

# 网格剖分对电阻率曲线的影响

朱崇利<sup>1</sup>,董淑乾<sup>2</sup>,周佃刚<sup>1</sup>

1. 成都理工大学地球探测与信息技术教育部重点实验室,成都 610059
2. 成都理工大学地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室,成都 610059

**摘要** 有限元法作为一种高效的数值模拟方法,广泛用于地球物理的正演计算。网格剖分的合适与否是有限元求解的先决条件。在满足剖分区域大小一致,且满足边界条件,进行稀疏与加密网格比较的前提下,讨论了二维介质理想模型的网格剖分对大地电磁正演精度的影响。研究表明,在低频阶段,TE和TM两种极化模式从整体上看,粗网格比细网格模拟精度高,但是在近地表开始阶段,TM模式下,粗网格模拟精度不及细网格;整体变化幅度粗网格比细网格缓和,曲线尾部粗网格与细网格波动幅度都较大,脱离了正常值。结果表明,正确的网格剖分能有效地提高电磁有限元正演的精度,且对后续反演同样有意义。

**关键词** 网格剖分;高频;低频;有限元;数值模拟

**中图分类号** P319.1

**文献标志码** A

**doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2014.11.010

## Influence of Grid Subdivision on the Resistivity Curve

ZHU Chongli<sup>1</sup>, DONG Shuqian<sup>2</sup>, ZHOU Diangang<sup>1</sup>

1. Key Laboratory of Earth Exploration and Information Techniques of the Ministry of Education, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China
2. State Key Laboratory of Geohazard Prevention and Geoenvironment Protection, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China

**Abstract** As a highly efficient numerical simulation method, finite element method is widely used in geophysical forward calculation. Whether grid subdivision is suitable or not is the prerequisite for finite element solution. From the aspect of ideal two-dimensional medium model, this paper discusses the effect of grid subdivision on magnetotelluric forward modeling precision, under the conditions that the subdivision areas have the same size, the boundary conditions are satisfied, and the sparse and dense mesh are compared. In low frequency phase, two polarization modes were taken as a whole, the coarse grid has higher simulation accuracy than the fine grid, but at the beginning of the near-surface phase under TM mode, the simulation accuracy of the coarse grid is not as high as that of the fine grid. Overall, the coarse grid has more moderate change than the fine grid, and the fluctuation amplitude of the coarse grid and fine grid is higher in the tail of the curve, both of which deviate from the normal value. The results show that proper grid subdivision can effectively improve the accuracy of electromagnetic finite element forward modeling, and it is significant for the subsequent inversion as well.

**Keywords** grid subdivision; high frequency; low frequency; finite element; numerical modeling

有限元作为一种高效的数值模拟方法,由于内部边界条件作为自然边界被自动吸收,相对其他方法更易于拟合复杂结构、更适于复杂地形等,广泛应用于地球物理的正演计算。Coggon<sup>[1]</sup>在1971年提出将有限单元法应用在电磁场数值模拟中,陈乐寿<sup>[2]</sup>、徐世浙<sup>[3]</sup>、王绪本等<sup>[4]</sup>、阮百尧等<sup>[5]</sup>相继利用有限元的二维三维模拟算法,分别对地球物理场

中的有限单元法进行研究和发展的。

大地电磁正演的精度对后续反演意义重大,而决定大地电磁有限元正演精度的因素,主要有插值函数的精度,解方程组所采取的不同方法导致相应的求解误差,网格剖分的粗细程度,地形不同构造带来的影响,设置边界大小导致的误差及计算机精度制约因素的限制等。因此,许多学者又从多

收稿日期:2013-05-16; 修回日期:2013-11-29

基金项目:国家高技术研究发展计划(863计划)项目(2009AA06Z108)

作者简介:朱崇利,博士研究生,研究方向为地球物理数值模拟与电磁场理论应用,电子信箱:963066363@qq.com

引用格式:朱崇利,董淑乾,周佃刚. 网格剖分对电阻率曲线的影响[J]. 科技导报, 2014, 32(11): 66-70.

个方面对有限元模拟算法加以改善。陈小斌等<sup>[6]</sup>提出了一种新的有限元直接迭代算法；马为等<sup>[7]</sup>在此基础上选用二次插值基函数计算辅助场的函数值；柳建新等<sup>[8]</sup>将预处理的双共轭梯度算法运用到电磁的二维、三维正演中，使求解线性方程的精度进一步提高。但这些研究只是在有限元的插值函数或者解方程的精度上做了相应改进，而有限元研究区域剖分差异所带来的误差影响，远大于插值函数选取、求解方程组精度研究。

由于矩形网格剖分在求解地球物理问题中具有典型的一般性及通用性，通常一般认为细网格剖分总是好于粗网格剖分，细网格不仅可以提高模型网格化转换的精度，而且可以提高正演计算求解的精度。因此，本文中区域选用矩形网格剖分，选取二维理想模型主要是起到一维和二维之间的衔接作用，兼顾二者。

### 1 一维大地电磁

以一维大地电磁有限元模拟为例，欧东新<sup>[9]</sup>从电磁场的传播特性，在大地电磁有限元法正演模拟的计算过程中分析了计算机精度、网格剖分大小对高、低频计算结果的影响，得出在单精度条件下，计算高频响应时采用较小的表层网格，计算低频响应时采用较大的表层网格就能够使得整条曲线与理论曲线较好拟合的规律。但是一种模拟方法中采用两种剖分方式，效率的保障与方法的实现都存在一定困难。应先做1次初始模拟，再针对实际情况，采取折衷方案获取更好效果。Wannamaker等<sup>[10]</sup>为避免这种误差，采用直接计算二次场的方法进行大地电磁有限元法的正演计算。

### 2 大地电磁二维正演

#### 2.1 边值及相应的变分问题

假定大地电性结构是二维的，取走向y轴为正向，y轴与x轴垂直，保持水平，z轴垂直向下(图1)。

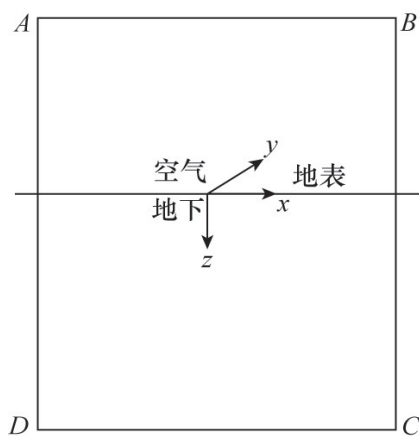


图1 大地电磁有限元模拟区域

Fig.1 Simulation area of MT modeling of finite element method

具体步骤：有限单元法通过离散，将计算区域从空间上划分为不同的有限个小单元，单元之间由节点连接，而因变量在每个单元上的值是节点因变量值的插值函数，对应采用矩形单元线性插值，由单元分析和总体合成，将方程和边界条件改写成以节点上因变量为解向量的线性方程组  $Ax=b$ 。再通过变分原理，求变分并令其等于0，得线性方程组  $Ku=0$ 。加入上边界条件，其中内部边界自然吸收，解方程组即可得各节点u，当计算出各节点的u值后，再利用有关差分求出场值沿垂直方向的偏导数  $\frac{\partial u}{\partial z}$ ，代入计算视电阻率和阻抗相位公式，即可求出正演数值模拟所要的结果，TE(transverse electric)及TM(transverse magnetic)模式下的数学表达式分别为

$$u = E_y, \tau = \frac{1}{i\omega\mu}, \lambda = \sigma - i\omega\varepsilon \quad (1)$$

$$u = H_y, \tau = \frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon}, \lambda = i\omega\mu \quad (2)$$

式中，E为电磁强度，H为磁场强度， $\omega$ 为角频率， $\sigma$ 为电导率， $\varepsilon$ 为介电常数， $\mu$ 为磁导率。因此，两种模式可以合成为<sup>[3]</sup>

$$\nabla(\tau \nabla u) + \lambda u = 0 \quad (3)$$

即边值问题简写为

$$\begin{cases} \nabla(\tau \nabla u) + \lambda u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \in AB, AD, BC \\ \frac{\partial u}{\partial n} + ku = 0 & \in CD \end{cases} \quad (4)$$

由变分原理，相应的变分问题表达式为

$$\begin{cases} F(u) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 - \frac{1}{2} \lambda u^2 \right] d\Omega \\ \quad + \int_{CD} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma \\ u|_{AB} = 1 \\ \delta F(u) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中， $\nabla$ 为二维哈密顿算子， $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y$ ，n表示外法向， $k = \sqrt{-i\omega\mu\sigma}$ 。

#### 2.2 视电阻率和阻抗相位

对研究区域进行剖分，节点与单元遍及整个研究区域，将连续函数的求解化为节点上离散函数值的求解。因此，网格及疏密对函数值的计算产生重要的影响。偏导数的值与网格步长息息相关即网格剖分的疏密程度将直接影响计算结果的精度(前提是满足剖分区域大小一致，且满足边界条件的情况下，进行稀疏与加密网络的比较)。

TE极化方式为

$$\begin{cases} Z_{TE} = \frac{E_y}{H_x} & H_x = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \rho_{TE} = \frac{1}{\omega\mu} |Z_{TE}|^2 = -i\omega\mu \left( u \frac{\partial u}{\partial z} \right) u = E_y, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-3u_1 + 4u_5 - u_2}{b} \\ \phi_{TE} = \arctan \frac{\text{Im}[Z_{TE}]}{\text{Re}[Z_{TE}]} \end{cases} \quad (6)$$

TM极化方式为

$$\begin{cases} Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y}, E_x = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \rho_{TM} = \frac{1}{\omega\mu} |Z_{TM}|^2, u = H_y, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-3u_1 + 4u_8 - u_4}{l} \\ \phi_{TM} = \arctan \frac{\text{Im}[Z_{TM}]}{\text{Re}[Z_{TM}]} \end{cases} \quad (7)$$

图2及图3为区域剖分网格元示意。

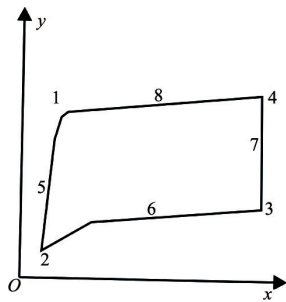


图2 子单元  
Fig. 2 Subunit

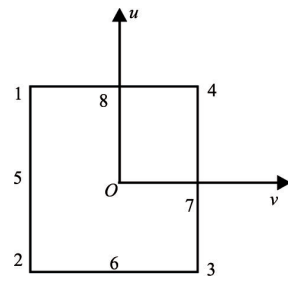


图3 母单元  
Fig. 3 Mother unit

### 3 网格剖分算例

选取测试模型,该模型为3层层状,在理想导体介质的上方有3个相邻、但电阻率不同的块状目标体,其目标体较大,近似看成层状,其电阻率分别为100、10、1000  $\Omega \cdot m$ ,各层厚度分别为300、500、 $\infty$  m(图4)。在水平地表采用50个测点,对数等间距分布41个频点,其中横坐标以指数代替相应以10为底的幂,该二维模型用于验证网格粗细对二维正演程序计算精度的影响。相应情况所得视电阻率曲线如图5所示。

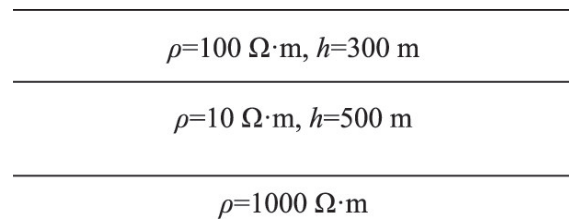
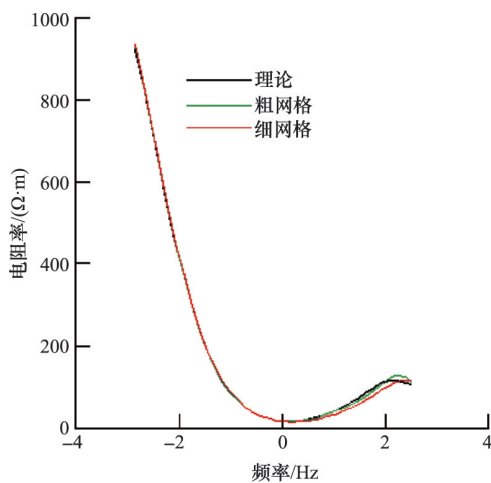
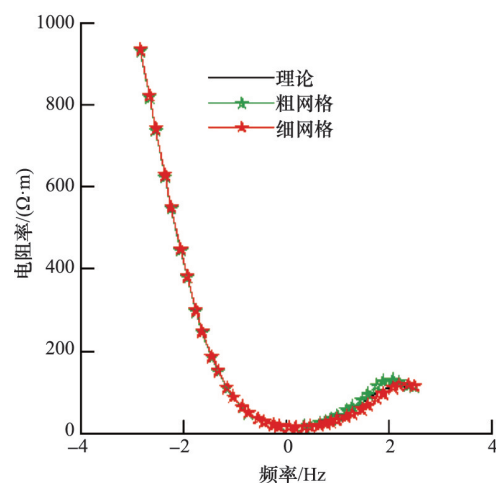


图4 二维理想介质模型  
Fig.4 Two-dimensional ideal medium model



(a) TE模式



(b) TM模式

图5 TE及TM模式的3种电阻率对比

Fig. 5 Comparison of three kinds of resistivity(TE mode and TM mode)

为了观察细微变化,更具一般性,网格剖分采取 $100 \times 60$ (细网格)及 $50 \times 30$ (粗网格)两种方式,相应生成的二维电阻率曲线如图6所示。

TE模式中(即粗网格、细网格、理论值在TE极化方式下的电阻率值的对比,图5(a))细网格曲线波动变化在缓缓下降,粗网格曲线波动变化在缓缓上升;到达曲线最低点之前,3条曲线又吻合较好(即曲线一致性的拟合程度),变化归于平静;经过曲线最低点之后,粗网格及细网格曲线对应的电阻率值都小于理论值,而且细网格曲线变化幅度远大于粗网格曲线变化幅度;在拐点前后,粗网格及细网格曲线对应的电阻率快速上升,且粗网格曲线上升幅度远大于细网格曲线

上升幅度,粗网格曲线对应的电阻率大于理论值,细网格曲线对应的电阻率小于理论值,过了拐点,粗网格曲线对应的电阻率上升幅度开始回落,但仍然大于理论值,细网格曲线对应的电阻率仍然在上升,电阻率大于粗网格曲线对应的电阻率及理论值。

TM模式(即粗网格、细网格、理论值在TM极化下的电阻率值的对比,图5(b))低频时,起初细网格曲线对应的电阻率略高于理论值,粗网格曲线对应的电阻率略低于理论值;之后细网格及粗网格曲线都在波动变化缓缓上升,上升很短时间之后,细网格曲线对应的电阻率进一步加大,略高于理论值,粗网格曲线对应的电阻率基本和理论值吻合,之后长时

间保持这种态势不变;但是接近曲线最低点前,细网格曲线对应的电阻率开始下降,但是粗网格曲线对应的电阻率仍同理论值保持一致;过了曲线最低点到达曲线尾部拐点之前,细网格曲线对应的电阻率值开始波动下降,达到曲线拐点之前达到幅度变化最大值,粗网格曲线对应的电阻率在曲线最低点之前仍然和理论曲线一致,但过了曲线最低点到达尾部拐点之前,开始波动变化,并达到幅度变化最大值;过了拐点至曲线终点,粗网格曲线对应的电阻率变化幅度变得平缓,但仍然高于理论值,细网格曲线对应的电阻率也开始波动回升,过了拐点之后,快速超过粗网格曲线对应的电阻率及理论值。3条曲线吻合的较好,只在尾部出现不一致脱离现象。

细网格两种极化模式(即细网格的TE和TM模式,图6(a))比较。起点时,即低频,TM模式的电阻率比TE略小,之后TM极化曲线振幅变化缓缓上升和TE极化曲线吻合,直到曲线最低点。过了最低点,TM曲线又幅度较剧烈的上升,一直持续到拐点,过了拐点TM曲线振幅变动又快速回落,和TE曲线吻合一致。

粗网格两种极化模式(即粗网格TE和TM模式,图6(b))比较。起点,TM曲线略低,之后快速上升达到一致,持续到曲线最低点,过了最低点,TM曲线开始上升,而且振幅变动很大,临近拐点到达最大值,过了拐点又快速回落,基本和TE模式吻合,但是比值仍然略高于初态。

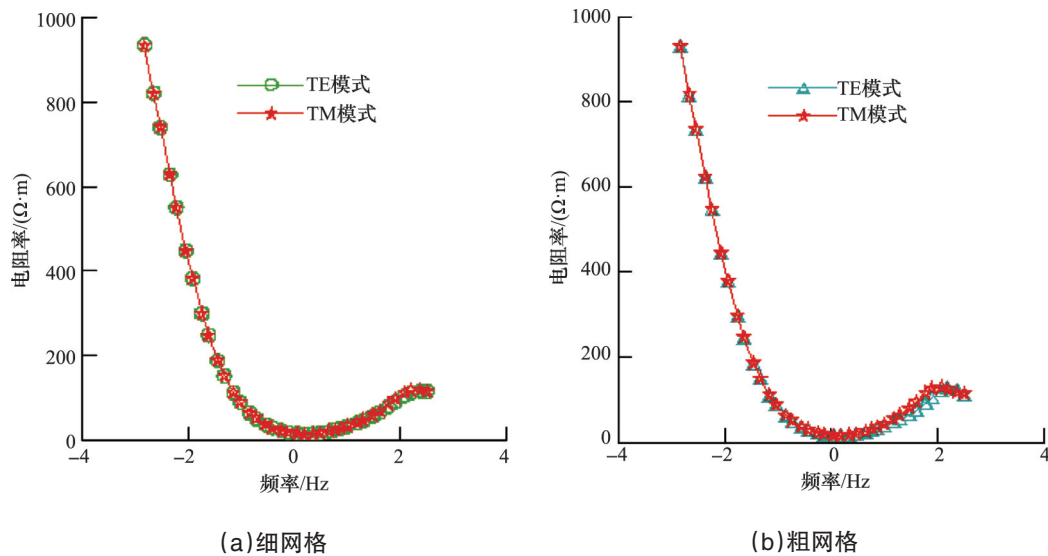


图6 细网格及粗网格的两种电阻率对比

Fig. 6 Two kinds of resistivity contrast (small grid and big grid)

#### 4 算例结果分析

从图5、图6可以看到,细网格在低频段的计算结果不如粗网格的计算结果。这与网格越小越好相矛盾。下面从电磁场的传播性质与数值模拟的过程分析。由电磁波的衰减公式

$$E = |E_0 e^{-a}| \quad a = \sqrt{-i\omega\mu\sigma} \quad (8)$$

可知,电磁波的衰减和频率、电阻率、深度有关系且和频率的关系较大,因频带很宽,相差级别就大,由趋肤深度公式

$$\delta \approx \frac{\sqrt{10\rho T}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10\rho}{f}} \quad (9)$$

可知,趋肤深度与电阻率成正比,和频率成反比。由求电阻率曲线公式可知,用到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-3u_1 + 4u_8 - u_4}{l} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-3u_1 + 4u_5 - u_2}{b} \quad (11)$$

该偏导数公式,实质相当于差分公式。而网格大小,间接决

定了这两个偏导数的大小,即决定了电阻率曲线的波动。吴娟等<sup>[11]</sup>在研究中提到,一套网格合适与否最终决定于它的趋肤深度,网格相对于趋肤深度越大,其误差越大,并且误差随着频率的增高而加大。因而对于高频,相对趋肤深度很小,所以网格越大误差越大,网格小误差就小。同样在低频,同等条件下,趋肤深度变得很小,所以细网格的精度比粗网格好,但粗网格将增大计算量。但在本研究中,不论网格粗还是细,在曲线尾部TM模式略高于理论值,而TE略低于理论值。在高频不论网格粗细,几乎曲线没有波动。这主要从式(10)、(11)及电阻率公式可知,在精度范围内,网格粗细对频率而言,整体趋势相当于近似成反比关系。同时,使用的频率继续升高,视电阻率和相位曲线都会受到浅层不均匀体的影响,导致高频段场值变化剧烈,导致细微误差。在低频和一般频率下,在适度范围内可以随意取粗细网格剖分,因其乘积变化不大,但在超高频条件下,应选细网格为佳,而且TM波动值大。由电阻率公式可知,TM模式可以近似看成在梯度方向上的变化,所以略大于理论值及TE模式。

## 5 结论

1) 从数学角度论证网格剖分的大小,整体趋势低频用粗网格较好,高频用细网格,但是在低频和一般频率,粗细网格影响不大。

2) 在高频相同极化模式下,从曲线尾部可看出,粗网格数值一般大于细网格数值,变化幅度较大,TM曲线变化幅度大于TE幅度。

3) 网格在高频时不能剖分太大,防止出现物性变化。

4) 曲线中途细微变化有待进一步探讨。

### 参考文献(References)

- [1] Coggon G H. Electromagnetic and electrical modeling by the finite element [J]. Geophysics, 1971, 36: 132-155.
- [2] 陈乐寿. 有限元法在大地电磁场正演计算中的应用与改进[J]. 石油物探, 1981, 20(3): 84-103.  
Chen Leshou. Application and improvement of finite-element method in forward calculation of geo-electromagnetic field[J]. Geophysical Prospecting for Petroleum, 1981, 20(3): 84-103.
- [3] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法[M]. 北京: 科学出版社, 1994.  
Xu Shizhe. Finite element method in geophysics[M]. Beijing: Science Press, 1994.
- [4] 王绪本, 李永年, 高永才. 大地电磁测深二维地形影响及其校正方法研究[J]. 物探化探计算技术, 1999, 21(4): 327-332.  
Wang Xuben, Li Yongnian, Gao Yongcai. Two dimensional topographic responses in magneto telluric sounding and its correction methods[J]. Computing Techniques for Giophysical and Geochemical Exploration, 1999, 21(4): 327-332.
- [5] 阮百尧, 徐世浙. 电导率分块线性变化二维地电断面电阻率测深有限元数值模拟[J]. 中国地质大学学报, 1998, 23(3): 303-307.  
Ruan Baiyao, Xu Shizhe. FEM for modeling resistivity sounding on 2D geoelectric model with line variation of conductivity within each block [J]. Journal of China University of Geosciences, 1998, 23(3): 303-307.

- [6] 陈小斌, 张翔, 胡文宝. 有限元直接迭代算法在MT二维正演计算中的应用[J]. 石油地球物理勘探, 2000, 35(4): 487-496.  
Chen Xiaobin, Zhang Xiang, Hu Wenbao. Application of finite-element direct iteration algorithm to MT 2D forward computation[J]. Oil Geophysical Prospecting, 2000, 35(4): 487-496.
- [7] 马为, 陈小斌, 赵国泽. 大地电磁测深二维正演中辅助场的新算法[J]. 地震地质, 2008, 30(2): 525-533.  
Ma Wei, Chen Xiaobin, Zhao Guoze. A new algorithm for the calculation of auxiliary field in MT 2D forward modeling[J]. Seismology and Geology, 2008, 30(2): 525-533.
- [8] 柳建新, 蒋鹏飞, 童孝忠, 等. 不完全LU分解预处理处理的BICGSTAB算法在大地电磁二维正演模拟中的应用[J]. 中南大学学报, 2009, 40(2): 484-491.  
Liu Jianxin, Jiang Pengfei, Tong Xiaozhong, et al. Application of BICGSTAB algorithm with incomplete LU decomposition preconditioning to two-dimensional magnetotelluric forward modeling [J]. Journal of Central South University, 2009, 40(2) : 484-491.
- [9] 欧东新. 计算机精度和网格大小对大地电磁有限单元法正演的影响[J]. 桂林工学院学报, 2007, 27(3): 329-332.  
Ou Dongxin. Effect of computer precision and grid length on MT simulating using FEM[J]. Journal of Guilin University of Technology, 2007, 27(3): 329-332.
- [10] Wannamaker P E, Stodt J A, Rijo L. A stable finite element solution for two-dimensional magnetotelluric modelling[J]. Geophys Journal of the International, 1987, 88: 277-296.
- [11] 吴娟, 席振铎, 王鹤. 网格尺寸及边界对大地电磁有限元正演精度的影响[J]. 物探化探计算技术, 2012, 34(1): 27-32.  
Wu Juan, Xi Zhenzhu, Wang He. Effects of grid size and boundary on MT forward modeling using finite element method[J]. Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration, 2012, 34 (1): 27-32.

(责任编辑 赵业玲)

### ·学术动态·



## 第40期“科学家与媒体面对面”从科技视角解读“马航事件”

MH370事件不仅给航空界出了一道待解的谜题,同样也给媒体出了一道难题。面对突发事件中的“科技元素”,媒体该如何科学解读? 搜索人员可从哪里找到合适的信源? 搜索工作有哪些难题和关键?

2014年4月8日,中国科协举办第40期“科学家与媒体面对面”活动,《航空知识》副主编王亚男作“MH370媒体航空专业报道的总结和梳理”报告,中国电子科技集团公司十一所处长、研究员章正宇作“水下目标的成像和搜索”报告,中国科学院声学研究所研究员、海洋声学技术实验室主任、蛟龙号副总设计师朱敏作“声呐技术在水下搜索的能力与局限”报告,从科技视角解读“马航事件”。

详见中国科协在线直播<http://210.14.113.38:9080/asop/login.asop?titleId=382>。