

有限元法油水两相油藏数值模拟研究

张贤松^{1,2}, 丁美爱³, 周宗明⁴, 林春阳^{1,2}

1. 海洋石油高效开发国家重点实验室, 北京 100027
2. 中海油研究总院, 北京 100027
3. 中石化石油勘探开发研究院, 北京 100083
4. 振华石油控股有限公司, 北京 100031

摘要 研究了利用迦利金有限元方法模拟油藏中油水两相渗流问题, 提供一种油藏数值模拟方法。研究方法从数学模型出发, 严格推导了油藏油水两相渗流方程的有限元弱形式, 在井边界处理及上游权选择等非线性处理方面给出了可行的策略。采用商业性有限元代码生成平台 FEPG, 生成六面体八结点有限元软件代码, 模拟三维两相油藏的油水渗流规律。为验证有限元方法及软件的正确性, 与基于有限差分的商业软件进行对比, 结果表明有限元方法模拟计算结果有效可靠, 同时网格弥散现象有所控制。

关键词 有限元; 数学模型; 油水两相; 数值模拟; FEPG

中图分类号 TE329

文献标志码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2013.36.003

Simulation of the Oil and Water Two-phase Flow Based on the Galerkin Finite Element Method

ZHANG Xiansong^{1,2}, DING Meiai³, ZHOU Zongming⁴, LIN Chunyang^{1,2}

1. State Key Laboratory of Offshore Oil Exploitation, Beijing 100027, China
2. CNOOC Research Institute, Beijing 100027, China
3. Petroleum Exploration and Production Research Institute, SINOPEC, Beijing 100083, China
4. China Zhen Hua Oil Company Limited, Beijing 100031, China

Abstract This paper simulates the oil-water two-phase flow of oil and water based on the Galerkin finite element method, as an advanced reservoir simulation method. The finite element mathematical model in the weak form is derived for the oil-water two-phase flow. Then, a feasible strategy is adopted to deal with the nonlinearity terms in the well boundary processing and the upstream weight selection. Using the finite element code generation platform FEPG, the finite element software code based on hexahedral eight nodes is generated for the simulation of the three-dimensional two-phase oil-water percolation. To validate the finite element method and the software, the results are compared with those obtained by the commercial software based on the finite difference, and it is shown that the finite element method is effective and reliable.

Keywords finite element; mathematical model; oil-water two phase; reservoir simulation; FEPG

0 引言

有限元方法基于严格的数学理论分析, 适用于解决诸如热传导、流体力学、电磁场等领域的动力学问题及复杂非线性边界条件等问题, 但是目前还未出现基于有限元方法的油藏数值模拟商业软件, 现在的商业软件主要基于有限差分方法和有限体积方法, 这两种方法各自存在不足。有限差分方法对于不规则区域处理比较繁琐, 且对区域的形状有较大的要求; 有限体积方法可以

应用于非结构网格, 能处理复杂区域, 但是精度较低, 对边界的处理则不方便。与前两种方法相比, 有限元方法则能方便地处理复杂区域和各种边界条件, 并且能提供相当高的求解精度。在实际生产过程中, 随着各种复杂油气藏的发现和投产, 复杂结构的油气井在油田开发中应用越来越多, 为了提高采收率对油田开发过程模拟精度的要求越来越高, 同时在近年来计算机硬件飞速发展等因素影响下, 利用有限元方法处理油气开发过程逐渐引起了油

收稿日期: 2013-07-16; 修回日期: 2013-11-25

基金项目: 国家科技重大专项(2011ZX05024-004)

作者简介: 张贤松, 教授级高工, 研究方向为油田开发、油藏数值模拟及提高采收率技术, 电子信箱: zxsong6563@126.com

藏工程师们的重视。国外文献已经报道了利用有限元与有限体积结合的方法来研究油藏模拟问题^[1,2];应用有限元方法求解油藏压力,同时采用流线法^[3],或显式格式^[4],或不可压缩流体^[5]求解饱和度,由此提出了完整的有限元油藏模拟解决办法^[6],但是这些方法都没有给出具体的数值计算方法。国内研究工作中,刘振宇等^[7]阐述了有限元方法在油藏数值模拟研究的解决思路。王树平、董平川等^[8,9]将有限元方法引入采油工艺优化及油藏固流耦合分析。沈国华、张烈辉等^[10-12]将有限元应用于研究裂缝性油气藏的裂缝预测及试井问题。梁国平^[13]采用元件化思想和有限元语言,开发了有限元程序自动生成系统(FEPG),其系统能够解决很多国外已有商用软件无法解决的有限元问题,为有限元法油藏数值模拟求解提供了工具,其系统可以极大缩短编程工作的开发时间。

本文针对油藏油水两相渗流问题,推导了适合有限元编程的数学方程弱形式,并给出了上游权实现方法及井边界处理方法。利用FEPG有限元生成系统,将弱解形式的微分方程直接生成迦利金有限元方法模拟器。并且与有限差分的商业模拟器计算结果做了对比,两种方法的计算结果一致,同时网格弥散现象得到控制,验证结果说明在油藏模拟领域中,有限元迦利金方法是很有应用价值的方法。

1 数学模型的推导

首先,假定油藏内不存在汇源项,油水井产量项由边界荷载项给出。油藏两相渗流包括两个渗流方程及两个辅助方程。

平衡方程:

$$\nabla \left[\frac{\rho_o k k_{ro}}{\mu_o} (\nabla P_o - \rho_o g \nabla Z) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_o S_o) \quad (1)$$

$$\nabla \left[\frac{\rho_w k k_{rw}}{\mu_w} (\nabla P_w - \rho_w g \nabla Z) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w S_w) \quad (2)$$

辅助方程:

$$S_o + S_w = 1 \quad (3)$$

$$P_c = P_o - P_w = P_c(S_w) \quad (4)$$

式中, ρ_o, ρ_w 分别为油相和水相密度, g/cm^3 ; μ_o, μ_w 分别为油相和水相黏度, $\text{mPa}\cdot\text{s}$; k 为绝对渗透率, mD ; k_{ro}, k_{rw} 分别为油相、水相渗透率; P_o, P_w 和 P_c 分别为油、水相压力及油水系统毛管压力, MPa ; S_o, S_w 分别为油水相饱和度; ϕ 为油藏孔隙度。

根据辅助方程式(3)和式(4),消去平衡方程式(1)和式(2)中 S_o, P_w 两个变量,可得

$$\nabla (\rho_o K_o (\nabla P_o - \rho_o g \nabla Z)) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_o (1 - S_w)) \quad (5)$$

$$\nabla (\rho_w K_w (\nabla (P_o - P_c) - \rho_w g \nabla Z)) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w S_w) \quad (6)$$

式中, K_o, K_w 分别为油相和水相流度, $\text{mD}/(\text{mPa}\cdot\text{s})$ 。对于式(3)左端项展开

$$\nabla (\rho_o K_o (\nabla P_o - \rho_o g \nabla Z)) = \rho_o \nabla (K_o (\nabla P_o - \rho_o g \nabla Z)) + K_o (\nabla P_o - \rho_o g \nabla Z) \cdot \nabla \rho_o$$

考虑微可压缩性, $\nabla \rho_o$ 非常小,故可忽略第二项。

式(5)右端展开为

$$(\phi \rho_o (1 - S_w)) = \rho_o (1 - S_w) + \phi (1 - S_w) - \phi \rho_o$$

式中, $\phi = \phi^0 (1 + C_r (P_o - P^0))$, C_r 为岩石初始压缩系数, MPa^{-1} ; ϕ^0 为初始孔隙度; P^0 为初始压力, MPa 。

由式(5)和式(6)可以推得

$$\nabla (K_o (\nabla P_o - \rho_o g \nabla Z)) = \left(\phi^0 C_r + \frac{\phi}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial P_o} \right) (1 - S_w) \frac{\partial P_o}{\partial t} - \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (7)$$

$$\nabla (K_w (\nabla (P_o - P_c) - \rho_w g \nabla Z)) = \left(\phi^0 C_r + \frac{\phi}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial P_w} \right) S_w \frac{\partial (P_o - P_c)}{\partial t} + \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (8)$$

可以求解两个方程,两个未知数 P_o, S_w 。

2 微分方程有限元弱形式

2.1 油相压力求解

式(7)两边同乘压力变分,并在封闭空间内体积分

$$\int_V (\nabla (K_o (\nabla P_o - \rho_o g \nabla Z))) \delta P_o dV = \int_V \left(\left(\phi^0 C_r + \frac{\phi}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial P_o} \right) (1 - S_w) \frac{\partial P_o}{\partial t} - \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \right) \delta P_o dV \quad (9)$$

式(9)左端采用分部积分后,再利用高斯公式处理可得

$$-\int_V K_o (\nabla P_o - \rho_o g \nabla Z) \cdot \nabla \delta P_o dV + \int_V K_o \left(\frac{\partial P_o}{\partial n} - \rho_o g \frac{\partial Z}{\partial n} \right) \delta P_o d\Gamma = \int_V \left(\phi^0 C_r + \frac{\phi}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial P_o} \right) (1 - S_w) \frac{\partial P_o}{\partial t} \delta P_o dV - \int_V \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \delta P_o dV \quad (10)$$

式中, $\frac{\partial P_o}{\partial n}$ 为油相压力 P_o 在边界上的法向梯度; $\frac{\partial Z}{\partial n}$ 为深度 Z 在边界上的法向梯度; Γ 为封闭空间边界面; V 为封闭空间。

整理得

$$\int_V \left(\phi^0 C_r + \frac{\phi}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial P_o} \right) (1 - S_w) \frac{\partial P_o}{\partial t} \delta P_o dV + \int_V K_o \nabla P_o \cdot \nabla \delta P_o dV = \int_V \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \delta P_o dV + \int_V K_o \rho_o g \nabla Z \cdot \nabla \delta P_o dV + \int_V K_o \left(\frac{\partial P_o}{\partial n} - \rho_o g \frac{\partial Z}{\partial n} \right) \delta P_o d\Gamma \quad (11)$$

2.2 水相饱和度求解

式(8)两边同乘饱和度变分,并在封闭空间内体积分

$$\nabla(K_w(\nabla(P_o - P_c) - \rho_w g \nabla Z)) = \left(\phi^0 C_\phi + \frac{\phi}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial P_w}\right) S_w \frac{\partial P_w}{\partial t} + \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (12)$$

$$\int_V \left(\nabla(K_w(\nabla(P_w - P_c) - \rho_w g \nabla Z)) \right) \delta S_w dV = \int_V \left(\left(\phi^0 C_\phi + \frac{\phi}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial P_w} \right) S_w \frac{\partial P_w}{\partial t} + \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \right) \delta S_w dV \quad (13)$$

式(13)左端采用分部积分后,再利用高斯公式处理,得

$$-\int_V (K_w(\nabla(P_o - P_c) - \rho_w g \nabla Z)) \cdot \nabla \delta S_w dV + \int_r K_w \left(\frac{\partial(P_o - P_c)}{\partial n} - \rho_w g \frac{\partial Z}{\partial n} \right) \delta S_w d\Gamma = \int_V \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \delta S_w dV + \int_V \left(\phi^0 C_\phi + \frac{\phi}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial P_w} \right) S_w \frac{\partial P_w}{\partial t} \delta S_w dV \quad (14)$$

式中, $\frac{\partial(P_o - P_c)}{\partial n}$ 为水相压力 $P_o - P_c$ 在边界上的法向梯度; $\frac{\partial Z}{\partial n}$ 为深度 Z 在边界上的法向梯度。

整理得

$$\int_V \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \delta S_w dV - \int_V K_w \frac{dP_c}{dS_w} \nabla S_w \cdot \nabla \delta S_w dV = -\int_V K_w \nabla P_o \cdot \nabla \delta S_w dV + \int_V K_w \rho_w g \nabla Z \cdot \nabla \delta S_w dV + \int_r K_w \left(\frac{\partial(P_o - P_c)}{\partial n} - \rho_w g \frac{\partial Z}{\partial n} \right) \delta S_w d\Gamma \quad (15)$$

3 有限元求解方法

为保证数学算法的收敛性和精度,采用解耦的全隐式求解算法,将渗流方程中的压力和饱和度分开来求解,每次只解一个未知变量,总体迭代到收敛。有限元法关键是构建满足这种特点的线性方程组,将待求单元节点函数值,以形函数为权进行叠加来构造在单元上的分布函数。

对于压力求解,有限元分析中定义 $\int_V K_o \nabla P_o \cdot \nabla \delta P_o dV$ 为刚度项,用以形成刚度矩阵 S ; $\int_V \left(\phi C_\phi + \frac{\phi}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial P_w} \right) (1 - S_w) \frac{\partial P_o}{\partial t} \delta P_o dV$ 为质量项,用以形成质量矩阵 M , M 为一对角矩阵; $\int_V \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \delta P_o dV + \int_V K_w \rho_w g \nabla Z \cdot \nabla \delta P_o dV$ 为载荷,用以形成载荷向量 F ; 而 $\int_r K_w \left(\frac{\partial P_o}{\partial n} - \rho_w g \frac{\partial Z}{\partial n} \right) \delta P_o d\Gamma$ 为边界条件,该项在内部单元节点方程中为零,在边界结点上,累加于载荷向量上,其具体计算方法参考后面提及的井处理方法。其中,仅刚度项与质量项包含待求函数。而其他所涉及的 P_o 及 S_w 使用前一步非线性迭代求解结果。采用常用的六面体八结点单元来构建方程,采用结点积分方

案。经过单元分析,总刚合成,边界量的加载,最后形成各种需要参与运算的矩阵及向量,具体构建步骤参考文献^[13]。

类似地,求解饱和度时,定义 $-\int_V K_w \frac{dP_c}{dS_w} \nabla S_w \cdot \nabla \delta S_w dV$ 为刚度项, $\int_V \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \delta S_w dV$ 为质量项, $-\int_V K_w \nabla P_o \cdot \nabla \delta S_w dV + \int_V K_w \rho_w g \nabla Z \cdot \nabla \delta S_w dV$ 为载荷,而 $-\int_V K_w \left(\frac{\partial(P_o - P_c)}{\partial n} - \rho_w g \frac{\partial Z}{\partial n} \right) \delta S_w d\Gamma$ 为边界条件。

油相压力与水相饱和度均采用隐式格式抛物型方程求解,其表达式如下:

$$M \frac{\partial U}{\partial t} = LU + F$$

此处 L 为二阶算子, U 为待求向量。

对时间导数项采用向后差分格式进行离散,按照前面的积分方程写离散方程

$$M \frac{U^{t+\Delta t} - U^t}{\Delta t} + S U^{t+\Delta t} = F^{t+\Delta t} \quad (16)$$

整理得

$$(M + S\Delta t) U^{t+\Delta t} = F^{t+\Delta t} + M U^t \quad (17)$$

待求向量的线性方程组的系数矩阵为 $(M + S\Delta t)$; 右端向量为 $F^{t+\Delta t} + M U^t$ 。

4 油气井的处理方法

为便于边界条件项的计算,根据边界类型井的处理方法有两种:

(1) 定压边界的处理办法井作为内边界,虚拟尺寸造型取水平面为正方形的六面体,如图1所示。采用虚拟井处理,其几何尺寸和形状往往要适当放大。以等泄流能力的圆柱体代替六面体,以井底流压或流量为边界条件加入相关节点方程求解,等效边界半径: $r_c = \frac{2D}{\pi}$, D 为正方形虚拟井边长。

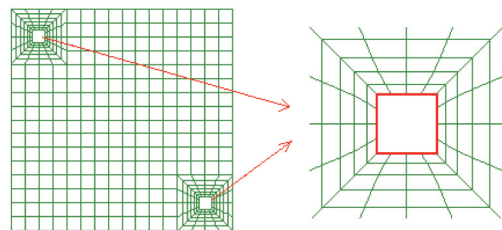


图1 定压边界处理示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the constant pressure boundary processing

边界条件项中, $K_o \left(\frac{\partial P_o}{\partial n} - \rho_w g \frac{\partial Z}{\partial n} \right)$ 及 $K_w \left(\frac{\partial(P_o - P_c)}{\partial n} - \rho_w g \frac{\partial Z}{\partial n} \right)$

分别为边界面积上的油相流量密度 q_{os} 及水相流量密度 q_{ws} 。由于边界上油相压力与水相压力可以取同一值,所以,可以设边界节点上流量密度公式为(流量以流入为正,流出为负):

$$q_{os} = -K_o \frac{P_o - P_{wf}}{r_c \cdot \ln \frac{r_c}{r_w}} \quad (18)$$

$$q_{ws} = -K_w \frac{P_o - P_{wf}}{r_c \cdot \ln \frac{r_c}{r_w}} \quad (19)$$

将式(18)和式(19)可按非线性结果显式计算,结果代入边界条件进行求积,则可定压求解。

(2) 定流量边界处理办法不需要在网格模型中精确定位井,只需把井流量平均弥散到井穿过的网格上,如图2所示,即先计算井的平均体积流量密度 $q_{ov}, q_{ow}; q_{ov}=Q_o/V; q_{ow}=Q_w/V$ 。其中, Q_o, Q_w, V 分别为井块油相及水相流量、网格块体积。

将弱解方程组中两个面积分边界项分别以两个体积积分代替,进行求解,即

$$\int_r K_o \left(\frac{\partial P_o}{\partial n} - \rho_o g \frac{\partial Z}{\partial n} \right) \delta P_o d\Gamma = \int_v q_{ov} \delta P_o dV \quad (20)$$

$$\int_r K_w \left(\frac{\partial P_w}{\partial n} - \rho_w g \frac{\partial Z}{\partial n} \right) \delta S_w d\Gamma = \int_v q_{ow} \delta S_w dV \quad (21)$$

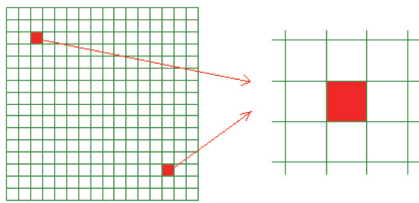


图2 定流量边界处理示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the constant flow boundary processing

5 上游权处理

计算非线性渗流问题时,如果不进行上游权处理,计算结果会出现震荡及一些不合实际的结果。处理方法如下:

(1) 单元计算时,首先对该单元所有节点循环,找出势 Φ_o 和 Φ_w 最大的节点 I_o 和 I_w ,其中 $\Phi_o = P_o + \rho_o g Z; \Phi_w = P_w + \rho_w g Z$

(2) 用势 Φ_o 最大的节点 I_o 的压力和饱和度计算对应的 ρ_o, μ_o, k_{ro} ,整个单元所有积分点采用相同的上述值。用势 Φ_w 最大的节点 I_w 的压力和饱和度计算对应的 ρ_w, μ_w, k_{rw} ,整个单元所有积分点采用相同的上述值。

(3) 除 $\rho_o, \mu_o, k_{ro}, \rho_w, \mu_w, k_{rw}$ 外其余变量均在各自积分点上计算。

6 数值模拟验证

根据以上所述方法,利用FEPG代码生成平台生成有限元代码模拟油水两相渗流,求解节点上的压力和饱和度。为验证有限元方法的可靠性,设计典型油藏模型与商业软件Eclipse计算结果进行对比。典型油藏参数为地层初始压力27.68MPa,原油的黏度70mPa·s;地层油体积系数1.112;水的黏度0.5mPa·s;地层

水体积系数1.013;基岩压缩系数 $1.451 \times 10^{-4} \text{MPa}^{-1}$ 。油藏网格为 $29 \times 29 \times 1$,网格大小 $40 \times 40 \times 10 \text{m}$ 。渗透率为2000mD;孔隙度 $\phi = 0.25$ 。模拟一注八采反九点井网的油水两相黑油模型,油井定井底流压生产,井底流压为25.6MPa;注入井定流量注入,注入速度为 $352 \text{m}^3/\text{d}$ 。相对渗透率及毛管力数据按表1进行线性插值。

表1 油藏相渗及毛管压力曲线参数

Table 1 Reservoir relative permeability and capillary pressure curve parameters

S_w	K_{rw}	K_{ro}	P_c/MPa
0.27	0	1	0.04
0.73	0.3	0	0

有限元与Eclipse黑油模型计算的压力及饱和度分布见图3和图4,上侧为Eclipse计算结果,下侧为有限元计算程序计算结果。尽管压力分布及饱和度分布结果相近,有限元方法中驱替边缘更清晰。在饱和度分布计算对比中,由于受上游权策略的影响,两个模拟器中驱替前缘的形状明显的不同,在油井附近其值相差不大。

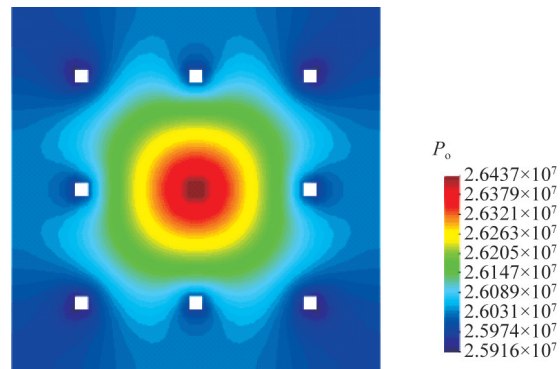
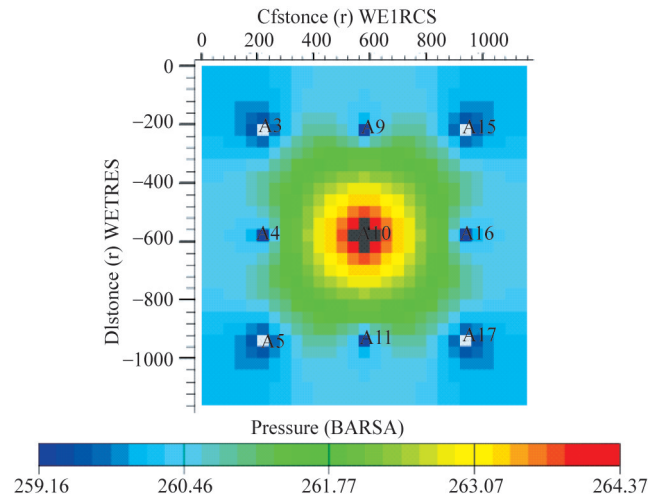


图3 压力分布对比图 (T=1000d)

Fig. 3 Comparison of pressure distributions (T=1000d)

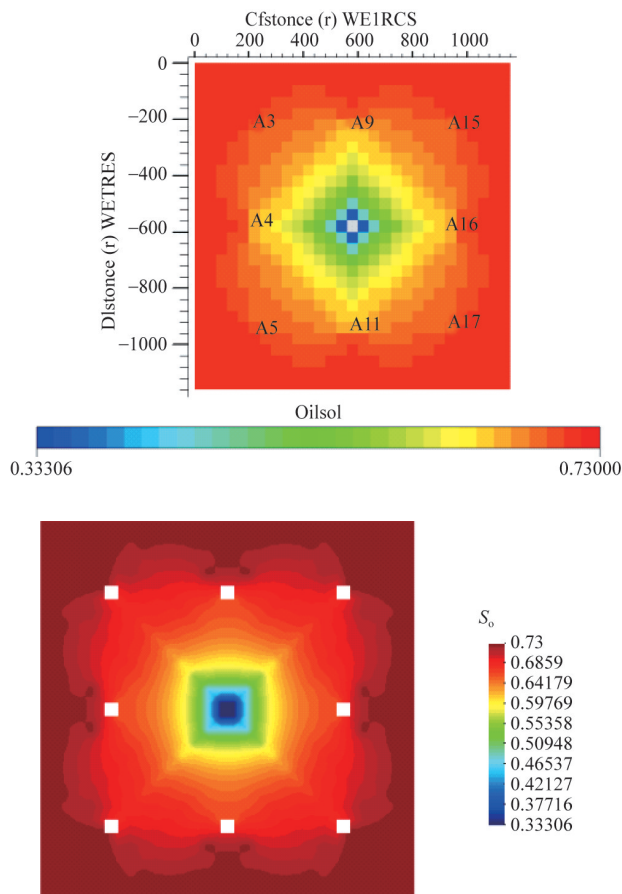


图4 油相饱和度分布对比图 ($T=1000d$)

Fig. 4 Comparison of oil saturation distributions ($T=1000d$)

两种模拟器的含水率的计算结果非常接近,计算结果对比见图5,有限元方法计算见水时间稍晚,所以有限元方法中网格弥散效应有所减轻,而差分方法由于受网格弥散效应影响,计算见水时间提前,网格越粗,网格弥散现象越明显。

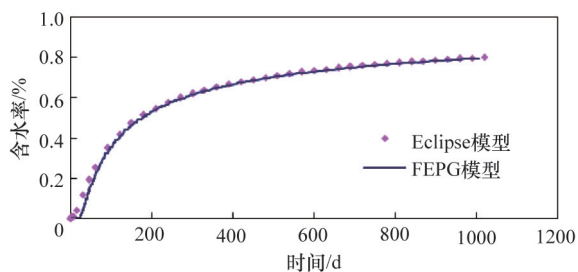


图5 油藏含水变化对比

Fig. 5 Comparison of reservoir water change

7 结论

(1) 从数学模型出发,严格推导了油水两相渗流方程的有限元弱形式,易于应用商业性有限元代码生成平台FEPG,生成有限

元软件代码,是一种新型油藏模拟方法的探索。

(2) 在井边界处理及上游权选择等非线性方面给出了可行的策略,上游权选择策略不同于普遍使用的皮斯曼方程,其内边界条件是一种模拟实际的严格方法,只在井径大小上采取了放大处理,有利于计算收敛。

(3) 根据与商业模拟器的对比结果,验证了本文有限元方法计算的正确性,且网格弥散现象有所控制。

参考文献 (References)

- [1] Sebastian G. Combining finite volume and finite element methods to simulate fluid flow in geologic media[J]. ANZIAM Journal, 2002, 44: 180-201.
- [2] Durlafsky L J. A triangle based mixed finite element finite volume technique for modeling two phase through porous media[J]. Journal of Computational Physics, 1993, 105: 252-266.
- [3] Aarnes J E, Kippe V, Knut-Andreas L. Mixed multiscale finite elements and streamline methods for reservoir simulation of large geomodels[J]. Advances in Water Resources, 2005, 28(3): 257-271.
- [4] Kozdon J, Mallison B, Gerritsen M, et al. Multi-D upwinding for multi phase transport in porous media[C]//SPE Reservoir Simulation Symposium. Woodlands, Texas: Society of Petroleum Engineers, 2009.
- [5] Efendiev Y, Ginting V, Hou T, et al. Accurate multiscale finite element methods for two-phase flow simulations[J]. Journal of Computational Physics, 2006 220: 155-174.
- [6] Chen Z X. Finite element methods for the black oil model in petroleum reservoirs[M]. Minneapolis: IMA Preprint Series, 1994.
- [7] 刘振宇. 有限元法在油藏渗流中的理论和应用[D]. 安达: 大庆石油学院, 2003.
Liu Zhenyu. The theory and application of finite element method for the flow in reservoir[D]. Anda: Daqing Petroleum Institute, 2003.
- [8] 王树平, 李治平, 罗勇, 等. 水平井射孔眼分布方式优化分析[J]. 钻采工艺, 2007(2): 39-45.
Wang Shuping, Li Zhiping, Luo Yong, et al. Drilling & Production Technology, 2007(2): 39-45.
- [9] 董平川. 油气储层流固耦合理论、数值模拟及其应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(4): 491-491.
Dong Pingchuan. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1999, 18(4): 491-491.
- [10] 沈国华. 有限元数值模拟方法在构造裂缝预测中的应用[J]. 油气地质与采收率, 2008 (4): 24-29.
Shen Guohua. Petroleum Geology and Recovery Efficiency, 2008 (4): 24-29.
- [11] 宋永东, 戴俊生. 储层构造裂缝预测研究[J]. 油气地质与采收率, 2007(6): 9-13.
Song Yongdong, Dai Junsheng. Petroleum Geology and Recovery Efficiency, 2007 (6): 9-13.
- [12] 张烈辉, 李成勇, 刘启国, 等. 边界元理论在缝洞型非均质油藏渗流研究中的应用[J]. 石油与天然气地质, 2007 (4): 528-534.
Zhang Liehui, Li Chengyong, Liu Qiguo, et al. Oil & Gas Geology, 2007(4): 528-534.
- [13] 梁国平. 有限元语言[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
Liang Guoping. Finite element language[M]. Beijing: Science Press, 2009.

(编辑 季超)