

反射棱镜调整定理

连铜淑

北京理工大学光电学院, 北京 100081

摘要 本文旨在公布一条关于棱镜调整的新定理——反射棱镜调整定理。讨论始于作者早在 40 年前创建的一条隶属像倾斜的“余弦律与差向量法则”, 该法则可视为定理之雏形。然后, 逐个地介绍了法则后续发展中的 5 次提升。最终给出了新定理准确明了的定义。

关键词 反射棱镜; 成像; 调整; 像偏转; 光轴偏; 像倾斜

中图分类号 O439, TH74

文献标志码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2013.25.001

Theorem of Adjustment for Reflecting Prisms

LIAN Tongshu

School of Optoelectronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract This paper is to issue a new theorem in the field of the theory of adjustment for reflecting prisms: Theorem of Adjustment for Reflecting Prisms. First, an embryonic form of this theorem called the "cosine law and two-vector subtraction rule", referred only to the image lean has been discussed relatively in detail, although it was created by the author 40 years ago. And then its follow-on evolving process including five times of going up has been briefly described. Finally an exact and clear definition of the theorem is given.

Keywords reflecting prism; image formation; adjustment; image rotation; optical axis deviation; image lean

0 引言

作者于 1973 年, 初次在反射棱镜调整的研究中, 创建了一条关于像倾斜的法则——“余弦律与差向量法则”。依据数学和物理的互动关系, 这一法则, 几乎在无需其他任何烦琐证明的情况下, 便可以推广到两个光轴偏分量上。后来随着棱镜调整理论不断发展, 又把法则的适应性拓宽到绕棱镜像空间一任意转轴的像偏转分量上, 使该法则具有相当的普遍意义。之后, 这条只隶属于棱镜微量转动的法则又被移植到棱镜微量移动的情况。从最初发现的“余弦律与差向量法则”到今日的“反射棱镜调整定理”, 其间共通过了 5 次提升, 历时 40 年。以下将对这一颇具学术意义的发展过程, 做一个比较系统的介绍。

原创性的思想通常寓于定理形成的最初阶段; 同时, 出于特殊历史时期的原因, 这些最原始的资料却至今从未在任何一本公开出版的图书或期刊上发表过。所以, 关于像倾斜的“余弦律与差向量法则”以及随后首次升级推演思路的描述, 将在本文中占有较大的篇幅。

1 关于像倾斜的“余弦律与差向量法则”——定理的雏形

1.1 产生极值像倾斜的棱镜微量转动的转轴方向——像倾斜的极值轴向

首先给出 3 个在后面要用到的公式:

$$A' = (-1)^t S_{T, 2\varphi} A \quad (1)$$

式中, 单位矢量 T 和 2φ 分别为棱镜的特征方向和特征角; t 为棱镜的反射面总数或称反射次数; $S_{T, 2\varphi}$ 代表绕特征方向 T 转了特征角 2φ 的转动矩阵, 取名棱镜特征矩阵; A 和 A' 为共轭物、像体的方向(单位)矢量。

$$A' = A \cos \theta + (1 - \cos \theta)(A \cdot P)P - \sin \theta(A \times P) \quad (2)$$

这就是 A 绕单位矢 P 转动 θ 而成为 A' 的转动矢量公式。

当转角为微量 $\Delta\theta$ 时, 式(2)变成

$$A' = A + \Delta\theta(P \times A) \quad (3)$$

1.1.1 坐标的标定

见图 1, xyz 代表棱镜的物空间内的右手系直角坐标(如



果是奇次反射的棱镜,则 xyz 代表实际物空间的反向,也就是说, $(-x)(-y)(-z)$ 为物空间坐标,其中 x 代表入射光轴的方向(当然,在奇次反射棱镜的情形, x 将是入射光轴的反向)。 T 代表棱镜在理想位置下的特征方向。在棱镜所在的这个理想的位置, $x'y'z'$ 代表像空间内与 xyz (或与 $(-x)(-y)(-z)$) 相对应的直角坐标。显然, $x'y'z'$ 将由 xyz 绕 T 转 2φ 而成,同时也是右手系坐标。这里的 x' 将代表理想的出射光轴方向。如果 A_1, A_2 和 A_3 分别代表沿着物空间坐标轴方向的 3 个入射的单位矢量,则在像空间内,与此相对应的 3 个理想的(“理想”二字的意思是指棱镜在理想的位置)单位像矢量 $A'_{1,0}, A'_{2,0}$ 和 $A'_{3,0}$ 也将分别处在沿着像空间的 3 个坐标轴的方向上。

应当指出,图 1 上所示的情况是与一个偶次反射的棱镜相对应的(若为奇次反射棱镜,则 $(-A_1), (-A_2), (-A_3)$ 变成入射矢量,其方向对应地与 $(-x), (-y), (-z)$ 相一致)。

现在再谈一下与 x 轴相垂直的物面内的两个坐标轴 z 和 y 的方向是如何标定的,以及用 T 充当 Z 轴的坐标系 XYZ 是如何标定的。

通过特征方向 Z 轴,作 x 轴和出射光轴 x' 的夹角的平分面, ψ 代表 Z 和 x 轴之间,同时也是 Z 和出射光轴 x' 之间的夹角。 X 轴的方向与此平分面相垂直,而且和 x 轴构成锐角。 Y 轴自然在平分面内,且与 X 和 Z 构成右手系坐标。 z 轴位于入射光轴 x 和特征方向 Z 所组成的平面内,与 x 轴垂直,且与 Z 构成锐角,然后再按右手系规定 y 轴的方向。在此情况下,自然有: z' 在 x' 和 Z 组成的平面内并且同 Z 构成锐角。

以上几个坐标均属定坐标系,但是这些定坐标系和棱镜之间是存在一定的联系的。如果说棱镜的几何形状以及棱镜在整个光学系统中所居的相对位置都是一种理想的情况,那么定坐标系中的 Z 就是棱镜的特征方向, x' 代表棱镜的出射光轴, x 代表棱镜的入射光轴或入射光轴的反向(如果是奇次反射棱镜的话),而 ZY 则代表出射光轴 x' 和 x 轴的平分面。

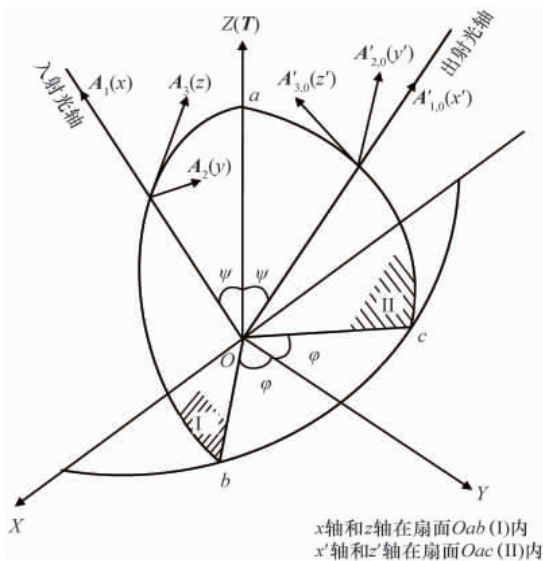


图 1 坐标系的标定

Fig. 1 Orientation of coordinate systems

当棱镜转动之后,则 Z 在空间保持原有方向不变,而棱镜的特征方向却转移到 T' 方向上。

设棱镜转轴方向单位矢量 P 在 XYZ 坐标系内的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 。当棱镜在调整时绕 P 转动一微量角度 $\Delta\theta$ 后,此时出射光轴方向和像面都可能发生偏转。 A_1, A_2 和 A_3 的像不再在理想位置 $A'_{1,0}, A'_{2,0}$ 和 $A'_{3,0}$, 而是变成 A'_1, A'_2 和 A'_3 。

1.1.2 公式推导

当讨论像倾斜时,只须求出像矢量 A'_3 中沿 j' 的误差分量就可以了,因为像倾斜只与此分量有关。

思路:

首先,在坐标系 XYZ 中解决,以 A_3 作为入射矢量;根据公式(3)找出棱镜绕转轴 P (在 XYZ 中的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta$ 和 $\cos\gamma$) 转动 $\Delta\theta$ 后的特征方向的新位置 T' (单位矢量);然后,根据绕 T' 转 2φ 的原则,利用公式(2)找出入射矢量 A_3 的像矢量 A'_3 。

其次,进行坐标转换。将以上在坐标系 XYZ 中所求得的 A'_3 转换到坐标系 $x'y'z'$ 上。

具体步骤如下:

(1) 先取入射矢量 A_3 ,其在坐标系 XYZ 上的三个分量可由图 2 求得

$$A_{3x} = -\cos\psi \sin\varphi, A_{3y} = -\cos\psi \cos\varphi, A_{3z} = \sin\psi$$

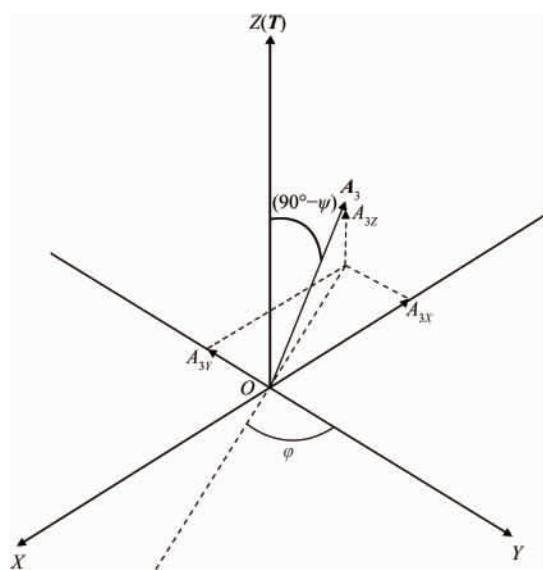


图 2 参考坐标系 XYZ

Fig. 2 Coordinate system of reference XYZ

(2) 求棱镜绕 P 转动 $\Delta\theta$ 后的特征向量的新的位置 T' 。棱镜转动前的特征向量 T 在 Z 轴的位置。由式(3),

$$T' = T + \Delta\theta(P \times T)$$

已知 T 和 P 在坐标系 XYZ 中的各分量如下:

$$P: P_x = \cos\alpha, P_y = \cos\beta, P_z = \cos\gamma$$

$$T: T_x = 0, T_y = 0, T_z = 1$$

将这些数据代入上式,得



$$T': T'_x = \Delta\theta \cos\beta, T'_y = -\Delta\theta \cos\alpha, T'_z = 1$$

(3) 在坐标系 XYZ 内求入射矢量 A_3 经棱镜后的出射矢量 A'_3 。显然 A'_3 将由 A_3 绕 T' 转动 2φ 而成, 所以

$$A'_3 = A_3 \cos 2\varphi + (1 - \cos 2\varphi)(A_3 \cdot T')T' - \sin 2\varphi(A_3 \times T')$$

将 A_3 和 T' 的分量重写于下:

$$A_3: A_{3x} = -c \cos\psi \sin\varphi, A_{3y} = -\cos\psi \cos\varphi, A_{3z} = \sin\psi$$

$$T': T'_x = \Delta\theta \cos\beta, T'_y = -\Delta\theta \cos\alpha, T'_z = 1$$

由此, $(A'_3 \cdot T')$ 项无须求出 (详见后述)

$$(A_3 \times T')_x = -\cos\psi \cos\varphi + \Delta\theta \cos\alpha \sin\psi$$

$$(A_3 \times T')_y = \Delta\theta \cos\beta \sin\psi + \cos\psi \sin\varphi$$

$$(A_3 \times T')_z \text{ 此项无须求出 (详见后述)}$$

将上列的有关项目代入 A'_3 的矢量公式, 略去二阶无限小量, 得

$$A'_{3x} = -\cos\psi \sin\varphi \cos 2\varphi + 2\sin^2\varphi \Delta\theta \cos\beta \sin\psi + \sin 2\varphi (\cos\psi \cos\varphi - \Delta\theta \cos\alpha \sin\psi)$$

$$A'_{3y} = -\cos\psi \cos\varphi \cos 2\varphi - 2\sin^2\varphi \Delta\theta \cos\alpha \sin\psi - \sin 2\varphi (\Delta\theta \cos\beta \sin\psi + \cos\psi \sin\varphi)$$

A'_{3z} 项无须求出 (后详)。

(4) 坐标转换。

坐标系 XYZ 可经由下列两个步骤而转变成坐标系 $x'y'z'$:

第 1 步, 假想 XYZ 绕 Z 转 $(90^\circ + \varphi)$ 而变成 $X_1Y_1Z_1$ (图 3), 此时, Y_1 轴与图 1 上的 y' 轴相重合;

第 2 步, 再使 $X_1Y_1Z_1$ 绕 $(-Y_1)$ 转 $(90^\circ - \psi)$, 则 $X_1Y_1Z_1$ 变成了 $x'y'z'$ 。

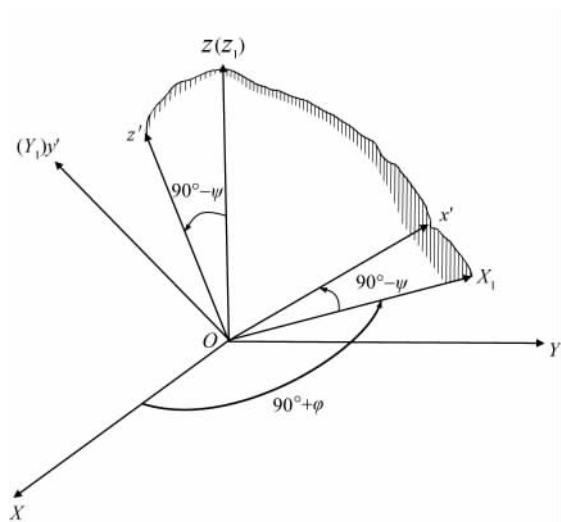


图 3 坐标系 XYZ 向着坐标系 $x'y'z'$ 的两次转动
Fig. 3 Making XYZ coincident with $x'y'z'$ through two rotations

根据坐标转换的道理, 由图 3 求出坐标转换用的 9 个方向余弦, 并列于表 1 中。

表 1 坐标转换的 9 个方向余弦

Table 1 Direction cosines between axes of two sets of coordinate system

	X	Y	Z(T)
x'	$-\sin\psi/\sin\varphi$	$\sin\psi/\cos\varphi$	$\cos\psi$
y'	$-\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
z'	$\cos\psi/\sin\varphi$	$-\cos\psi/\cos\varphi$	$\sin\psi$

(5) 求出射矢量 A'_3 在坐标系 $x'y'z'$ 中的表达式。

这里只求沿单位矢量 j' 方向的分量 A'_{3y} , 因为像倾斜取决于此分量的大小。

由表 1, 得

$$A'_{3y} = A'_{3x}(-\cos\varphi) + A'_{3z}(-\sin\varphi) + A'_{3y} \cdot 0$$

可见, A'_{3y} 的数值和 A'_{3z} 无关, 这就是以上不求出 A'_{3z} 的缘故。

将有关项目代入上式, 得

$$A'_{3y} = \frac{1}{2} c \cos\psi \sin 2\varphi \cos 2\varphi - 2\Delta\theta \cos\beta \sin\psi \sin^2\varphi \cos\varphi + \Delta\theta \cos\alpha \sin\psi \sin 2\varphi \cos\varphi - \cos\psi \sin 2\varphi \cos^2\varphi + \frac{1}{2} \cos\psi \sin 2\varphi \cos 2\varphi + 2\Delta\theta \cos\alpha \sin\psi \sin^2\varphi \sin\varphi + \Delta\theta \cos\beta \sin\psi \sin 2\varphi \sin\varphi + c \cos\psi \sin 2\varphi \sin^2\varphi$$

经整理, 得

$$A'_{3y} = 2\Delta\theta \cos\alpha \sin\psi \sin\varphi \tag{4}$$

按照绕 x' 的右螺旋规则定像倾斜的正负号, 由式 (4) 和图 4 得

$$-v = 2\Delta\theta \sin\psi \sin\varphi \cos\alpha / l$$

由此,

$$v = -2\Delta\theta \sin\psi \sin\varphi \cos\alpha \tag{5}$$

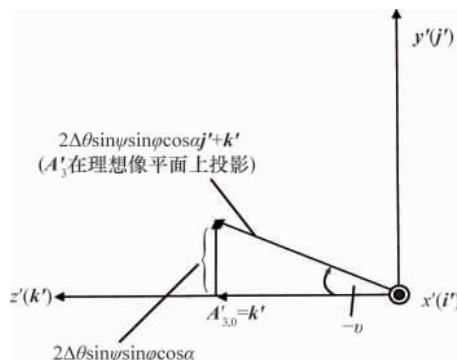


图 4 像倾斜示意图

Fig. 4 Diagram for calculating image lean

当反射系统给定后, 出射光轴和特征方向的夹角 ψ 以及半特征角 φ 即已确定。所以, 由公式 (5) 可知, 一定的反射系统的像倾斜只取决于转轴方向同 X 轴的夹角 α 以及微量转角 $\Delta\theta$ 。

当 $\alpha = 90^\circ$, 棱镜的转轴位于 YZ 平面内, 此时像倾斜 $v = 0$ 。这说明, 在微量转动的前提下, 当转轴位于 YZ 平面内, 则不管转轴的方向如何, 而像倾斜总是等于零。因此, 把棱镜的 YZ

平面叫做特征平面(宜改称像倾斜的零值轴向平面)。

当微量转角 $\Delta\theta$ 一定时,若 $\alpha=0^\circ, \cos\alpha=1$ 表示绕 X 轴方向转动产生的像倾斜最大,因此把 X 轴方向叫做“像倾斜的极值轴向”。

毋庸说,当棱镜绕特征方向 T 转动时,由于 $\alpha=90^\circ, \beta=90^\circ, \gamma=0^\circ$,不仅像倾斜为零,而且 $A'_1=i', A'_2=j', A'_3=k'$ 表示出射光轴方向也不改变(当然这仅限于棱镜在平行光路中的情况)。

为了使读者有一个全面的了解,以下给出三个像矢量 A'_1, A'_2, A'_3 在坐标系 $x'y'z'$ 中的表达式:

$$A'_1 = i' + 2\Delta\theta \cos\beta \sin\varphi \cos\alpha j' + 2\Delta\theta \sin\beta \sin\varphi \cos\alpha k' \quad (6)$$

$$A'_2 = -2\Delta\theta \sin\beta \sin\varphi \cos\alpha i' + j' - 2\Delta\theta \sin\beta \sin\varphi \cos\alpha k' \quad (7)$$

$$A'_3 = -2\Delta\theta \sin\beta \sin\varphi \cos\alpha i' + 2\Delta\theta \sin\beta \sin\varphi \cos\alpha j' + k' \quad (8)$$

推导方法与上述类似,故从略。

不难看出,两个光轴偏分量 ξ 和 ζ 各自取决于像矢量 A'_1 中沿 k' 和 j' 的误差分量 $2\Delta\theta \sin\beta \sin\varphi \cos\alpha$ 和 $2\Delta\theta \cos\beta \sin\varphi \cos\alpha$, 见公式 6。(ξ 和 ζ 在平行光路中代表两个光轴偏分量,而在会聚光路中则代表两个像面偏分量。)

必须指出,虽然上述中的公式(5)~(8)是根据图 1 上所示的偶次反射的情况下推导出来的,但它们对于奇次反射也是适用的,只要把图 1 上原来的物空间坐标 xyz 看成是真实的物空间坐标的反向就可以了。

1.1.3 从像倾斜公式中发现的规律

关于像倾斜的极值轴向 X 以及棱镜绕此极值轴向转动微小角度 $\Delta\theta$ 所产生的像倾斜极值 v_{\max} 的求解,还可以在规律性方面做进一步的探索。

图 5 和图 6 是图 1 中某些局部的再现。

由图 1 中一些已知的几何关系可见,图 5 里的像倾斜极值轴向 X 必然位于于出射光轴 x' 和 x 所构成的平面内。这里虚线 Op 为 x' 和 x 夹角的平分线,它是特征平面 ZOY 和 xOx' 平面的交截线。显然, X 与 Op 相垂直。

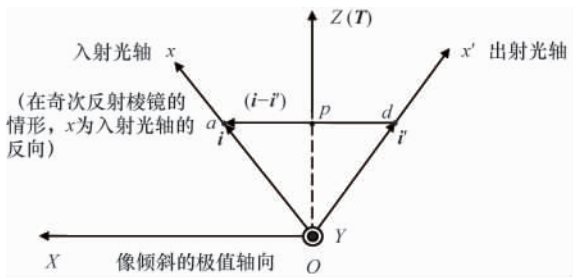


图 5 差向量 $(i-i')$ 的方向

Fig. 5 Direction of subtraction vector $(i-i')$

设 i 和 i' 分别为沿 x 和 x' 的单位矢。现在来考察一下,在差向量 $(i-i')$ 与像倾斜公式(5): $v = -2\Delta\theta \sin\beta \sin\varphi \cos\alpha$ 之间,是否存在一些微妙的关系。

(1) 差向量 $(i-i')$ 的方向。

无疑,图 5 和图 6 均表明,差向量 $(i-i')$ 的方向与像倾斜 v 的极值轴向 X 轴相平行。

(2) 差向量 $(i-i')$ 的长度(模)。

由图 6,不难求得单位矢 i 在 X 轴上的投影长度 \overline{Oc} :

$$\overline{Oc} = \sin\beta \sin\varphi \quad (9)$$

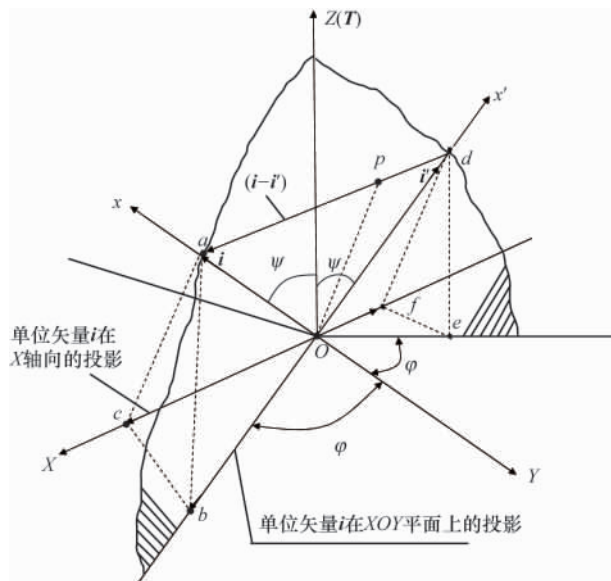


图 6 差向量 $(i-i')$ 的长度

Fig. 6 Magnitude of subtraction vector $(i-i')$

又由于对称的关系,差向量 $(i-i')$ 的长度 \overline{da} 应该是 \overline{Oc} 的两倍,所以差向量 $(i-i')$ 的模等于

$$|i-i'| = 2\sin\beta \sin\varphi \quad (10)$$

(3) 构建一矢参量 δ_u

$$\delta_u = \Delta\theta (i-i') \quad (11)$$

此参量的方向代表像倾斜 v 的极值轴向,其大小,正好代表像倾斜极值 $v_{\max} = \delta_u = \Delta\theta |i-i'|$,因此矢参量本身 δ_u 称为像倾斜 v 的极值特性向量。

1.2 余弦律与差向量法则

根据 1.1.3 节中(1)~(3)的内容以及公式(10)和(11),可以将像倾斜的调整公式(5)转写成下列的形式:

$$v = -P \cdot \delta_u = -\delta_u \cos(P, \delta_u) = -\delta_u \cos\alpha \quad (12)$$

式中,

$$\delta_u = \Delta\theta (i-i') \quad (13)$$

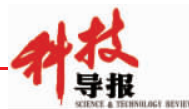
为了去除公式(12)右方的“-”号,可以在坐标标定时(见图 1),使 X 轴与 x' 成锐角,同时把差向量改成 $(i'-i)$,则公式(12)和(13)变成

$$v = P \cdot \delta_u = \delta_u \cos(P, \delta_u) = \delta_u \cos\alpha \quad (14)$$

式中,

$$\delta_u = \Delta\theta (i'-i) \quad (15)$$

公式(14)和(15),就是后来所说的反射棱镜调整定理的雏型。



2 “余弦律与差向量法则”的前 4 次提升

2.1 第 1 次提升

2.1.1 内容

把在像倾斜 v 中导出的“余弦律与差向量法则”全盘地移植到两个光轴偏的分量 ξ 和 ζ 上。

依照公式(14)和(15),可写出 y' 光轴偏分量 ξ 和 z' 光轴偏分量 ζ 的两组类同的公式:

$$\xi = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_v = \delta_v \cos(\mathbf{P}, \boldsymbol{\delta}_v) = \delta_v \cos\beta \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\delta}_v = \Delta\theta(\mathbf{j}' - \mathbf{j}) \quad (17)$$

和

$$\zeta = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_w = \delta_w \cos(\mathbf{P}, \boldsymbol{\delta}_w) = \delta_w \cos\gamma \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\delta}_w = \Delta\theta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \quad (19)$$

式中, $\boldsymbol{\delta}_v$ 和 $\boldsymbol{\delta}_w$ 分别代表 y' 光轴偏和 z' 光轴偏的极值特性向量; $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 代表棱镜的微量转动 $\Delta\theta\mathbf{P}$ 分别与 $\boldsymbol{\delta}_v$ 和 $\boldsymbol{\delta}_w$ 的夹角余弦。

2.1.2 论证

常说数学是物理的抽象;二者是量和质的关系。这两种理解均可接受,然而还必须指出数学对物理的反作用,或者说数学和物理的互动关系。

回顾图 1,棱镜已然消逝,而 $(-1)'\mathbf{S}_{T,2\varphi}$ 取代了它在方向共轭方面的功效;经过适当的处理之后, $(-1)'$ 也可去除,最终只留下一个绕 T 转 2φ 的转动矩阵。这是在某种意义上对反射棱镜的高度概括和抽象,一个非常高明的实例,高明到连棱镜都给抽象没了。既然棱镜已隐匿,那么图 1 中的一对入射光轴和出射光轴还仍然有这么重要吗?换句话说,你何尝不可以把 y 和 y' 也当做一对入射光轴和出射光轴,然后按照原来的坐标标定方式,构建出适合于本情况的一套坐标系: xyz 、 $x'y'z'$ 和 XYZ 。相信一定会导出与公式(5)相仿的 ξ 表达式,并最终得到与 ξ 相对应的余弦律与差向量法则的公式组(16)和(17)。同理, ζ 的公式组(18)和(19)也可以得到验证。

以上只进行了逻辑推理,实际上并没有那样地去做,因为后来运用了其他便捷的方法导出了更具普遍意义的余弦律与差向量法则。然而在上述的推论中已显出数学之对于物理的反作用。

2.2 第 2 次提升

为了以下讨论的方便,须重提“像偏转” $\Delta\boldsymbol{\mu}'$ 的定义:

“在物体不动的条件下,由反射棱镜的微量转动 $\Delta\theta\mathbf{P}$ 所造成像体在方向上的微量变化称为像偏转 $\Delta\boldsymbol{\mu}'$ ”。

2.2.1 内容

把余弦律与差向量法则推广到像偏转 $\Delta\boldsymbol{\mu}'$ 沿反射棱镜像空间内一任意方向单位矢 \mathbf{r}' 的分量 $\Delta\mu_{r'}$ 上:

$$\Delta\mu_{r'} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_i = \delta_i \cos(\mathbf{P}, \boldsymbol{\delta}_i) \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\delta}_i = \Delta\theta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \delta_i \mathbf{h} \quad (21)$$

式中, \mathbf{h} 为矢参量 $\boldsymbol{\delta}_i$ 方向上的单位矢。

法则的定义:

“像偏转 $\Delta\boldsymbol{\mu}'$ 沿反射棱镜像空间内一任意方向单位矢 \mathbf{r}'

上的分量 $\Delta\mu_{r'}$ (r' 像偏转)同引起像偏转的棱镜微量转动 $\Delta\theta\mathbf{P}$ 之间的关系受余弦律支配: $\Delta\mu_{r'} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_i = \delta_i \cos(\mathbf{P}, \boldsymbol{\delta}_i)$, 而余弦律中的唯一的矢参量 $\boldsymbol{\delta}_i$ 可由差向量法则求得: $\boldsymbol{\delta}_i = \Delta\theta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ 。这里, $(-1)'\mathbf{r}$ 为 \mathbf{r}' 在反射棱镜的物空间内的共轭单位矢; t 为反射棱镜的反射次数”。

2.2.2 论证

像偏转 $\Delta\boldsymbol{\mu}'$ 是伴随着刚体运动学的原理与观点被引入反射棱镜调整原理而出现的一个新概念。

所谓的像倾斜 v 和两个光轴偏分量 ξ 及 ζ , 是因为它们对于后置透镜系统,甚至是观察者的不同效应而得名的。

倘若讨论的问题仅限于反射棱镜自身及其物、像空间的范围,那么像倾斜 v 和两个光轴偏分量 ξ 及 ζ 只不过是像偏转矢量 $\Delta\boldsymbol{\mu}'$ 在棱镜像空间坐标轴 x' 、 y' 、 z' 上的三个分量而已:

$$v = \Delta\mu_{x'}, \quad \xi = \Delta\mu_{y'}, \quad \zeta = \Delta\mu_{z'} \quad (22)$$

由此可见,像偏转 $\Delta\boldsymbol{\mu}'$ 这一概念的重要作用在于它对光轴偏与像倾斜的共性进行了高度的概括。此种科学的抽象有利于进一步揭示反射棱镜调整的内在规律。

上述实例又一次说明了数学之对于物理的反作用。

以下直接推导公式(20)和(21)。文献[2]提出的求像偏转的两步法:第一步,棱镜不动,物体转动 $(-\Delta\theta\mathbf{P})$, 像体得到一个对应的转动;第二步,物体、棱镜、像体三者作为一个整体一起转动 $\Delta\theta\mathbf{P}$, 结局是物体复位,棱镜和像体二者到位,而像体两次转动的综合即为所求的像偏转 $\Delta\boldsymbol{\mu}'$ 。考虑到 $\mathbf{S}_{T,2\varphi}$ 可作为棱镜对角矢量的传递矩阵^[19], 于是

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\mu}' &= \mathbf{S}_{T,2\varphi}(-\Delta\theta\mathbf{P}) + \Delta\theta\mathbf{P} \\ &= (\mathbf{E} - \mathbf{S}_{T,2\varphi})\Delta\theta\mathbf{P} \end{aligned} \quad (23)$$

据 $\Delta\mu_{r'}$ 的定义,得

$$\Delta\mu_{r'} = \Delta\boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{r}' \quad (24)$$

将式(23)代入式(24),有

$$\Delta\mu_{r'} = \Delta\theta\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}' - \Delta\theta\mathbf{S}_{T,2\varphi}\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}' \quad (25)$$

在法则的定义中,规定 $(-1)'\mathbf{r}$ 和 \mathbf{r}' 对反射棱镜呈现方向共轭的关系,所以

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}(-1)'\mathbf{r} \quad (26)$$

式中, \mathbf{R} 为棱镜的作用矩阵或反射矩阵:

$$\mathbf{R} = (-1)'\mathbf{S}_{T,2\varphi} \quad (27)$$

将式(27)代入式(26),得

$$\mathbf{r}' = (-1)'\mathbf{S}_{T,2\varphi}\mathbf{r} = \mathbf{S}_{T,2\varphi}\mathbf{r} \quad (28)$$

再将式(28)代入式(25)右方的第 2 项,得

$$\begin{aligned} \Delta\mu_{r'} &= \Delta\theta\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}' - \Delta\theta\mathbf{S}_{T,2\varphi}\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{T,2\varphi}\mathbf{r}' \\ &= \Delta\theta\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}' - \Delta\theta\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}' \end{aligned}$$

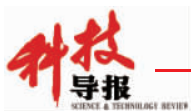
因而

$$\Delta\mu_{r'} = \mathbf{P} \cdot \Delta\theta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (29)$$

上式也可写成:

$$\Delta\mu_{r'} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_i \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\delta}_i = \Delta\theta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (31)$$



由此得证。

2.3 第3次提升

为了以下讨论的方便,须重提“像移动” $\Delta S'$ 的定义:

“在物体不动的条件下,由反射棱镜的微量移动 ΔgD 所造成的像体在位置上的微量变化称为像移动 $\Delta S'$ 。”

2.3.1 内容

试探能否将反射棱镜微量转动情况下隶属于 $\Delta \mu'_{r'}$ 的余弦律与差向量法则移植到像移动 $\Delta S'$ 沿反射棱镜像空间内一任意方向单位矢 r' 的分量 $\Delta S'_{r'}$ 上。

由于要保持已经在反射棱镜微量转动的余弦律与差向量法则中所采用的 $r'=S_{T,2\varphi}r$ 的关系,所以在本次提升中只获得名称没能完全统一的“余弦律与差、和向量法则”。

法则的公式:

$$\Delta S'_{r'} = D \cdot \delta_e = \delta_e \cos(D, \delta_e) \quad (32)$$

$$\delta_e = \Delta g[r' - (-1)^t r] = \delta_e e \quad (33)$$

式中, e 为矢参量 δ_e 方向上的单位矢。

法则的定义:

“像移动” $\Delta S'$ 沿反射棱镜像空间内一任意方向单位矢 r' 上的分量 $\Delta S'_{r'}$ (r' 像移动)同引起像移动的棱镜微量移动 ΔgD 之间的关系受余弦律支配: $\Delta S'_{r'} = D \cdot \delta_e = \delta_e \cos(D, \delta_e)$,而余弦律中的唯一的矢参量 δ_e 可由差、和向量法则求得: $\delta_e = \Delta g[r' - (-1)^t r]$ 。这里, $(-1)^t r$ 为 r' 在反射棱镜的物空间内的共轭单位矢; t 为反射棱镜的反射次数。”

2.3.2 论证

论证的方法与上述类似,故从略。

2.4 第4次提升

经本次提升后,分别与反射棱镜微量转动 $\Delta \theta P$ 和微量移动 ΔgD 相对应的两条法则终于取得了一致的名称和统一的定义。

2.4.1 内容

余弦律与差向量法则(一)的定义:

像偏转 $\Delta \mu'_{r'}$ 沿反射棱镜像空间内一任意方向单位矢 r' 上的分量 $\Delta \mu'_{r'}$ (r' 像偏转)同引起像偏转的棱镜微量转动 $\Delta \theta P$ 之间的关系受余弦律支配: $\Delta \mu'_{r'} = P \cdot \delta_h = \delta_h \cos(P, \delta_h)$,而余弦律中的唯一的矢参量 δ_h 可由差向量法则求得: $\delta_h = \Delta \theta(r' - r)$ 。这里 $r = S_{T,2\varphi}r'$ 或 $r' = S_{T,2\varphi}r$ 。

余弦律与差向量法则(二)的定义:

像移动 $\Delta S'$ 沿反射棱镜像空间内一任意方向单位矢 r' 上的分量 $\Delta S'_{r'}$ (r' 像移动)同引起像移动的棱镜微量移动 ΔgD 之间的关系受余弦律支配: $\Delta S'_{r'} = D \cdot \delta_e = \delta_e \cos(D, \delta_e)$,而余弦律中的唯一的矢参量 δ_e 可由差向量法则求得: $\delta_e = \Delta g(r' - r)$,这里 $r = Rr'$ 或 $r' = Rr$ 。

2.4.2 论证

这里的关键是如何理顺在反射棱镜物、像空间内的一对相应的方向单位矢 r 和 r' 之间的关系问题。

自从发现了 $S_{T,2\varphi}$ 还可以作为“角矢量传递矩阵”这个崭新的概念之后, $S_{T,2\varphi}$ 和 R 之间便又多了一层新的关系:“反射

棱镜的特征矩阵 $S_{T,2\varphi}$ 和作用矩阵 R 分别呈现为角矢量和线矢量的传递矩阵。”

无论是棱镜的微量转动 $\Delta \theta P$ 或是微量移动 ΔgD ,均属于运动学中的物理量,因此当讨论反射棱镜的此类问题的时候,宜用二者各自的传递矩阵 $S_{T,2\varphi}$ 和 R 规定棱镜物、像空间内的 r 和 r' 之间的关系。

由于此种处理方法合乎事物自身的内在规律,因而使分别与棱镜微量转动和微量移动相对应的法则最终达到了高度的一致(见文献[15])。

3 反射棱镜调整定理

本文的主旨在于提出一条新的定理——“反射棱镜调整定理”,是为第5次提升的成果。

3.1 定理的定义

“在物体不动的条件下,由反射棱镜的微量转动 $\Delta \theta P$ (微量移动 ΔgD)所引起的像偏转 $\Delta \mu'_{r'}$ (像移动 $\Delta S'$)沿棱镜像空间内一任意方向单位矢 r' 上的分量 $\Delta \mu'_{r'}$ ($\Delta S'_{r'}$)所呈现的数量场 $\Delta \mu'_{r'}\{\Delta \theta P\}$ ($\Delta S'_{r'}\{\Delta gD\}$)的梯度 $\eta_h(\eta_e)$ 可根据一差向量法则求得: $\eta_h(\eta_e) = r' - r$ 。其中, $r' = S_{T,2\varphi}r$ ($r' = Rr$),而 $S_{T,2\varphi}(R)$ 代表反射棱镜的角矢量(线矢量)传递矩阵。”

3.2 论证

将“法则”升级为定理的缘由:

(1) 经过第4次提升后,两条法则在名称和定义上已达到了高度的统一。

(2) 像偏转分量 $\Delta \mu'_{r'}$ 和像移动分量 $\Delta S'_{r'}$ 各自的极值特性向量 δ_h 和 δ_e 的极值性质表明,差向量($r' - r$)实际上正是 $\Delta \mu'_{r'}$ 和 $\Delta S'_{r'}$ 的梯度:

$$\eta_h = (r' - r) \quad (34)$$

$$\eta_e = (r' - r) \quad (35)$$

而

$$\delta_h = \Delta \theta(r' - r) = \Delta \theta \eta_h \quad (36)$$

$$\delta_e = \Delta g(r' - r) = \Delta g \eta_e \quad (37)$$

极值特性向量与梯度之间只差一个比例系数 $\Delta \theta$ 或 Δg 。

根据 $\Delta \mu'_{r'}$ 和 $\Delta S'_{r'}$ 二函数各自的变量的特点, η_h 和 η_e 也可分别取名为角梯度和线梯度,以区别于普通的梯度。

(3) 余弦律和梯度好似一对双胞胎,它们是同时存在的。既然由差向量法则所求得的结果正是所说的梯度,那么余弦律就必然会伴随而来,可不必当成是另一个新的发现。因此,差向量法则才是揭示反射棱镜调整内在规律的关键所在。这就是为什么在最后归纳出来的“反射棱镜调整定理”中不再有“余弦律”三个字的出现。

(4) 差向量法则在反射棱镜调整理论中占有相当重要的地位。

(5) 法则经过了40年实践的考验,已经发挥了很大的作用。例如,该法则在1997年为某合资企业一研制项目解决了一个通过一年多的努力尚未能克服的关键难题,使该项目的产品——双目体视显微镜试制成功并远销欧美。



(6) 法则的宽度和深度均已达到尽头。

4 结论

(1) 反射棱镜调整定理揭示了平行光路中棱镜调整的全部规律及会聚光路中棱镜调整的部分规律。

(2) 差向量与外界因素无关,只取决于反射棱镜的内部结构,因此差向量自身(梯度)将成为棱镜的重要的特性参量。

(3) 反射棱镜调整定理的内容和形式均十分简明。只要进行一次简单的差向量运算,一切相关的问题便迎刃而解。

(4) 在本法则的形成直至晋升定理的 40 年间,刚体运动学原理和观点之融入起到了极其重要的作用。“刚体运动”这一虚构的物理模型被用来模拟反射棱镜的物像关系以及像体微量运动等真实的物理现象。无疑,文献[1]中的特征矩阵与文献[2]中的两步法等卓越的贡献也均在此列。

致谢: 本文得到赵维谦教授主持的“国家重大科学仪器设备开发专项‘激光差动共焦成像与检测仪器研发与应用研究’(2011YQ040136)”项目提供的资助,在此表示感谢。

参考文献 (References)

[1] 唐家范. 反射棱镜位置误差产生的像倾斜和光轴变化 [J]. 云光技术, 1972(3): 1-60.
Tang Jiafan. Yunguang Jishu, 1972(3): 1-60.

[2] 何绍宇, 郑长英. 棱镜位移和微量旋转引起的光路变化 [C]//光学设计文集. 北京: 第一机械工业部情报所, 1973.
He Shaoyu, Zheng Changying. The change of ray path caused by linear and angular displacements of reflecting prisms [C]//Proceedings on Optical Design. Beijing: Institute of Information, 1st Ministry of Machine Building, 1973.

[3] 连铜淑. 棱镜调整 (光轴偏和像倾斜计算)[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1973.
Lian Tongshu. Adjustment of reflecting prisms (Calculation of optical axis deviation and image lean) [M]. Beijing: Beijing Institute of

Technology Press, 1973.

[4] 连铜淑. 棱镜调整[M]. 北京: 国防工业出版社, 1978: 14-20.
Lian Tongshu. Adjustment of reflecting prisms [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1978: 14-20.

[5] 连铜淑. 棱镜调整(原理和图表)[M]. 北京: 国防工业出版社, 1979.
Lian Tongshu. Adjustment of reflecting prisms (Principle and tabulation) [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1979.

[6] 汤自义, 须耀辉, 王志坚. 反射棱镜[M]. 北京: 国防工业出版社, 1981.
Tang Ziyi, Xu Yaohui, Wang Zhijian. Reflecting prisms [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1981.

[7] 毛文炜. 棱镜调整的矩阵分析[J]. 云光技术, 1981(5): 1-12.
Mao Wenwei. Yunguang Jishu, 1981(5): 1-12.

[8] Pogarev G V. Adjustment of optical instruments [M]. Leningrad: Machine Building Publishing House, 1982: 128-130.

[9] Rudolf K. Optical system design [M]. New York: Academic Press, 1983: 159-160.

[10] 迟泽英, 徐金镛. 应用光学[M]. 南京: 华东工学院, 1984.
Chi Zeying, Xu Jinyong. Applied optics [M]. Nanjing: East-China Engineering Institute, 1984.

[11] 连铜淑. 反射棱镜共轭理论 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1988: 30-34, 100-111.
Lian Tongshu. Theory of conjugation for reflecting prisms [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1988: 30-34, 100-111.

[12] Lian T S. Theory of conjugation for reflecting prisms: Adjustment and image stabilization of optical instruments [M]. Oxford: A Pergamon-CNPIEC Joint Venture, International Academic Publishers, 1991: 105-115.

[13] 迟泽英, 陈文建. 应用光学与光学设计基础[M]. 南京: 东南大学出版社, 2008: 131-168.
Chi Zeying, Chen Wenjian. Applied optics and elements of optical design[M]. Nanjing: Southeast University Press, 2008: 131-168.

[14] 连铜淑. 反射棱镜制造误差的分析与计算 [J]. 科技导报, 2010, 28(9): 68-72.
Lian Tongshu. Science & Technology Review, 2010, 28(9): 68-72.

[15] 连铜淑. 反射棱镜调整法则[J]. 科技导报, 2013, 31(19): 33-38.
Lian Tongshu. Science & Technology Review, 2013, 31(19): 33-38.

(责任编辑 赵业玲)

·学术动态·



第 32 期“科学家与媒体面对面”畅谈“科学家与科普创作”

2013年8月13日,由中国科协科学普及部、调研宣传部主办,主题为“科学家与科普创作”的第32期“科学家与媒体面对面”在上海举办。中国科协书记处书记、党组成员徐延豪主持本次活动。李大潜院士、汤钊猷院士、周忠和院士、方成院士、汪品先院士、欧阳自远院士、褚君浩院士、黄培康院士、吴启迪教授、陈佳洱院士、林群院士、陈凯先院士等著名科学家围绕科普创作是科学家的社会责任、科学家参与科普创作的方式、科学家参与科普创作的困难、搭建科学家进行科普创作的平台等发表真知灼见,诠释科学文化、科普创作、科学传播、科学普及。

在线直播见中国科协网 <http://210.14.113.38:9080/asop/login.asop?titleId=353>。

