

散体单元法确定计算时步模拟刚度法

闫民, 郭震

北京林业大学工学院, 北京 100083

摘要 散体单元法 DEM 的核心内容是运用所谓的中心差分法, 实际上使用了迭代计算, 在计算中确定合理的计算时步及其法向刚度是研究问题非常重要的方面, 时步的选取与被研究颗粒的刚度、质量、阻尼, 以及它们之间的匹配关系密切相关。目前, 确定刚度的一般做法是实测, 但实测只能对特定条件进行, 且需要研究人员具有较丰富的经验, 才能保证计算结果接近实际。本文通过质量—弹簧系统, 对 DEM 计算过程进行理论与数值模拟讨论, 给出确定计算时步和法向刚度的选取方法, 对同类计算具有一定的参考意义。

关键词 散体单元法; 计算时步; 法向刚度

中图分类号 O242.26

文献标志码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2014.13.005

Stiffness Simulation Method of Determining Step Size Using Discrete Element Method

YAN Min, GUO Zhen

School of Technology, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China

Abstract The discrete element method (DEM), with its core of using the so-called central difference method, involves actually iterative calculations. During the DEM calculations, the determinations of a reasonable computation time step and the normal stiffness are very important. The determination of the time step is closely related to the stiffness, the mass and the damping of the granule in question, and to their matching relationship. To decide the stiffness is so far through actual measurements. However, it can be done only in some special conditions and it needs a wealth of experience for the simulation results to be close to the practical results. This paper, based on the theoretical consideration and numerical simulations of a mass-spring system, proposes optional ways to determine the calculation time step and the normal stiffness.

Keywords discrete element method; calculation step; normal stiffness

1 DEM 计算时步

图 1 是一个质量为 M 的物体以初速度 \dot{x}_0 向一个法向刚度系数为 K 只承压的弹簧撞击, DEM 计算中的核心内容是运用所谓的中心差分法^[1-3], 实际上使用了迭代计算, 在计算中确定合理的计算时步^[4-7]和确定其法向刚度是研究问题非常重要的方面, 时步的选取与被研究颗粒的刚度、质量、阻尼及它们之间的匹配关系有密切相关, 对 K 的确定一般由实测确定^[1,2], 对于计算时步 Δt 的选取是由 $\Delta t \leq T/N$ 确定, 其中 T 为

系统中最小谐振周期, N 为一常量, 一般取 $N=10$, 考虑到实验的方法只适用特定的条件, 而取法也只能是估计, 需要研究人员具有较丰富的经验, 计算结果才能接近实际。因此, 本文通过理论与数值模拟讨论了上述计算过程, 给出确定计算时步和法向刚度的选取方法。对于图 1 所示模型, 根据 DEM 计算过程, 可以导出递推公式^[1]

$$\dot{x}_n = A(\dot{x}_0 + \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \cdots + \dot{x}_{n-1}) + \dot{x}_{n-1} \quad (1)$$

经推导, 得

收稿日期: 2014-02-07; 修回日期: 2014-03-17

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11272061, 10572027)

作者简介: 闫民, 副教授, 研究方向为车辆工程、机械动力学和散体力学, 电子信箱: hoffmen@qq.com; 郭震(共同第一作者), 硕士研究生, 研究方向为车辆工程, 电子信箱: 113097485@qq.com

引用格式: 闫民, 郭震. 散体单元法确定计算时步模拟刚度法[J]. 科技导报, 2014, 32(13): 33-35.

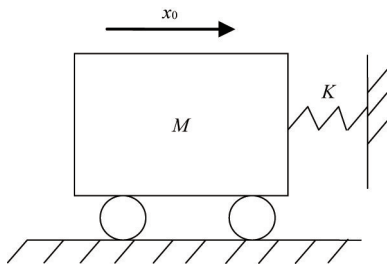


图1 计算模型

Fig. 1 Calculation model

$$\dot{x}_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{A}{\sqrt{A^2 + 4A}} \right) \left(\frac{A + 2 + \sqrt{A^2 + 4A}}{2} \right)^n + \left(1 - \frac{A}{\sqrt{A^2 + 4A}} \right) \left(\frac{A + 2 - \sqrt{A^2 + 4A}}{2} \right)^n \right] \dot{x}_0 \quad (2)$$

式中, \dot{x}_n 为第 n 次迭代后的速度,

$$\begin{cases} A = -A_r \\ A_r = \frac{K}{M} \Delta t^2 \\ i = \sqrt{-1} \end{cases} \quad (3)$$

将式(3)代入式(2),得

$$\dot{x}_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{A_r}{i\sqrt{4A_r - A^2}} \right) \left(\frac{2 - A_r + i\sqrt{4A_r - A^2}}{2} \right)^n + \left(1 + \frac{A_r}{i\sqrt{4A_r - A^2}} \right) \left(\frac{2 - A_r - i\sqrt{4A_r - A^2}}{2} \right)^n \right] \dot{x}_0 \quad (4)$$

式(4)有解的条件为

$$\begin{cases} 4A_r - A^2 \geq 0 \\ A_r > 0 \end{cases} \quad (5)$$

将式(3)代入式(5),得

$$0 < \Delta t < 2\sqrt{\frac{M}{K}} \quad (6)$$

即为DEM计算中 Δt 取值的必要条件,是中心差分法对时间间隔的选取原则^[1,2]。

2 模拟刚度法

一般情况下,式(6)中的弹簧刚度难以确定,即便给出 K 也是对特定材料而言,因而计算时步 Δt 也难以确定。为此,本文给出确定时步 Δt 的方法——模拟刚度法。对于图1的模型,其位移的理论解为

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (7)$$

假设被研究模型的初始时间 $t_0 = 0$, 初始位移 $x_0 = 0$, 初始速度 $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, 则式(7)可变为

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (8)$$

式(7)和式(8)中, ω 为谐振角频率,

$$\omega^2 = \frac{K}{M} \quad (9)$$

谐振周期则为

$$T = 2\pi \frac{1}{\omega} \quad (10)$$

注意,这里的 K 是在模拟计算中所取被研究单元的刚度。将式(8)~式(10)代入式(1)得

$$\begin{aligned} A(\dot{x}_0 + \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dots + \dot{x}_{n-1}) + \dot{x}_{n-1} = \\ -\omega^2 \Delta t (\dot{x}_0 + \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dots + \dot{x}_{n-1}) \Delta t = \\ -\omega^2 \Delta t x(n\Delta t) = -2\pi \dot{x}_0 \frac{\Delta t}{T} \sin\left(2\pi \frac{n\Delta t}{T}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

由式(11)和式(1)可导出

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - \dot{x}_0 = -2\pi \dot{x}_0 \frac{\Delta t}{T} \sin\left(2\pi \frac{\Delta t}{T}\right) \\ \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = -2\pi \dot{x}_0 \frac{\Delta t}{T} \sin\left(2\pi \frac{2\Delta t}{T}\right) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} - \dot{x}_{n-2} = -2\pi \dot{x}_0 \frac{\Delta t}{T} \sin\left(2\pi \frac{(n-1)\Delta t}{T}\right) \\ \dot{x}_n - \dot{x}_{n-1} = -2\pi \dot{x}_0 \frac{\Delta t}{T} \sin\left(2\pi \frac{n\Delta t}{T}\right) \end{cases} \quad (12)$$

对式(12)两端分别求和,得

$$\begin{aligned} \dot{x}_n - \dot{x}_0 = -2\pi \dot{x}_0 \frac{\Delta t}{T} \left[\sin\left(2\pi \frac{\Delta t}{T}\right) + \sin\left(2\pi \frac{2\Delta t}{T}\right) + \dots + \sin\left(2\pi \frac{n\Delta t}{T}\right) \right] \\ = -2\pi \dot{x}_0 \frac{\Delta t}{T} \sum_{k=1}^n \sin 2\pi \frac{k\Delta t}{T} \end{aligned} \quad (13)$$

式中, $k = 1, 2, \dots, n$ 为某一迭代时步的迭代次数。通过式(13),即可在被研究系统刚度未知的情况下确定差分计算的时间步长,这里的 K 是在模拟计算中被研究单元的刚度,故称之为模拟刚度法。

具体过程是,首先假设系统中最小谐振周期 T 的单元质量和刚度分别为 M 和 K ,且令

$$\Delta t = T/N \quad (14)$$

式中, N 为有界正实数。被研究单元第 n 时步的速度和初始速度的差由式(13)和式(14)得到

$$\dot{x}_n - \dot{x}_0 = -2\pi \dot{x}_0 \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n \sin 2\pi \frac{k}{N} \quad (15)$$

这里, \dot{x}_n 为第 n 个时步的模拟速度。在 K 很难确定的情况下,假定 M 不变,设系统被研究单元的实际刚度为 K' , 而由 M 和 K' 确定的实际谐振周期为 T' , 如果令

$$K' = \lambda^2 K \quad (16)$$

则有

$$T' = \frac{1}{\lambda} T \quad (17)$$

代入式(13),并令

$$\Delta t = \Delta t' = T'/N \quad (18)$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{x}_n - \dot{x}_0 = -2\pi \dot{x}_0 \frac{\Delta t'}{T'} \sum_{k=1}^n \sin 2\pi \cdot \frac{k\Delta t'}{T'} = \\ -2\pi \dot{x}_0 \lambda \frac{\Delta t'}{T} \sum_{k=1}^n \sin 2\pi \cdot \frac{k\Delta t'}{\lambda T} \end{aligned} \quad (19)$$

将式(18)代入式(19),得

$$\dot{x}'_n - \dot{x}_0 = -2\pi\dot{x}_0\lambda \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n \sin 2\pi \cdot \frac{k\lambda}{N} \quad (20)$$

式(19)和式(20)中, \dot{x}'_n 为实际速度。将式(20)减式(15),并除以 \dot{x}'_n 得

$$\frac{\dot{x}'_n - \dot{x}_n}{\dot{x}'_n} = 1 - \frac{\dot{x}_n}{\dot{x}'_n} = 1 - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\sum_{k=1}^n \sin 2\pi \frac{k}{N}}{\sum_{k=1}^n \sin 2\pi \frac{k\lambda}{N}} \right) = E \quad (21)$$

即

$$\dot{x}'_n = \dot{x}_n / (1 - E) \quad (22)$$

$$E = 1 - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\sum_{k=1}^n \sin 2\pi \frac{k}{N}}{\sum_{k=1}^n \sin 2\pi \frac{k\lambda}{N}} \right) \quad (23)$$

式(22)和式(23)中, E 为实际速度和模拟速度的相对误差。

3 分析

由式(22)可以看出, E 为被研究单元实际速度与模拟速度的相对误差。当 E 值很小时,实际速度 \dot{x}'_n 即可用模拟速度 \dot{x}_n 表示。由式(23)可知, E 可以表示为

$$E = (N, \lambda) \quad (24)$$

即 E 为 N 和 λ 的函数。其中, λ 由式(16)可知由系统的模拟刚度和实际刚度所决定,模拟刚度可以根据所研究散体系统的理想状态取其模拟刚度 $K = K^*$,考虑到散体系统物料之间的阻力性、液桥和松散性等因素^[4],必然导致其系统实际刚度 K' 下降。故可设

$$0 < \frac{K'}{K^*} = \lambda^2 < 1 \quad (25)$$

$$E \leq E_0 \quad (26)$$

此时,由式(10)可知,

$$T = T^* \quad (27)$$

式(26)中, E_0 为给定的小于1的任意小的数,为给定误差,如此,满足式(25)和式(26)的条件通过式(23)或式(24)即可确定以 λ 为参数的一组不同的 (N_1, N_2, \dots) ,最后 Δt 根据式(14)和式(27)可得

$$\Delta t = T^* / N^* \quad (28)$$

式中, N^* 为由 (N_1, N_2, \dots) 根据实际情况确定的值,例如用平均法、加权平均或其他方法等。系统的实际刚度为

$$K' = \lambda^{*2} K^* \quad (29)$$

注意,式中 λ^* 是对应于 N^* 的 λ 值。至此,就可以用式(28)和式(29)在被研究系统刚度很难确定的情况下,无须实验确定 DEM 计算时步和系统的实际刚度。

4 结论

模拟刚度法给出了一种 DEM 在被研究系统刚度很难确定的情况下,无须实验计算其计算时步和系统实际刚度的方

法,该方法用于 DEM 研究^[8-12]中取得了满意的结果,对同类的 DEM 问题具有一定的参考意义

参考文献(References)

- [1] Cundall P A, Strack O D L. A discrete numerical model for granule assemblies[J]. Geotechnique, 1979, 29(1): 47-65.
- [2] 王永嘉, 邢际波. 离散单元法及其在岩土力学中的应用[M]. 沈阳: 东北工学院出版社, 1991: 9-47.
Wang Yongjia, Xing Jibo. Discrete element method and the application in geotechnical mechanics[M]. Shenyang: Northeastern University of Technology Press, 1991: 9-47.
- [3] 魏群. 散体单元法的基本原理数值方法及程序[M]. 北京: 科学出版社, 1991: 8-13.
Wei Qun. Basic principle and numerical method and program about discrete element method[M]. Beijing: Science Press, 1991: 8-13.
- [4] 孙其成, 王光谦. 颗粒物质力学导论[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 67-70.
Sun Qicheng, Wang Guangqian. An introduction to the mechanics of granular materials[M]. Beijing: Science Press, 2009: 67-70.
- [5] 吴清松, 胡茂彬. 颗粒流的动力学模型和实验研究进展[J]. 力学进展, 2002, 32(2): 250-258.
Wu Qingsong, Hu Maobin. Advances on dynamic modeling and experimental studies for granule flow[J]. Advances in Mechanics, 2002, 32(2): 250-258.
- [6] 徐泳, 孙其成, 张凌, 等. 颗粒离散元法研究进展[J]. 力学进展, 2003, 33(2): 251-260.
Xu Yong, Sun Qicheng, Zhang Ling, et al. Advances in discrete element methods for particulate materials[J]. Advances in Mechanics, 2003, 33(2): 251-260.
- [7] 张楚汉. 论岩石、混凝土离散-接触-断裂分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(2): 217-235.
Zhang Chuhan. Discrete-contact-fracture analysis of rock and concrete [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(2): 217-235.
- [8] 闫民, 贾启芬, 陈予恕, 等. 振动磨 DEM 动力学分析模型[J]. 天津大学学报, 2000, 33(1): 60-62.
Yan Min, Jia Qifen, Chen Yushu, et al. Dynamic analytical modeling vibration ball mills[J]. Journal of Tianjin University, 2000, 33(1): 60-62.
- [9] 闫民, 陈予恕, 曹树谦. 转子系统非线性动力学 DEM 建模研究[J]. 力学学报, 2001, 33(3): 390-401.
Yan Min, Chen Yushu, Cao Shuqian. The study of nonlinear dynamics DEM modeling of rotor systems[J]. Journal of Theoretical Applied Mechanics, 2001, 33(3): 390-401.
- [10] 闫民, 尹建业, 孙保平. 沙粒群的散体动力学建模[J]. 科技导报, 2008, 26(6): 66-69.
Yan Min, Yin Jianye, Sun Baoping. DEM modeling of sand group dynamics[J]. Science & Technology Review, 2008, 26(6): 66-69.
- [11] Yan M, Yin J Y, Sun B P. Granule hydrodynamics method: A discrete element method on fluid motions[J]. International Journal of Computational Methods, 2012, 9(1): 8-9.
- [12] Yan M, Zhang K, Chen Y. Dynamic DEM model of multi-spans rotor system[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 255(5): 867-881.

(责任编辑 朱宇)