & \\ & \ddots & -c_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & c_{2j-1} & 0 & -c_{2j} \\ & & & & c_{2j} & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中, $c_m = \sqrt{(2J+1-m)m}$, $m=1, \dots, 2J$ 。

$$F_z = \begin{bmatrix} J & & & & & \\ & J-1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -J+1 & & \\ & & & & -J & \end{bmatrix} \quad (7)$$

当 $N=4$ 时, 可以计算出动量的绝对值为 $J = \frac{N-1}{2} = \frac{3}{2}$, $m=1, 2, 3$ 。根据式(6)、(7)可以确定出沿 y 与 z 方向的角动量分别为

$$F_y = -\frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, F_z = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

1.2 随机李雅普诺夫反馈控制方案

随机开放量子系统的全局稳定控制问题可以表述为: 寻找一个反馈控制器 u_t 来使量子系统全局稳定到期望的目标态 ρ_t , 且当 $t \rightarrow \infty$ 时, 状态 ρ_t 的期望 $E(\rho_t)$ 能够收敛到 ρ_t , 即 $E(\rho_t) \rightarrow \rho_t$ 。目前, 对于 N 维的角动量系统, 基于随机李雅普诺夫理论和 LaSalle 不变原理等技术的控制策略主要分为 2 种: 开关控制策略和连续控制策略^[10-12]。Mirrahimi 等 2007 年提出一种开关控制策略, 当期望的目标态为测量算符 L 的本征态 ρ_t 时, 证明了一种收敛的控制律 u_t 的公式为^[10]

$$u_t = \begin{cases} u_1(\rho_t) = -\text{tr}(i[F_y, \rho_t]\rho_t), & \text{tr}(\rho_t \rho_t) \geq \gamma \\ u_2 = 1, & \text{tr}(\rho_t \rho_t) \leq \gamma/2 \\ u_t(\rho_t), & \rho_t \in B, \text{且通过 } \text{tr}(\rho_t \rho_t) = \gamma \text{ 进入 } B, \\ & \text{其中 } B \triangleq \{\rho: \gamma/2 < \text{tr}(\rho_t \rho_t) < \gamma\} \\ u_2, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

式中, γ 为控制律切换的临界参数, 且 $0 < \gamma \leq 1$ 。

由于开关控制需要根据不同的情况在几个控制函数之间进行快速切换, 这给控制的实现带来一定的难度。Tsumura 针对这一问题对开关控制(式(9))进行了改进, 于 2008 年推导并证明出一种连续反馈控制律 u_t ^[12]

$$u_t = \alpha u_1(\rho_t) + \beta V_{\rho_t}^1(\rho_t) \quad (10)$$

式中, $u_1(\rho_t) = -\text{tr}(i[F_y, \rho_t]\rho_t)$, $V_{\rho_t}^1(\rho_t) = \lambda_i - \text{tr}(F_z \rho_t)$, $\lambda_i = J - (i-1)$, α 和 β 是可调的控制参数, 且需要满足系统(式(5))全局稳定的充分条件: $(\beta^2/8\alpha\eta) < 1$ 。

式(10)中的控制律 u_t 由两项组成, 其中, $\alpha u_1(\rho_t)$ 主要是用来控制系统状态收敛到期望目标态, $V_{\rho_t}^1(\rho_t)$ 是用来驱动系统状态远离其他系统稳态。需要注意的是, 虽然 $(\beta^2/8\alpha\eta) < 1$ 仅仅是系统全局稳定的充分条件, 但是它为实际应用中的参

数选取提供了依据。在上述两种已提出的收敛控制策略的基础上, 本文重点以状态转移控制为出发点, 通过系统仿真实验, 分析无控制作用下的系统内部特性、控制作用下系统状态转移的控制性能。

2 无控制作用下系统内部特性分析

随机开放量子系统的独特性主要表现在由于测量引起的反作用效应会通过测量信道反馈给量子系统, 测量效率 η 直接影响着系统特性, 一般来说, 测量效率 η 是由实际实验状况决定的, 满足 $0 < \eta \leq 1$, 当 $\eta=1$ 时, 其测量被称为“完美测量”, 但这在实际中是无法实现的。因此, 本节在对系统内部特性进行分析时, 通过研究不同的测量效率 η 值对系统状态 ρ_t 的纯度 $p_t = \text{tr}(\rho_t^2)$ 的影响, 来揭示随机量子系统本身在没有外加控制(即 $u_t=0$)作用的情况下所表现出的特性。

对于 $N=4$ 的角动量系统, 根据公式(5)可知, 测量算符 L 即是公式(8)所示的 4×4 的对角矩阵 F_z , 其中有 4 个本征态 ρ_{ei} , $i=1, 2, 3, 4$, 分别为: $\rho_{e1} = \text{diag}\{[1 \ 0 \ 0 \ 0]\}$, $\rho_{e2} = \text{diag}\{[0 \ 1 \ 0 \ 0]\}$, $\rho_{e3} = \text{diag}\{[0 \ 0 \ 1 \ 0]\}$ 和 $\rho_{e4} = \text{diag}\{[0 \ 0 \ 0 \ 1]\}$ 。在系统状态转移仿真实验中, 目标态 ρ_t 应满足: $\rho_t \in \{\rho_{ei}\}$ 。此外, 在系统仿真实验中, 被控系统(式(5))的实现将采用 Runge-Kutta 方法, 采样步长均设置为: $\Delta t = dt = 0.01$, 实验时间长度为: $T = 20$ a.u., dW_t 是服从均值为 0、方差为 $dt = 0.01$ 的正态分布。

选取系统初始状态 ρ_{01} 为叠加态:

$$\rho_{01} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

此时有 $p_{01} = \text{tr}(\rho_{01}^2) = 1$ 成立。对测量效率 η 从 $\eta_0 = 0.01$ 开始, 以等间距 $\Delta\eta = 0.01$ 增大至 $\eta_t = 1$, 分别进行系统状态的纯度 p_t 随测量效率 η 和时间变化的实验, 在 20 a.u. 时间里, 纯度 p_t 随 η 值和时间变化的系统仿真实验结果如图 1 所示, 其中从蓝色到绿黄红色的变化表示纯度 p_t 从 0.5 到 1 之间的变化情况。由图 1 可以看出: 1) 当 $\eta \in \{\eta, 0 < \eta < 0.2\}$ 时, 系统状态的纯度 p_t 的幅度由小到大变化较大, 但基本上都处于纯度小于 1 的情况, 这表明系统从最初的纯态演化到了混合态, 如果延长仿真实验的时间, 系统的状态最终还是可以还原到某一纯态的; 2) 随着 η 值的增大, 纯度 p_t 的变化幅度将逐渐减小, 其变化过程所需要的时间也缩短; 3) 当 $\eta \in \{\eta, 0.9 < \eta \leq 1\}$ 时, 纯度 p_t 的值基本在 0.9~1 之间, 变化幅度很小, 表明系统的状态能够很快地演化到纯态, 并保持不变。

通过实验及结果可以发现: 测量操作能够将量子信息通过测量通道反馈给被控量子系统, 对系统的耗散作用进行了有效地补偿, 这种基于测量的反馈系统特性类似于 non-Markovian 开放量子系统特性。对于所研究的 $N=4$ 的角动量系统, 当测量效率 η 取值很小(如 $\eta \in \{\eta, 0 < \eta < 0.2\}$) 时, 则

需要较长的时间来体现对系统状态的补偿特性;当测量效率 η 取值很大(如 $\eta \in \{\eta, 0.9 < \eta \leq 1\}$) 时,由测量对系统状态所表现出的补偿特性变化得非常迅速。为能够充分展现出测量对系统状态的影响,在后面的控制作用下的系统仿真实验中,将测量效率取值为 $\eta = 0.5$ 。此外值得一提的是,由于测量噪声的随机性,图 1 所示的仅为 1 次实验的运行结果,当进行多次仿真实验时,纯度 p_t 具体的变化情况可能会与图 1 有所不同,不过所体现出的变化规律是一致的。

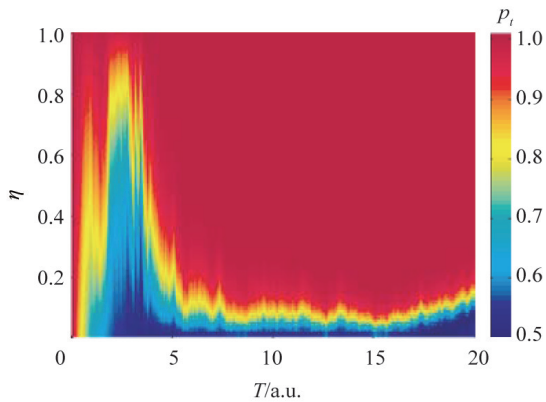


图 1 纯度 p_t 随 η 值和时间的变化
Fig. 1 Function of purity p_t changes with η and the time

下面将固定测量效率 $\eta = 0.5$, 初态为式(11)的情况下,研究密度矩阵 ρ_t 在演化过程中各个元素的变化及其到达系统稳态的情况。位于初态 ρ_{0i} 中非零位置的元素 ρ_{11} 、 ρ_{12} 、 ρ_{21} 和 ρ_{22} 在 5 次实验中随时间的变化曲线分别如图 2(a)~(d) 所示,其中黑色实线、红色虚线、蓝色点线、绿色点化线和灰色实线分别代表不同位置元素同一次的运行结果。

从图 2 可以看出:在系统仿真实验过程中,处在非对角线位置的元素 ρ_{12} (图 2(b)) 和 ρ_{21} (图 2(c)) 的 5 次实验结果均是振荡衰减为 0; 而处在对角线位置上的元素 ρ_{11} (图 2(a)) 和 ρ_{22} (图 2(d)) 的 5 次实验结果,出现随机的振荡增加为 1 或者振荡衰减为 0。通过观察原本处在初态 ρ_{0i} 零位置元素的变化情况,发现其在仿真过程中均保持不变,因此,系统从初态 ρ_{0i} 可能演化到的稳态有 2 个,分别是: $\rho_{s1} = \text{diag}\{1 \ 0 \ 0 \ 0\}$ 和 $\rho_{s2} = \text{diag}\{0 \ 1 \ 0 \ 0\}$ 。研究发现,如果改变系统初态,系统在不同初态下所收敛到的稳态 $\{\rho_{sj}\}$ 是与系统初态相关的,其中 j 与初态的密度矩阵中对角线非零元素的个数相等,代表着可能到达的稳态的个数,系统的稳态 $\{\rho_{sj}\}$ 与测量算符 F_i 的本征态 $\{\rho_{ci}, i = 1, 2, 3, 4\}$ 满足: $\{\rho_{sj}\} \subseteq \{\rho_{ci}, i = 1, 2, 3, 4\}$ 。此外,通过进行不同测量效率 η 值下系统从同一初态开始演化的仿真实验发现:量子态的还原时间是随着测量效率 η 值的增大而缩短的,这与图 2 的结论一致。

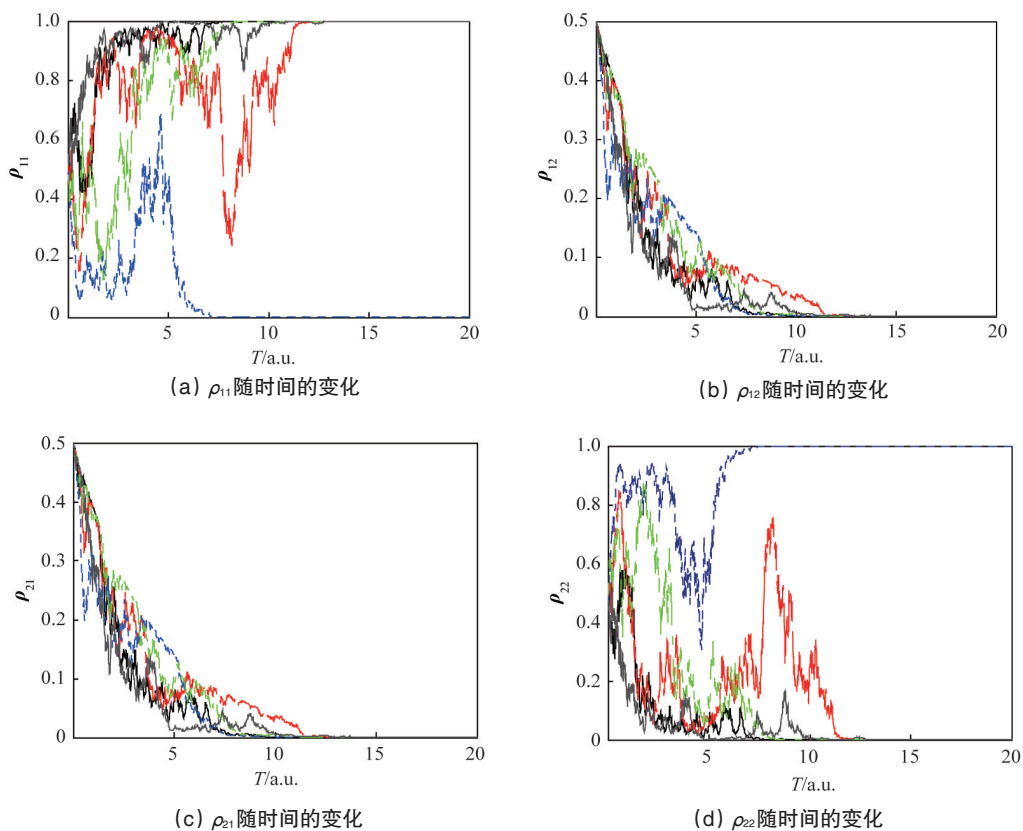


图 2 $\eta = 0.5$ 时状态 ρ_t 从初态 ρ_{0i} 的自由演化
Fig. 2 Free evolution curves of ρ_t starting from ρ_{0i} with $\eta = 0.5$

3 反馈控制作用下的系统状态转移性能分析

反馈控制作用下的系统状态转移性能分析将分别研究:

1) 开关控制作用下,不同的 γ 值对控制性能的影响;2) 连续控制作用下,可调参数 α 和 β 对控制性能的影响,探讨随机量子系统控制中的参数选择问题;3) 对2种控制方案下的系统状态转移控制性能进行对比和分析。

选取系统状态 ρ_i 与目标态 ρ_f 之间的距离 $\varepsilon(\rho_i)$ 作为状态转移的性能指标

$$\varepsilon(\rho_i) = 1 - \text{tr}(\rho_i \rho_f), 0 \leq \varepsilon(\rho_i) \leq 1 \quad (12)$$

分析公式(12)可知,当且仅当 $\rho_i = \rho_f$ 时, $\varepsilon(\rho_i) = 0$ 。因此, $\varepsilon(\rho_i)$ 值越接近于0,系统演化终态则越接近目标态,转移精度越高。实验中设置状态转移目标值为 $\varepsilon_0 = 1 \times 10^{-5}$,在系统状态调控过程中达到转移目标 ε_0 时,则认为实现了状态转移。进一步的,若在之后的仿真时间段内能一直满足 $\varepsilon(\rho_i) < \varepsilon_0$,则认为在此实验时间段内实现了状态保持。

3.1 开关控制作用下参数 γ 对控制性能的影响

开关控制作用下参数 γ 对控制性能的影响将重点研究开关控制律中参数 γ ($0 < \gamma \leq 1$)对状态转移控制性能的影响,并且,通过分析 γ 取不同值的情况下系统所能达到的不同的控制性能函数 $\varepsilon(\rho_i)$,来探讨合适的 γ 取值。系统仿真实验分为2组:1) 从叠加态与本征态之间的状态转移;2) 本征态与本征态之间的状态转移,其中,参数 γ 的取值均是从 $\gamma_0 = 0.01$ 开始以等间距 $\Delta\gamma = 0.01$ 增大至 $\gamma_f = 1$ 。

系统初态为式(11)所示的叠加态 ρ_{01} ,目标态选取为本征态: $\rho_{s1} = \text{diag}\{[1 \ 0 \ 0 \ 0]\}$ 和 $\rho_{s2} = \text{diag}\{[0 \ 1 \ 0 \ 0]\}$ 。在开关控制作用式(9)下,仿真实验时间长度设置为: $T = 20$ a.u.。系统均从初态 ρ_{01} 分别转移到目标态 ρ_{s1} 和 ρ_{s2} 时,性能指标函数 $\varepsilon(\rho_i)$ 随 γ 值和时间变化的实验结果如图3所示,其中,图3(a)的目标态为 ρ_{s1} ,图3(b)的目标态为 ρ_{s2} ;图中的颜色从蓝色到绿黄红色分别代表着 $\varepsilon(\rho_i)$ 值从0变化到1的过程,黑色区域表示的是性能指标满足 $\varepsilon(\rho_i) < \varepsilon_0$ 的情况,连续黑色区域可以认为是状态的保持阶段。从图3(a)中可以看出:当从 ρ_{01} 转移到 ρ_{s1} 时,参数 γ 在几乎所有的可取值范围内 $\{\gamma, 0.01 < \gamma < 0.95\}$ 都能使得系统的状态转移到期望的目标态,并且仅需要花费5.52 a.u.的时间,同时还能够长时间的保持目标态。

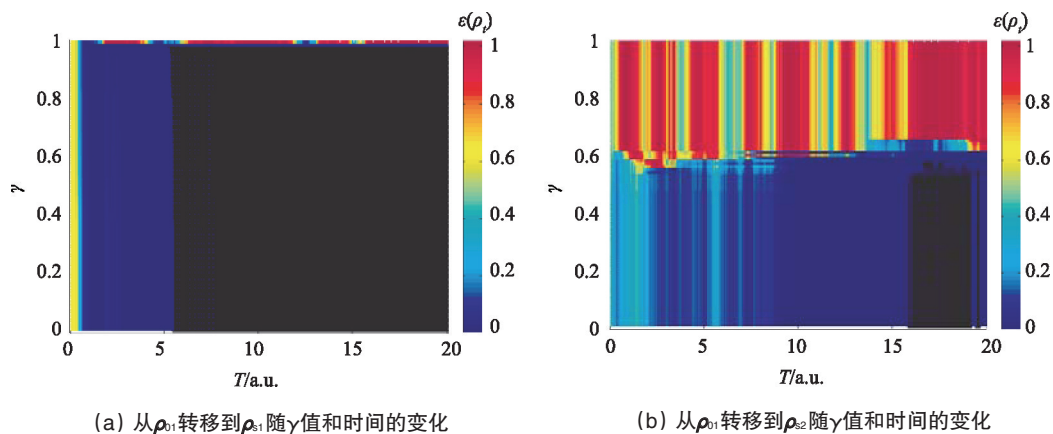


图3 开关控制作用下从叠加态转移到本征态时 $\varepsilon(\rho_i)$ 随 γ 值和时间变化的变化

Fig. 3 Function of $\varepsilon(\rho_i)$ changes with γ and time when a superposition state transfers to eigenstates under switching control

从图3(b)可以看出:相比较于从 ρ_{01} 转移到 ρ_{s1} ,从 ρ_{01} 转移到 ρ_{s2} 时,可以使得系统达到目标态的参数 γ 的有效取值范围小了许多,只有 $\{\gamma, 0.01 < \gamma < 0.5\}$,并且到达转移目标所用的仿真时间用了15.97 a.u.,只保持到19.15 a.u.,保持时间为3.18 a.u.,而图3(a)中黑色区域的保持时间从5.52 a.u.一直到20 a.u.,保持时间为10.45 a.u.。这说明不同的本征态作为目标态时,参数 γ 的有效取值范围大小差别是很大的。

当控制系统状态在本征态 $\{\rho_{ci}, i = 1, 2, 3, 4\}$ 任意2个之间进行转移时,本研究一共进行了所有的12种情况的系统仿真实验。通过研究仿真实验的结果发现:当目标态为 ρ_{s1} ,初态分别为 $\{\rho_{ci}, i = 2, 3, 4\}$ 时的3组实验结果所表现出的变化规律是一致的,而目标态分别为 $\{\rho_{ci}, i = 2, 3, 4\}$ 时的9组实验结果具有相同变化规律。因此以 ρ_{s1} 与 ρ_{s2} 之间的状态转移

为例,在实验时间为40 a.u.情况下,所获得的不同参数 γ 与系统控制性能 $\varepsilon(\rho_i)$ 之间关系的实验结果如图4所示,其中,图4(a)是从 ρ_{s1} 转移到 ρ_{s2} ,图4(b)是从 ρ_{s2} 转移到 ρ_{s1} 。

从图4(a)可以看出:当从 ρ_{s1} 转移到 ρ_{s2} 时,能够使状态转移到目标态的参数 γ 的有效取值范围并不是连续的:在 $\{\gamma, 0.4 < \gamma < 0.5\}$ 取值时,达到转移目标所用的仿真时间约为22.14 a.u.,在 $\{\gamma, 0.01 < \gamma < 0.4\}$ 取值范围内,在25.12 a.u.时首次达到转移目标,之后性能指标函数 $\varepsilon(\rho_i)$ 出现振荡增加,在29.52 a.u.时系统再次达到状态转移目标,此后对于 $\{\gamma, 0.01 < \gamma < 0.58\}$,系统状态能够一直保持在目标态;从图4(b)可以看出:当从 ρ_{s2} 转移到 ρ_{s1} 时,能够使状态转移到目标态的参数 γ 的有效取值范围近似为矩形,大致为 $\{\gamma, 0.02 < \gamma < 0.95\}$,并且在 γ 的有效取值内,达到状态转移

目标所用转移时间近似相等,大致为 7.75 a.u.,之后实现了状态保持。这表明,相比于目标态为 ρ_{s2} 的情况,目标态为 ρ_{s1} 时, γ 的有效取值范围要大很多,同时达到状态转移目标所

用的时间明显缩短,且实现状态转移后,系统能够比较稳定地保持在目标态。

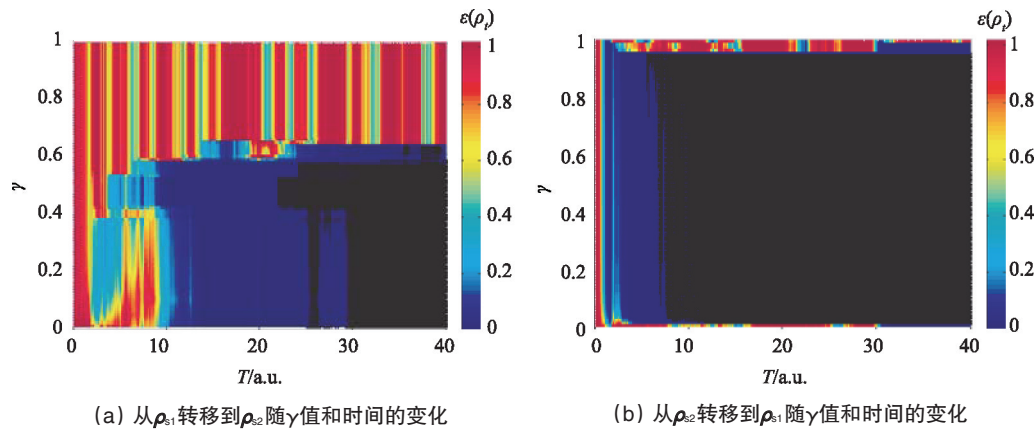


图4 开关控制作用下从本征态转移到本征态时 $\varepsilon(\rho)$ 随 γ 值和时间的变化

Fig. 4 Function of $\varepsilon(\rho)$ changes with γ and time when states transfer are between eigenstates under switching control

通过叠加态到本征态以及本征态之间的状态转移实验可知,较好的参数 γ 值是:在状态从初始态调控到目标态的过程所花费的时间较短,并且达到目标态后,系统状态能够稳定地保持在目标态的时间较长。综合图3和图4的实验结果,分析可得较好的参数 γ 值为 $\gamma=0.5$ 。当设置不同的系统初态和目标态时,参数 γ 的取值是不一样的,本研究给出的选取方法,通过大致遍历 γ 取值,对控制性能进行分析,是一种比较严谨的方法。

3.2 连续控制下,参数 α 和 β 对控制性能的影响

在连续控制律式(10)中,可调参数 α 和 β 需要满足约束条件 $(\beta^2/8\alpha\eta) < 1$,不同的可调参数 α 和 β 对控制性能的影响是不同的。本研究参数调整的策略是:固定其中一个参数,通过求解不等式 $(\beta^2/8\alpha\eta) < 1$,得到另一个参数的取值范围,确定此参数取值的上下边界值,并从下边界值等间距变

化到上边界值,则可以生成大量的不同参数组合对 (α, β) ,在此基础上,分析系统状态转移的控制性能,并选取合适的控制参数对 (α^*, β^*) 。系统状态转移仿真实验分为2组:从叠加态 ρ_{01} 转移到本征态 ρ_{s1} 以及从本征态 ρ_{s2} 转移到本征态 ρ_{s1} 。

固定参数 $\alpha=1$,计算满足约束条件的参数 β 取值范围为 $-2 < \beta < 2$ 。在约束条件中,参数 β 仅以平方的形式出现,故可以推断:当 $\beta \in \{-2 < \beta < 2\}$,分析不同控制参数对 (α, β) 下的系统性能指标函数 $\varepsilon(\rho)$ 的变化情况时, $\varepsilon(\rho)$ 将会以 $\beta=0$ 为分界线对称变化,因此,可以以 $\beta \in \{0 \leq \beta < 2\}$ 为取值范围来进行研究,在系统仿真实验中,参数 β 从 $\beta_0=0$ 开始以等间距 $\Delta\beta=0.01$ 增大至 $\beta_f=1.99$,仿真时间设置为 $T=20$ a.u.。图5所示的是连续控制作用下,系统状态转移过程中 $\varepsilon(\rho)$ 随参数 β 和时间的变化,其中,图5(a)是从 ρ_{01} 转移到 ρ_{s1} ,图5(b)是从 ρ_{s2} 转移到 ρ_{s1} 。

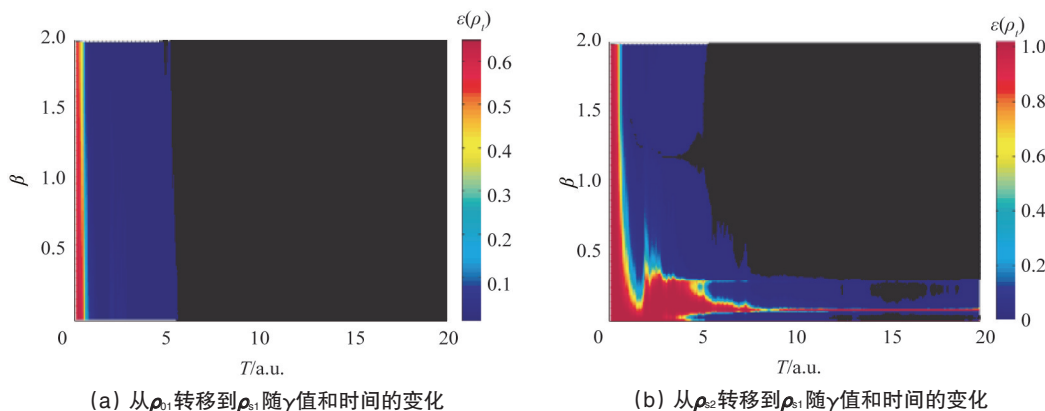


图5 连续控制作用下 $\varepsilon(\rho)$ 随 β 值和时间的变化

Fig. 5 Function of $\varepsilon(\rho)$ changes with β and time under continuous control

从图5(a)可以看出,对于初态为叠加态 ρ_{01} 时,当 $\beta \in \{0 \leq \beta \leq 1.99\}$ 时, $\varepsilon(\rho_i)$ 的变化情况大致相同,在仿真时间约为5.52 a.u.时均到达转移目标,并且能够稳定保持在目标态 ρ_{s1} ,这表明:在从 ρ_{01} 转移到 ρ_{s1} 的仿真实验中,参数 β 的有效取值范围为 $\{0 \leq \beta \leq 1.99\}$ 。从图5(b)可以看出,对于初态为本征态 ρ_{s2} 时,在 $\beta \in \{0 \leq \beta < 0.3\}$ 时,在初始时间段 $[0, 10]$ 内 $\varepsilon(\rho_i)$ 振荡变化比较剧烈,之后不连续的黑色区域表明系统状态在达到转移目标 ε_0 后,不能稳定的保持的目标态,而是出现了 $\varepsilon(\rho_i)$ 振荡增加的情况;而当 $\beta \in \{0.35 \leq \beta \leq 1.99\}$ 时,相比于其他 β 取值,系统状态在仿真时间约为7.73 a.u.时均达到转移目标 ε_0 ,并在仿真时间内一直保持在目标态。因此,初态为本征态 ρ_{s2} 时,参数 β 的有效取值范围为 $\{0.35 \leq \beta \leq 1.99\}$,明显小于初态为叠加态 ρ_{01} 的情况。

对比图5(a)和图5(b)可以发现,在相同的参数调整策略下,对于不同的系统初态,控制参数 α 和 β 对控制性能的影响是不同的。当改变系统的初态和目标态后,控制参数 α 和 β 需要重新调整。与3.1节中参数 γ 的选取准则类似,对于从叠加态 ρ_{01} 和本征态 ρ_{s2} 转移到本征态 ρ_{s1} 的这2组实验,本研究希望状态调控过程中,在达到转移精度后能够稳定在目标态,以此确定较好的参数 α 和 β 为: $\alpha=1, \beta=1$ 。

3.3 两种控制作用下的控制性能对比分析

在确定的控制参数下(分别为: $\eta=0.5, \gamma=0.5, \alpha=1, \beta=1$)对比分析两种不同控制方案的系统状态转移控制性能。在开关控制和连续控制作用下,进行了2组系统仿真实

验:1)分别以叠加态 ρ_{01} 和本征态 ρ_{s2} 为初态,转移到本征态 ρ_{s1} ;2)以任意纯态为初态,转移到本征态 ρ_{s1} 。实验仿真时间均设置为 $T=40$ a.u.。由于测量噪声的随机性对实验结果会有一些影响,本研究运行 M 次系统仿真实验,通过对性能指标函数 $\varepsilon_i(\rho_i), i=1, \dots, M$ 进行平均值处理,得: $\bar{\varepsilon}(\rho_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \varepsilon_i(\rho_i)$,通过分析2种控制作用下平均性能指标函数 $\bar{\varepsilon}(\rho_i)$ 的变化情况,来对比研究不同控制作用下的状态转移控制性能。

图6所示的是以叠加态 ρ_{01} 和本征态 ρ_{s2} 为初态时,分别在开关控制作用和连续控制作用下运行 $M=200$ 次,平均性能指标函数 $\bar{\varepsilon}(\rho_i)$ 随时间的变化曲线,其中,黑色实线代表开关控制作用,红色虚线代表连续控制作用,黑色和红色实心圆点标注的均为 $\bar{\varepsilon}(\rho_i) < \varepsilon_0$ 的情况。图6(a)是从 ρ_{01} 转移到 ρ_{s1} ,图6(b)是从 ρ_{s2} 转移到 ρ_{s1} 。从图6可以看出,以叠加态 ρ_{01} 和本征态 ρ_{s2} 为初态时,在两种控制作用下均能够实现状态转移控制目标,其中,初态为叠加态 ρ_{01} 时,开关控制作用下,达到转移目标 ε_0 所用仿真时间为31.88 a.u.时,连续控制作用下,所用仿真时间为25.43 a.u.;初态为本征态 ρ_{s2} 时,开关控制作用下,达到转移目标 ε_0 所用仿真时间为35.49 a.u.,连续控制作用下,所用仿真时间为34.74 a.u.。2种控制作用下,在达到目标态后,均能一直保持到实验结束时间40 a.u.。结果表明:以叠加态 ρ_{01} 和本征态 ρ_{s2} 为初态时,连续控制作用下所用的状态转移时间均小于开关控制下的情况;同时在2种控制作用下,初态为叠加态 ρ_{01} 时,状态调控所用时间均小于初态为本征态 ρ_{s2} 的情况。

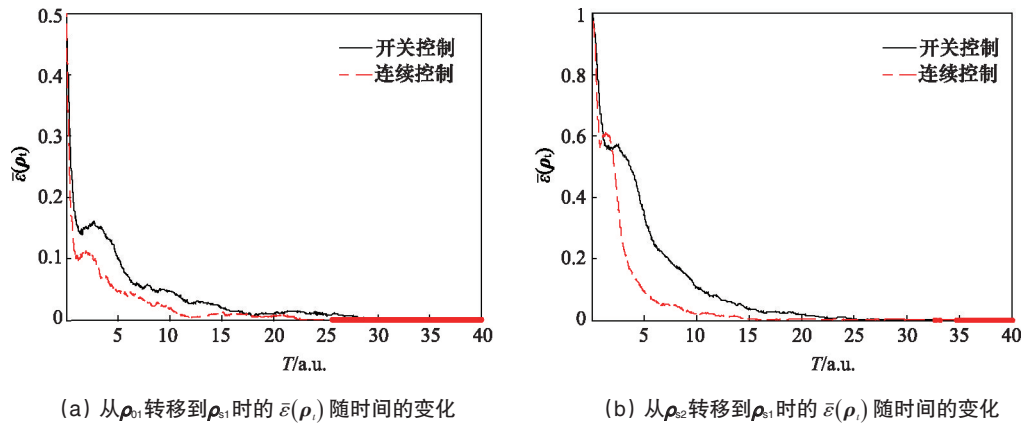


图6 以叠加态 ρ_{01} 和本征态 ρ_{s2} 为初态时 $\bar{\varepsilon}(\rho_i)$ 随时间的变化

Fig. 6 $\bar{\varepsilon}(\rho_i)$ changes with the initial state being superposition state ρ_{01} and the eigenstate ρ_{s2}

以本征态 ρ_{s1} 为目标态,任意选取20个纯态作为初始状态,分别在开关控制作用和连续控制作用下运行 $M=50$ 次,平均性能指标函数 $\bar{\varepsilon}(\rho_i)$ 的变化情况如图7所示,其中,图7(a)是在开关控制作用下的仿真结果,图7(b)是连续控制作用下的实验结果。从图7(a)可知,开关控制作用下,在随机

选取的20个纯态到目标态的转移过程中,平均性能指标函数 $\bar{\varepsilon}(\rho_i)$ 最快达到转移目标 ε_0 所用的时间为20.88 a.u.,在仿真时间结束时未能实现状态转移的情况,但是通过延长仿真时间则能够达到转移目标。从图7(b)可知,连续控制作用下,在仿真时间为16.57~32.17 a.u.内,系统从任意初始纯态均

转移到了目标态, $\bar{\varepsilon}(\rho_i)$ 最快达到转移目标 ε_0 所用的时间为 16.57 a.u., 比开关控制作用下的情况缩短 20.64%。结合图 6 和图 7 的仿真实验结果可知: 不论是开关控制还是连续控制,

系统能够从任意纯态转移到期望的本征态; 相比于开关控制作用, 连续控制作用下的平均性能指标函数 $\bar{\varepsilon}(\rho_i)$ 的衰减速度更快, 达到转移目标 ε_0 所用的时间更少。

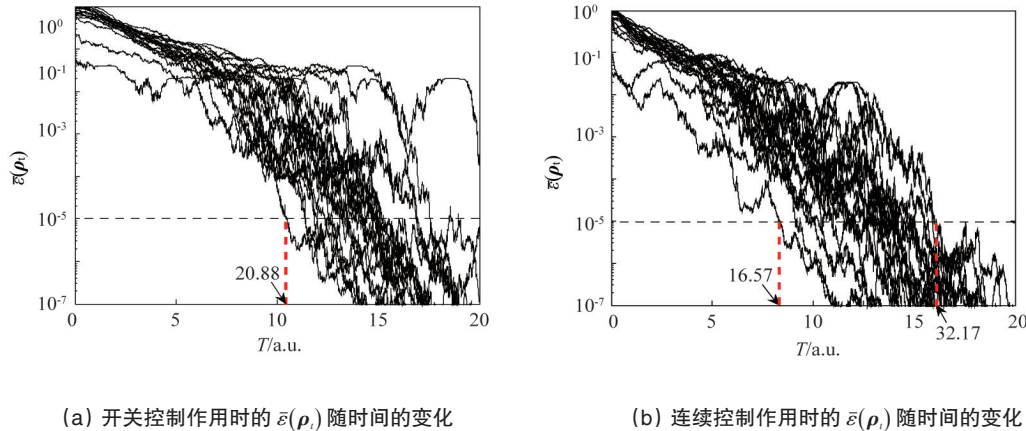


图 7 20 个任意纯态为初态时 $\bar{\varepsilon}(\rho_i)$ 随时间的变化

Fig. 7 $\bar{\varepsilon}(\rho_i)$ changes from 20 randomly initial pure states under different controls

4 结论

在目前有关随机量子系统李雅普诺夫收敛性控制理论研究的基础上, 以 $N=4$ 的角动量系统为研究对象, 分别对无控制作用下的随机量子系统的内部特性, 以及控制作用下系统的状态转移控制性能进行了系统仿真研究。结果表明: 在测量所带来的随机回馈项的作用下, 在无控制作用的自由演化情况下, 系统的状态最终能够随机地收敛到测量算符的某个本征态, 其可能达到的本征态的个数与初态密度矩阵中对角线非零元素的个数相等; 不论是开关控制还是连续控制, 系统能够从任意的初始纯态转移到期望的本征态, 相比于开关控制, 连续控制作用下的性能指标函数收敛速度加快, 缩短达到转移目标所用时间。

参考文献 (References)

[1] Wiseman H, Milburn G. Quantum measurement and control[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
 [2] Bouten L, Van Handel R, James M R. An introduction to quantum filtering[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2007, 46(6): 2199-2241.
 [3] Daoyi D, Petersen I R. Quantum control theory and applications: A survey[J]. IET Control Theory & Applications, 2010, 4(12): 2651-2671.
 [4] Robert L C. Continuous measurement and stochastic methods in quantum optimal systems[D]. New Mexico: University of New Mexico Albuquerque, 2013.
 [5] Shaiju A J, Petersen I R, James M R. Guaranteed cost LQG control of uncertain linear stochastic quantum systems[C]//Proceedings of the

2007 American Control Conference. New York City, USA: IEEE, 2007: 2118-2123.
 [6] Maalouf A I, Petersen I R. Coherent H^∞ control for a class of linear complex quantum systems[C]//2009 American Control Conference. St. Louis, USA: IEEE, 2009: 1472-1479.
 [7] Van Handel R, Stockton J K, Mabuchi H. Modeling and feedback control design for quantum state preparation[J]. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 2005, 7(10): 179-197.
 [8] Van Handel R, Stockton J K, Mabuchi H. Feedback control of quantum state reduction[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(6): 768-780.
 [9] Altafini C, Ticozzi F. Almost global stochastic feedback stabilization of conditional quantum dynamics[EB/OL]. [2005-10-28]. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0510222>.
 [10] Mirrahimi M, Van Handel R. Stabilizing feedback controls for quantum systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2007, 46(2): 445-467.
 [11] Tsumura K. Global stabilization of n-dimensional quantum spin systems via continuous feedback[C]//Proceedings of the 2007 American Control Conference. New York City, USA: IEEE, 2007, 2129-2134.
 [12] Tsumura K. Global stabilization at arbitrary eigenstates of n-dimensional quantum spin systems via continuous feedback[C]//2008 American Control Conference. Seattle, USA: IEEE, 2008, 4148-4153.
 [13] Ticozzi F, Nishio K, Altafini C. Stabilization of stochastic quantum dynamics via open and closed loop control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(1): 74-85.

(编辑 陈华姣)