

求不定二次规划问题全局解的单调化方法

申培萍, 李卫敏, 唐冲

河南师范大学数学与信息科学学院, 新乡 453007

摘要 不定二次规划是全局优化的一类重要问题, 在金融、统计、工程设计等实际问题中有广泛应用。但此类问题可能存在多个非全局最优的局部极值点, 所以求其全局最优解变得十分困难。运用单调优化理论提出一种求不定二次规划问题全局最优解的新方法: 通过引入新变量将问题等价转化为单调优化问题, 然后利用问题的单调结构进行缩减、分割、辅助问题最优值的定界等过程获得近似全局最优解。该解不仅可行且能充分接近真实的全局最优解, 数值结果表明方法可行有效。

关键词 全局优化; 不定二次规划; 单调优化

中图分类号 O221

文献标志码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2014.18.009

A Monotonic Optimization Approach for Solving Globally Generalized Quadratic Programming

SHEN Peiping, LI Weimin, TANG Chong

College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China

Abstract The generalized quadratic programming (GQP) is an important class of global optimization problems with wide applications in the fields of financial management, statistics and design engineering, with multiple local optimal solutions differing from the global solution. Thus, it is very difficult to obtain a global optimal solution for the GQP. Many solution methods were developed for globally solving the GQPs in a special form and the general form. However, these approaches may sometimes provide an infeasible solution, or one far from the true optimum. To overcome these limitations, a monotonic optimization approach is proposed for the GQP. In the approach, the original problem is first converted into an equivalent monotonic optimization problem, whose objective function is just a simple univariate by exploiting the particular features of this problem. Then, a range division and compression approach is used to reduce the range of each variable. Tightening variable bounds iteratively allows the proposed method to reach an approximate solution within an acceptable error by using monotonic functions, in which such solution is adequately guaranteed to be feasible and to be close to the actual global optimal solution. At last, several numerical examples are given to illustrate the feasibility and efficiency of the present algorithm.

Keywords global optimization; generalized quadratic programming; monotonic optimization

随着科学技术的发展,最优化问题广泛应用于企业生产管理、金融、经济、工程设计及控制、网络交通、农业预测、国防军事等重要领域,因此对最优化问题的研究越来越受到人

们关注,特别是二次规划问题在投资组合方面有重要应用。例如,假定一个投资者打算购买 n 种有风险的证券以提高他的资金收益。设用于购买第 j 种证券的资金权重为 x_j

收稿日期:2014-01-18;修回日期:2014-04-22

基金项目:国家自然科学基金项目(11171094, 11171368)

作者简介:申培萍,教授,研究方向为最优化理论与应用,电子信箱:shenpp@htu.cn

引用格式:申培萍,李卫敏,唐冲. 求不定二次规划问题全局解的单调化方法[J]. 科技导报, 2014, 32(18): 58-61.

($j=1, \dots, n$), 则投资组合的决策向量为 $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)^T$; y_j 表示购买第 j 种证券的收益率 (y_j 是一个随机变量, $j=1, \dots, n$); 已知预期平均收益 $\mu_j=E(y_j)$ 及协方差矩阵 $Q=(\sigma_{ij})$, 其中 $\sigma_{ij}=E[(y_i-\mu_i)(y_j-\mu_j)]$ 。该投资者的目标就是最小化总方差 $\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_i x_j$, 此时最大化总收益为 $\sum_{j=1}^n \mu_j x_j$, 其优化模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} - \kappa_b \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_j = 1 \\ & 0 \leq x_j \leq \rho_j, \quad j=1, \dots, n \end{aligned}$$

式中, \min 表示最小值, s.t. 表示使满足约束条件, $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1, \dots, \mu_n)^T$, κ_b 为投资者的风险厌恶系数, ρ_j 为资金权重 x_j 的上限。此类问题是典型的二次规划问题。

此外,二次规划在工程设计、生产计划、设施定位、资源分配、经济金融、大规模集成电路(VLSI)芯片设计等方面有广泛应用^[1,2]。不定二次规划问题在许多非线性规划方法中也起重要作用,例如,信赖域方法中的二次规划子问题^[3],序列二次规划(SQP)方法的子问题等。因此,研究不定二次规划问题在理论和应用方面都有重要的意义。

由于其应用的广泛性,不定二次规划问题已成为当今优化领域的一个研究热点。众所周知,不定二次规划问题也是研究的难点,尤其是非凸二次规划问题存在多个局部极值点,而这些点不一定是全局最优点,所以求其全局最优解变得十分困难。对一些大规模的实际问题,由于执行求解算法所需时间较长,甚至无法求解,而且经常只能获得原问题的一个局部最优解。因此人们往往不去寻找它理论上的最优解,而只能寻找一个满足需要的次优解。该次优解是一个较好的可行解,它能够在一定程度上接近最优解,称其为近似最优解。具体方法是把原问题的约束条件变弱,得到原问题约束条件的松弛条件,然后通过一系列操作求解原问题的近似最优解。当然,近似程度高的方法是主要研究对象。

目前,求解不定二次规划问题的一般形式和特殊形式的方法有很多,例如,文献[4]、[5]针对带有线性约束的不定二次规划问题提出有效算法;文献[6]利用非凸二次函数的性质以及梯度向量构造一种线性化方法;文献[7]将外逼近方法和分支定界技术相结合提出一种分支缩减方法;文献[8]利用半定规划和线性技术提出一种新方法;文献[9]、[10]利用KKT点和构造锥规划来求得全局最优解;文献[11]~[15]利用不同线性化技术分别提出相应的分支定界算法。

本文基于单调优化理论提出了一种求不定二次规划问题全局解的新方法。首先根据原问题的特点将其转化为一个等价的单调优化问题,然后引入近似最优解的概念,利用单调特点采用区域缩减、分割以及辅助优化问题等措施,求得原问题的全局最优解。这区别于文献[11]~[15]中的分支定界方法。

1 求解方法

不定二次规划问题是指目标函数是不定二次函数,约束函数是线性函数或二次函数的全局优化问题。一般形式为

$$\text{(GQP)}: \begin{cases} \min & g_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q_0 \mathbf{x} + \mathbf{d}_0^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} & g_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q_k \mathbf{x} + \mathbf{d}_k^T \mathbf{x} \leq b_k, k=1, \dots, K \\ & \mathbf{x} \in \Omega_0 = \{ \mathbf{x} | 0 < x_i^L \leq x_i \leq x_i^U < \infty, i=1, \dots, N \} \end{cases}$$

式中, $Q_k \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ($k=0, 1, \dots, K$) 为对称矩阵; $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_k \in \mathbf{R}^n$ 为系数向量, $b_k \in \mathbf{R}$ 为常数。

单调化方法是指根据单调优化理论将问题的目标函数和约束函数都变为单调函数并采用一定的措施求得全局最优解的方法。利用单调函数的性质,把复杂的非线性规划问题转化为单调优化模型来求解,这为研究最优化问题带来诸多方便。

1.1 等价转化

根据二次函数的特点,令 $g_k(\mathbf{x})=H_k^+(\mathbf{x})-H_k^-(\mathbf{x})$, $k=0, 1, \dots, K$, 其中 $H_k^+(\mathbf{x})$ 、 $H_k^-(\mathbf{x})$ 均为递增的二次函数。为了求解问题(GQP),使问题的求解更加方便,而同时不失一般性原则,用单变量 x_{N+1} 代替原目标函数并且将原目标函数重新作为一个约束,问题(GQP)能等价转化为如下形式为

$$\text{(P)}: \begin{cases} \min & x_{N+1} \\ \text{s.t.} & f(\mathbf{x}) = \max \{ H_k^+(\mathbf{x}) - H_k^-(\mathbf{x}) | k=0, 1, \dots, K \} \leq 0 \\ & \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{N+1}) \in X^0 \end{cases}$$

式中, x_{N+1} 为目标函数, $f(\mathbf{x})$ 为约束函数, \mathbf{x} 为 $N+1$ 维向量。

此时目标函数是单变量,约束函数是2个递增函数之差。这里为了方便,约束条件均采用不等式形式,而对于等式约束,可以将其等价转化为2个相反的不等式约束。

为求解问题(P),不妨设 V 表示当前最好的目标函数值,在以下讨论中假定

$$f(a) > \varepsilon, a_{N+1} < V - \eta, \{ \mathbf{x} \in X^0 | f(\mathbf{x}) < \varepsilon \} \neq \Phi \quad (1)$$

下面引入问题(P)的近似最优解概念:

给定 $\varepsilon > 0$ 和 $\eta \geq 0$, 令 $E_\varepsilon = \{ \mathbf{x} \in X^0 | f(\mathbf{x}) < \varepsilon \}$, 若点 $\mathbf{x}^* \in E_\varepsilon$ 满足 $x_{N+1}^* \leq \min \{ x_{N+1} | \mathbf{x} \in E_\varepsilon \} + \eta$ 则称 \mathbf{x}^* 为问题(P)的 (ε, η) -最优解,当 $\eta = 0$, (ε, η) -最优解是问题(P)的 ε -可行解。

对于 $X=[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{N+1} | a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, 2, \dots, N+1 \} \subseteq X^0$, 考虑辅助问题(Q): $\min \{ f(\mathbf{x}) | x_{N+1} \leq V - \eta, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{N+1}) \in X \subseteq X^0 \}$, 注意到目标函数和约束函数在(P)和(Q)之间是互换的,用 $\min(P)$ 和 $\min(Q)$ 表示问题(P)和(Q)的最优值, x_{N+1}^U 表示目标函数值的上界。在假设(1)下给出如下讨论:

如果 $\tilde{\mathbf{x}}$ 是问题(Q)中满足 $f(\tilde{\mathbf{x}}) < \varepsilon$ 的可行解,则 $\tilde{\mathbf{x}}$ 是问题(P)的 ε -可行解,其中 $\tilde{x}_{N+1} \leq V - \eta$; 如果 $\min(Q) > 0$, 即 $\min \{ f(\mathbf{x}) | x_{N+1} \leq V - \eta, \mathbf{x} \in X^0 \} > 0$, 当 $V = \tilde{x}_{N+1}$ 时,易知问题(P)的 ε -可行解是一个 (ε, η) -最优解。否则当 V 是初始目标函数的上界值时,问题(P)不存在可行解。

由以上表明通过求解问题(Q)能够判定问题(P)是否存在

在一个可行解使得 $\bar{x}_{N+1} \leq V - \eta$ 。特别地,如果 $\min(Q) > 0$, 那么问题(P)能找到 (ε, η) -最优解, 否则问题(P)没有可行解。实际上,只需要考虑问题(Q)的下界,就可以实现删除操作。此外,因为问题(Q)无孤立可行点,故求解问题(Q)比求解原问题更容易。

1.2 方法的关键环节

为了求解问题特提出单调化方法,此方法主要包括分支、定界和缩减3个关键操作^[16-19]。分支过程采用常用的穷举细分规则—标准对分来逐次细分盒子,定界是利用问题(Q)最优值的下界进行删除和缩减,而缩减的目标是在不失去有效可行解的前提下进行缩减。

为了找到 (ε, η) -最优解,需要计算问题(Q)最优值的一个下界LB,由于 $H_k^+(x)$ 、 $H_k^-(x)$ 都是增函数,所以一个明显的下界是 $LB(X) = \max_{k=0,1,\dots,K} \{H_k^+(a) - H_k^-(b)\}$,但为了有效地求解问题(P),下面能给出一个更紧的界。

对于任何 $X=[a,b]=X^0$, 在假设(1)下,如果 $b_{N+1} < V - \eta$, 那么存在 $\lambda \in (0, 1)$; 使得

$$LB(X) = \min_{i=1,2,\dots,N+1} \max_{k=0,1,\dots,K} \{H_k^+(a) - H_k^-(b - \lambda(b_i - a_i)e^i)\}$$

如果 $\min Q(X) \geq LB(X) > \varepsilon \geq 0$, 可进行有效删除^[16]。

对于任意由分割过程形成的盒子 $X=[a,b]$, 需要考查 X 是否包含问题(P)的可行解 \bar{x} , 使得 $\bar{x}_{N+1} \leq V - \eta$ 。因此,令 $D = \{x | x_{N+1} \leq V - \eta, H_k^+(x) = H_k^+(a) - H_k^-(x) < \varepsilon\}$, 只需在集合 $D \cap X$ 中寻找点 \bar{x} , 缩减的目的是用一个较小的 X' 代替 $X=[a,b]$ 并且没有失去任何当前需要的部分,即 $D \cap X' = D \cap X$ 。这将有效压缩求解问题(P)的过程中而快速增长盒子的速度,有效缩减后 X' 记为 $\text{red}[a,b]$ 。在缩减过程中给出如下压缩条件:

如果 $a_{N+1} \leq V - \eta$ 且 $f(a) < \varepsilon$, 那么 $\text{red}[a,b]=[a,a]$; 如果 $a_{N+1} > V - \eta$ 或 $H_k^+(a) - H_k^-(b) > \varepsilon, k=0,1,\dots,K$, 那么 $\text{red}[a,b]$ 为空集。

否则,令 $a' = b - \sum_{i=1}^{N+1} \alpha(b_i - a_i)e^i, b' = a' - \sum_{i=1}^{N+1} \beta(b_i - a_i)e^i$, 其中 $\alpha, \beta \in [0, 1], e^i$ 表示第 i 个分量为1单位向量, 那么 $\text{red}[a,b]=[a',b']$ ^[16]。

2 求解流程

从一个最初的可行解开始,经过相应的操作找到一个更好的可行解,然后反复这个过程,直至找到一个没有比当前可行解更好的可行解为止。具体流程为

1) 初始步:给定 $\varepsilon > 0$ 和 $\eta \geq 0$, 如果 \bar{x} 是当前最好可行解,那么令目标函数值为 \bar{x}_{N+1} 。否则,令目标函数值为 x_{N+1}^u , 置 $Q_0 = \{X^0 = [x^l, x^u]\}, F_0$ 为空集, $q = 1$ 。

2) 缩减步:对于每个盒子 $X=[a,b] \in Q_0$, 由缩减过程计算 $\text{red}X$, 令 X 代替 $\text{red}X$, 并计算下界 $LB(X)$ 。如果 $LB(X) > \varepsilon$, 那么删除 X 。

3) 执行步:令 Q'_q 为 Q_q 经过缩减步所剩盒子的集合,并

令 $F'_q = F_q \cap Q'_q$ 。如果 F'_q 为空集,停止。若 $V = \bar{x}_{N+1}$, 则 \bar{x} 是问题(P)的 (ε, η) -最优解;若 $V = x_{N+1}^u$, 则问题(P)不可行。否则,选择 $X^q = [a^q, b^q] \in \arg \min \{LB(X) | X \in F'_q\}$, 并且令 $LB_q = LB(X^q)$, 如果 $LB_q > 0$, 则终止。结论与 F'_q 为空集时相同。

4) 最优性检验:如果 $b_{N+1} > V - \eta$, 那么令 $t^q = a^q + \lambda(b^q - a^q)$, 其中 $\lambda \in (0, 1)$; 否则,令 $t^q = a^q$ 或者 $t^q = (a^q + b^q)/2$, 当 $f(t^q) < \varepsilon$ 时,更新最优解、最优值。

5) 剖分步:把 X^q 按最长边分成2个子盒子,令 Q_{q+1} 为细分 X^q 之后的集合。令 $F_{q+1} = F'_q / X^q$, 置 $q = q + 1$, 并返回缩减步。

在此处理过程中需要注意,最优性检验中,若用局部解代替估计点,则可以得到更好的目标函数值,并且算法的迭代次数可能会更少。但是,由于目标函数值的计算时间增加,运行时间不总是减少的。因此方法需要交替使用,尤其是在只有一个估计点的时候。

在执行求解过程中要么经有限多步迭代产生问题(P)的一个 (ε, η) -最优解,要么表明求解问题是不可行^[16]。

3 数值试验

为了验证方法的可行性和有效性,通过例1和例2对该方法进行验证。程序用 Matlab 7.0 编程在酷睿双核 CPU(主频 2.4 GHz), 2 GB 内存的机器上运行。

例1 目标函数: $x_1^2 + x_2^2$, 约束条件: $0.3x_1x_2 \geq 1, 2 \leq x_1 \leq 5, 1 \leq x_2 \leq 3$, 求目标函数最小值及最优解。

例2 目标函数: $x_1x_2 - x_1 - x_2$, 约束条件: $-6x_1 + 8x_2 \leq 3, 3x_1 - x_2 \leq 3, 0 \leq x_1, x_2 \leq 1.5$, 求目标函数最小值及最优解。

由图1和图2可以得到两个例子中迭代次数与当前目标函数值之间的变化关系,能够更加直观的说明程序的运行过程。由图1可知,当迭代72次时,最优值6.77778已经出现;当迭代86次时,停止迭代并且输出最优值6.77778。图2表明,最优值-1.0829在迭代301次时已经出现;迭代461次时,停止迭代并且输出最优值-1.0829。

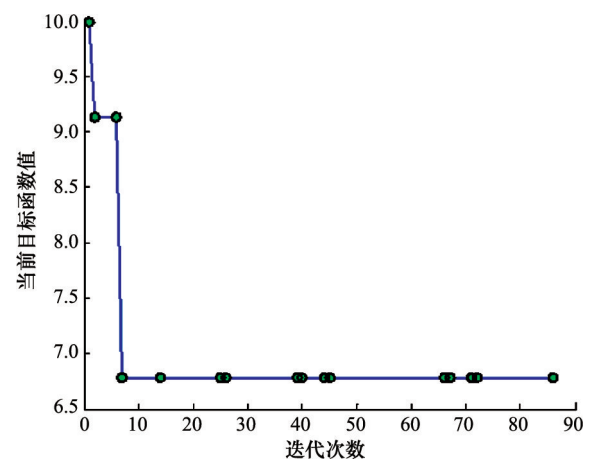


图1 例1迭代次数与当前目标函数值之间的变化关系
Fig. 1 Relation between iteration times and current objective function value

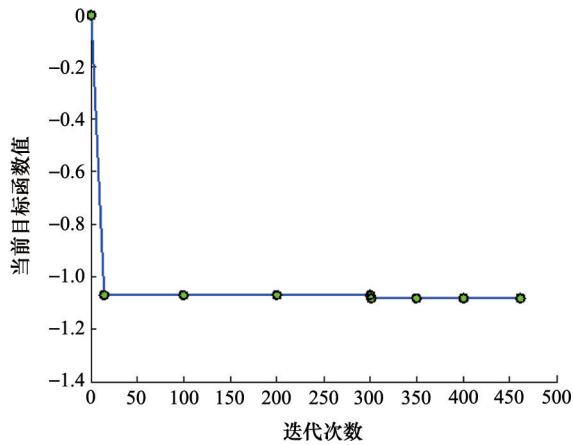


图2 例2迭代次数与当前目标函数值之间的变化关系
Fig. 2 Relation between iteration times and current objective function value

为了更好的说明此方法的优势,使用文献[16]和文献[20]进行对比。由表1可以得到,例1中此方法的最优值为6.77778,比文献[16]的最优值(6.7779)更好;例2中此方法的最优值(-1.0829)比文献[20]的最优值(-1.0750)更好,并且最优解满足约束条件,因此本文的方法对于不定二次规划问题是可行有效的。

表1 数值实验结果
Table 1 Calculation results

例	Ref	ε	η	最优解	最优值	迭代次数	时间/s
1	本文	10^{-5}	10^{-3}	(2.00000, 1.66667)	6.77778	86	2.922
	[16]			(2.00000, 1.66670)	6.77790		
2	本文	10^{-3}	10^{-2}	(1.17120, 0.51600)	-1.08290	461	10.630
	[20]			(1.11430, 0.34390)	-1.07500		

4 结论

对不定二次规划问题提出一种单调化方法,该方法通过引入新变量将问题等价转化为单调优化问题,然后利用单调特点通过缩减、分割、定界等过程求得最优解及最优值。虽然本方法在理论分析中采用近似最优解的方法来求得最优值,但最终数值实验表明求得的解对于原问题中的约束条件是满足、可行的,因此该方法对求解不定二次规划问题十分有效。

参考文献 (References)

[1] Horst R, Pardalos P M. Handbook of global optimization[M]. Boston: Kluwer Academic Publisher, 1975.
 [2] Kedem G, Watanabe H. Graph-optimization techniques for IC layout and compaction[J]. Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 1984, 3(1): 12-20.
 [3] Stern R J, Wolkowicz H. Indefinite trust region subproblems and

nonsymmetric eigenvalue perturbations[J]. SIAM Journal on Optimization, 1995, 5(2): 286-313.
 [4] Cambini R, Sodini C. Decomposition methods for solving nonconvex quadratic programs via branch and bound[J]. Journal of Global Optimization, 2005, 33(3): 313-336.
 [5] Li H M, Zhang K C. A decomposition algorithm for solving large-scale quadratic programming problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 173(1): 394-403.
 [6] Qu S J, Yin H Y, Zhang K C. A global optimization algorithm using linear relaxation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 178(2): 510-518.
 [7] Gao Y L, Xue H G, Shen P P. A new rectangle branch and reduce approach for solving nonconvex quadratic programming problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 168(2): 1409-1418.
 [8] Anstreicher K M. Semidefinite programming versus the reformulation-linearization technique for nonconvex quadratically constrained quadratic programming[J]. Journal of Global Optimization, 2009, 43(2-3): 471-484.
 [9] Lu C, Fang S C, Jin Q, et al. KKT solution and conic relaxation for solving quadratically constrained quadratic programming problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 2011, 21(4): 1475-1490.
 [10] Shi Z Y, Jin Q W. Second order optimality conditions and reformulations for nonconvex quadratically constrained quadratic programming problems[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2014, 10(3): 871-882.
 [11] 汪春峰, 刘三阳, 张建科. 不定二次规划全局解的一个新算法[J]. 工程数学学报, 2011, 28(3): 300-306.
 Wang Chunfeng, Liu Sanyang, Zhang Jianke. A new global optimization algorithm for indefinite quadratic programs[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2011, 28(3): 300-306.
 [12] 申培萍, 刘利敏. 带非凸二次约束的二次规划问题的全局优化方法[J]. 工程数学学报, 2008, 25(5): 923-926.
 Shen Peiping, Liu Liming. A global optimization approach to quadratic programming problems with nonconvex quadratic constraints[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(5): 923-926.
 [13] Jiao H W, Chen Y Q. A global optimization algorithm for generalized quadratic programming[J]. Journal of Applied Mathematics, 2013, 2013: 1-9.
 [14] Linderoth J. A simplicial branch- and- bound algorithm for solving quadratically constrained quadratic programs[J]. Mathematical Programming, 2005, 103(2): 251-282.
 [15] Benson H P. Decomposition branch- and- bound based algorithm for linear programs with additional multiplicative constraints[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2005, 126(1): 41-61.
 [16] Shen P P, Chen Y Q, Ma Y. A nonisolated optimal solution for special reverse convex programming problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 224(1): 219-229.
 [17] Shen P P, Ma Y, Chen Y Q. A robust algorithm for generalized geometric programming[J]. Journal of Global Optimization, 2008, 41(4): 593-612.
 [18] Shen P P, Chen Y Q, Ma Y. Global optimization for the generalized polynomial sum of ratios problem[J]. Journal of Global Optimization, 2011, 50(3): 439-455.
 [19] Shen P P, Li X A. Branch-reduction-bound algorithm for generalized geometric programming[J]. Journal of Global Optimization, 2013, 56(3): 1123-1142.
 [20] Pörn R, Björk K M, Westerlund T. Global solution of optimization problems with signomial parts[J]. Discrete optimization, 2008, 5(1): 108-120.

(编辑 季超)