

频率域奇异值分解压制随机噪声方法

鲍伟¹, 马继涛²

1. 中石化江苏油田物探技术研究院, 南京 210046
2. 中国石油大学(北京)地球物理与信息工程学院; 油气资源与探测国家重点实验室, 北京 102249

摘要 奇异值分解(SVD)是提高信噪比的一种较新的有效手段之一。本文从数学角度阐述了奇异值分解 SVD 滤波技术增强地震资料信噪比的原理, 对比了时间域和频率域 SVD 技术压制随机噪声的处理效果。结果表明, 时间域 SVD 技术只能对水平或接近水平的同相轴进行信号增强, 对倾斜同相轴的处理效果较差; 而频率域 SVD 技术既可以处理水平同相轴, 也可以处理倾斜同相轴, 对提高地震剖面信噪比具有很好的效果。本文用 3 个简单的合成地震记录和 1 个实际地震资料检验了 SVD 两种方法的应用效果。结果表明, 本文方法可以达到随机噪声压制的效果。

关键词 奇异值分解; 随机噪声; 时间域; 频率域

中图分类号 P631

文献标志码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2013.21.010

Seismic Random Noise Suppression by Using Frequency-domain Singular Value Decomposition

BAO Wei¹, MA Jitao²

1. Geophysical Exploration Institute of Technology, Jiangsu Oilfield, Sinopec, Nanjing 210046, China
2. State Key Laboratory of Petroleum Resource and Prospecting, College of Geophysics and Information Engineering, China University of Petroleum, Beijing 102249, China

Abstract Singular Value Decomposition (SVD) is a new and effective method for random noise suppression. The principle of the SVD filtering technique, which enhances the signal to noise ratio of seismic data, is illustrated. Then, by applying time-domain and frequency-domain SVD techniques to suppress random noise generated from a variety of seismic model data, their processing results are compared with each other. The results indicate that the time-domain SVD technique is only able to enhance flat or near flat events. When encountering dip events, it is less effective. However, the frequency-domain SVD technique is able to enhance both flat and dip events, and improve the signal to noise ratio of seismic profile. Three simple synthetic seismograms and one real seismic data are used, and the practical effects of these two SVD methods are verified. The results show that the frequency-domain SVD is effective for suppressing the random noise.

Keywords SVD; random noise; time-domain; frequency-domain

0 引言

地震勘探中, 提高地震资料信噪比是一个非常重要的问题。奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)作为地震资料处理中提高信噪比的一种较新的有效手段之一, 受到人们越来越多的重视。SVD 技术在地震勘探中已经有了很多应用, 如极化滤波、垂直地震剖面波场分离以及地震信号增强等。SVD 技术利用地震道之间的相关性, 利用 SVD 对地震数

据进行分解后, 信号能量能够更为集中, 从而可以将信号与噪声分离开来。Sergio 等^[1]首先尝试了 SVD 技术在地震中的应用。他在论文中阐述了基于 KL 变换的奇异值分解方法, 并用特征图像滤波观点分离 VSP 波场。高静怀等^[2]详细分析和阐述了 SVD 滤波法的基本原理和用 SVD 重构地震剖面的方法, 给出了用 SVD 分离 VSP 波场的理论模型试验及实际资料处理实例, 指出从图像处理角度看, 奇异值分解法与 KL 变换

收稿日期: 2012-12-14; 修回日期: 2013-03-15

作者简介: 鲍伟, 工程师, 研究方向为地震资料处理和处理方法, 电子信箱: baowei.jsyt@sinopec.com

是相当的。徐伯勋等^[3]做了相似的研究,并将其运用到油田资料实际数据中加以验证。针对 SVD 滤波法仅能提高水平同相轴信噪比、不能有效确定 SVD 滤波参数等问题,陈遵德等^[4]对其做出了一些改进。陆文凯等^[5]同样针对常规的 SVD 滤波器不能有效提高非水平同相轴信噪比的问题,对其做出了一定的改进。吴亚东等^[6]采用多项式拟合的方法检测信号同相轴多项式,然后根据确定的同相轴形状重新选取数据矩阵再进行 SVD 滤波。这种改进使得 SVD 方法对脉冲干扰、侧反射以及其他的反向干扰的压制效果明显。李文杰等^[7]提出了利用 SVD 滤波法衰减地震记录中的直达波和折射波,避免了切除法处理直达波和折射波所造成的大量有用的浅层反射信息的损失。詹毅等^[8]将协方差度量原则加入自动追踪 SVD 压制线性干扰的方法,判断计算样点本身是否存在线性干扰。通过正交多项式变换方法的研究,刘伟等^[9]提出了一种“基于奇异值分解算法的正交多项式变换压制地震资料噪音”的方法,可以有效地分离信号与噪声,减少对振幅的畸变,并增强反射同相轴的连续性。本文在分析了 SVD 用于地震数据去噪的数学原理后,研究了时间域以及频率域 SVD 滤波的应用效果。由于 SVD 技术是基于信号的横向线性相干性,而实际地震同相轴可能倾斜或者弯曲。时间域 SVD 技术在处理非水平同相轴时显得无处着手。鉴于此,本文又研究了频率域 SVD 去噪技术,即 $f-x$ 本征图像去噪技术。频率域 SVD 去噪技术克服了时间域 SVD 技术的局限性,能够有效地处理非水平同相轴的情况。在处理实际资料时,出于对计算成本的考虑,本文对整个地震剖面进行了分窗处理,这样局部地震剖面道与道之间的相干性比整个剖面道与道之间的相干性要好。

本文主要讨论了包括水平同相轴、倾斜同相轴以及水平与倾斜同相轴组合形成的含噪地震模型以及实际含噪地震资料的奇异值分布规律,采用整体及局部时间域及频率域 SVD 滤波技术来达到噪声压制的目的,对含有随机噪音的模型资料以及实际地震资料进行了去噪处理,并将时间域 SVD 滤波、频率域 SVD 滤波方法做了比较,分析了两种方法的局限性以及适用条件。

1 方法原理

自 1873 年 Beltrami 发表第 1 篇 SVD 论文以来^[10],这项理论至今已经有 100 多年的历史,但由于计算量大的限制,该方法并未得到广泛应用。之后随着计算机硬件及数值计算方法的不断进步,SVD 方法的应用才有了可能。1971 年, Golub 等^[11]首先提出了可以在计算机上实现的 SVD 算法。现在,该方法已经广泛应用于统计分析、信号与图像处理以及及时移地震资料处理中^[12]。

1.1 奇异值分解法原理

设一个地震记录道数为 N ,每道的采样点总数为 M ,地震记录用矩阵 X 表示,其元素为 x_{ij} (i 为道号, j 为时间样点号),即

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1M} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NM} \end{bmatrix} \quad (1)$$

由 SVD 理论可以将 X 写为

$$X = UEV^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i U_i V_i^T \quad (2)$$

其中, U 是 XX^T 本征值对应的本征向量 (U_i) 矩阵; V 是 $X^T X$ 的本征值对应的本征向量 (V_i) 矩阵; E 是 XX^T (或者 $X^T X$) 本征值的非负平方根 σ_i (即 X 的奇异值) 按递减顺序组成的对角矩阵,即 $E = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, 其中 $U^T U = I, V^T V = I$, 并有 $V^T = E^{-1} U^T X$ (或 $V_i^T = \frac{1}{\sigma_i} U_i^T X$); r 为 X 的秩。

由于协方差矩阵 XX^T (或 $X^T X$) 的正定性,其本征值总是实的且非负,因而 X 的奇异值总是存在的。另外,本征向量矩阵 U 和 V 都是正交矩阵。所以式 (2) 中的 $U_i V_i^T$ 是一个 $N \times M$ 的矩阵,又是 X 的第 i 个特征图像。第 i 个特征图像对重构 X 的贡献与第 i 个奇异值成正比。因为奇异值总是呈递减顺序排列,所以在 X 的表示中,贡献最大的都包含在最初的几个特征图像中。

当 X 的 N 道地震记录彼此线性无关时,由于 U, V 是正交向量矩阵,故 σ_i 均不为零,所以 X 的完整重构需要所有的特征图像。另一方面,当 X 的 N 道记录都线性相关时,则只有 σ_1 非零,故 X 的完整重构只需要第一特征图像 $\sigma_1 U_1 V_1^T$ 即可。因此,重构 X 所需特征图像的个数依赖于地震记录 X 的道与道之间的线性相关性。相关程度越高,所需个数越少。如果仅用 $p < r$ (X 的秩) 个特征图像就可近似重构 X ,其重构误差为

$$\varepsilon = \sum_{i=p+1}^r \sigma_i^2 \quad (3)$$

根据奇异值的分布范围,可以定义 SVD 成像带通滤波器 X_{BP} 、低通滤波器 X_{LP} 和高通滤波器 X_{HP} ,有

$$X_{LP} = \sum_{i=1}^{p-1} \sigma_i U_i V_i^T = U_{LP} U_{LP}^T X = X V_{LP} V_{LP}^T \quad (4)$$

$$X_{BP} = \sum_{i=p}^q \sigma_i U_i V_i^T = U_{BP} U_{BP}^T X = X V_{BP} V_{BP}^T \quad (5)$$

$$X_{HP} = \sum_{i=q+1}^r \sigma_i U_i V_i^T = U_{HP} U_{HP}^T X = X V_{HP} V_{HP}^T \quad (6)$$

式中, p 和 q 的选择取决于奇异值的相对大小,具体做法是通过特征值 $\lambda_i = \sigma_i^2$ 的曲线来确定。而输入数据道与道之间的相关性则决定了特征值曲线的形状。通过特征值曲线的突变,可以较为容易地确定 p 和 q 。 p 和 q 确定后,即可通过低通、带通和高通 SVD 滤波进行地震数据 VSP 波场分离,随机噪声压制等处理。

1.2 时间域 SVD 去噪

SVD 主要利用相邻道信号在同一时刻的相关性,因此时间域 SVD 处理对水平同相轴的去噪效果较好。图 1(a) 为只

包含一个水平同相轴,且添加了随机噪声的剖面。图 2 为其奇异值分布,可以看出第一个奇异值明显要比其余奇异值大很多

,代表了水平同相轴的信息。只利用此奇异值进行数据重构,得到的信号如图 1(b)所示,图 1(c)为滤除的随机噪声。此结果

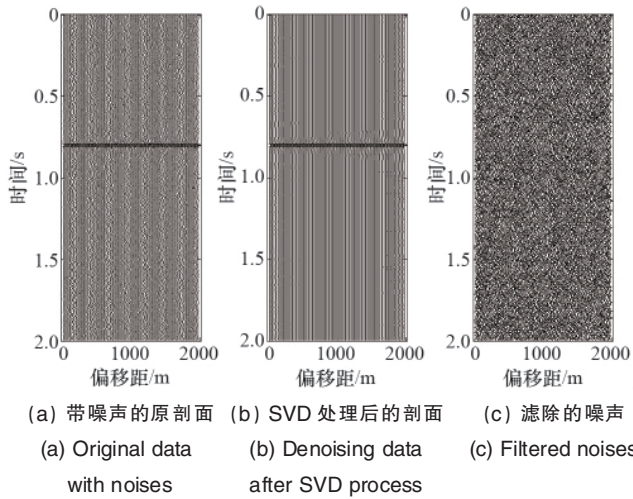


图 1 时间域 SVD 水平同相轴剖面去噪效果

Fig. 1 Denoising effect of flat event profiles using time-domain SVD

表明时间域 SVD 法对水平同相轴剖面的去噪是有效的。

如果对倾斜同相轴的数据进行时间域 SVD 处理(图 3),对其进行奇异值分解后,其奇异值分布如图 4 所示。由图可以看出其分布相对均匀,有效信号和噪声在奇异值的分布上

没有明显的区别。若仍旧使用第一个奇异值对其重构,得到的去噪后的剖面与原剖面相比已面目全非(图 3(b)),显然达不到去除噪声、提高信噪比的目的。图 3(c)为滤除的噪声,很明显包含了同相轴的信息。因此,对于倾斜同相轴,不能直接

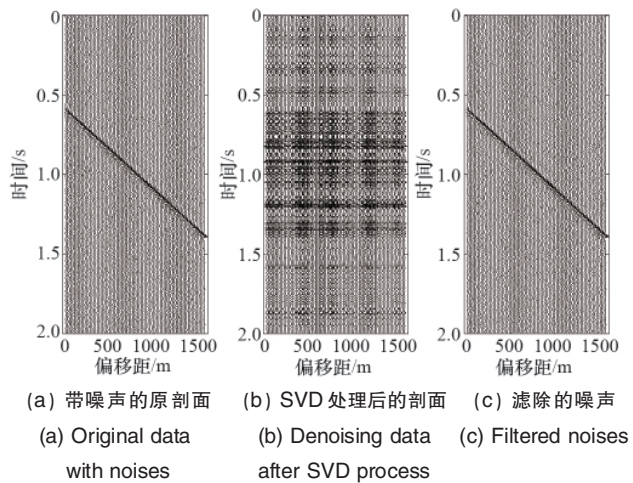


图 3 时间域 SVD 倾斜同相轴剖面去噪效果

Fig. 3 Denoising effect of dip event profiles using time-domain SVD

通过时间域 SVD 法来压制随机噪声。

1.3 频率域 SVD 去噪

将任意斜率的线性同相轴变换到频率域后,在频率切片上是具有相关性的,因此可以在频率域对数据进行 SVD 分解并进行处理,实现对地震资料信号的增强,频率域 SVD 去噪使得 SVD 方法具有更广阔的应用前景。

在频率域 SVD 去噪,首先对地震记录每道作 Fourier 变换,提取某一频率切片(f_1, f_2, \dots, f_n)构建 Hankel 矩阵

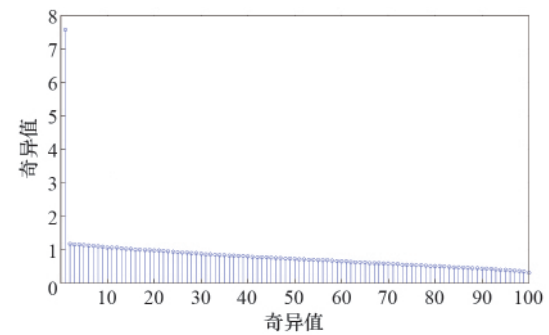


图 2 时间域 SVD 法处理水平同相轴剖面的奇异值分布
Fig. 2 Singular value distribution of flat event profile using time-domain SVD

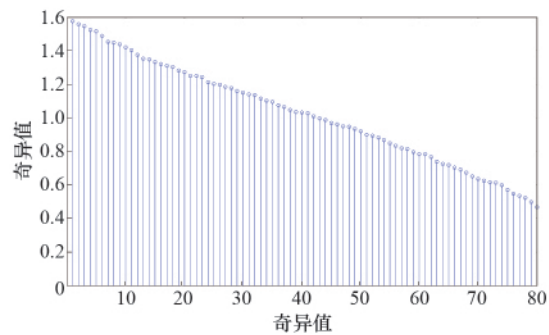


图 4 时间域 SVD 法处理倾斜同相轴剖面的奇异值分布
Fig. 4 Singular value distribution of dip event profile using time-domain SVD

$$H = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-m+1} \\ f_2 & f_3 & \cdots & f_{n-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m & f_{m+1} & \cdots & f_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中,逆对角线上的矩阵元素相同。

假设时间域地震数据用 $f(t, x)$ 表示,该地震数据中具有单一的线性同相轴,其斜率为 p ,则此单一线性同相轴在时间

域上可以表示为

$$f(t, x) = w(t - px) \quad (8)$$

通过傅里叶变换,其在频率域的表达式为

$$F(\omega, x) = W(\omega) e^{-i\omega px} \quad (9)$$

其中, ω 为角频率。

对于规则排列的地震数据,偏移距 $x = n\Delta x$, 令 $\alpha = \omega p \Delta x$, 则式(9)可以表示为

$$F(\omega, n\Delta x) = W(\omega) e^{-i\alpha n} \quad (10)$$

简写为

$$F_n = W e^{-i\alpha n} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

由 F_n 和 F_{n-1} 可以得到信号的一阶差分方程的预测形式

$$F_n = a_1 F_{n-1} \quad a_1 = e^{i\alpha} \quad (12)$$

将 $F_1 \sim F_n$ 代入矩阵 \mathbf{H} 中,显然,此时矩阵 \mathbf{H} 的秩为 1。同理可得,当地震剖面中含 p 个线性同相轴时

$$F_n = a_1 F_{n-1} + a_2 F_{n-2} + \dots + a_p F_{n-p} \quad (13)$$

此时,矩阵 \mathbf{H} 的秩为 p 。因此,可以用前 p 个奇异值对有效信号进行重构,从而压制不相关的随机噪声。

利用上述频率域 SVD 去噪的方法,对图 3 中的倾斜同相轴数据进行频率域 SVD 处理,结果如图 5 所示。选取某个频率切片,其奇异值分解后的奇异值分布如图 6 所示,可以看出,频率域 SVD 分解后,第一个奇异值明显远大于其他奇异值,只选取该奇异值进行数据重构,可以得到去噪后的数据,图 5(b),图 5(c) 为滤除的随机噪声,可以看出,频域 SVD 去噪并没有损害有效信号的能量。

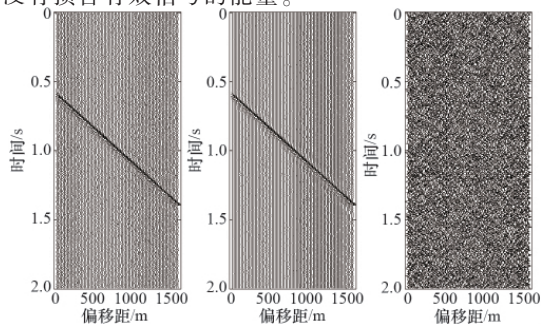


图 5 频率域 SVD 倾斜同相轴剖面去噪效果
Fig. 5 Denoising effect of dip event profiles using frequency-domain SVD

图 5 频率域 SVD 倾斜同相轴剖面去噪效果

图 5 频率域 SVD 倾斜同相轴剖面去噪效果
Fig. 5 Denoising effect of dip event profiles using frequency-domain SVD

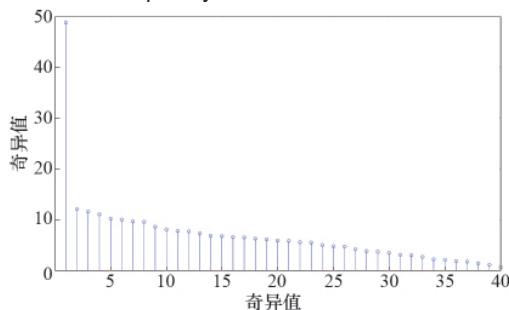


图 6 频率域 SVD 处理倾斜同相轴对应的奇异值分布
Fig. 6 Singular value distribution of dip event profile using frequency-domain SVD

同样对一个含有 4 个线性同相轴的模拟数据进行频率域 SVD 去噪处理,如图 7 所示。由图 8 可以看出,频率域前 4 个奇异值远大于其他的奇异值,因此选取这 4 个奇异值进行数据重构可以压制除噪声。由图 7(c)可以看出,频域 SVD 去噪处理在压制除噪声的同时没有损害有效信号的能量。同时本文还利用时间域奇异值分解对该模型数据作噪声压制处理,只取第一个奇异值进行重构的结果如图 9 所示,可以看

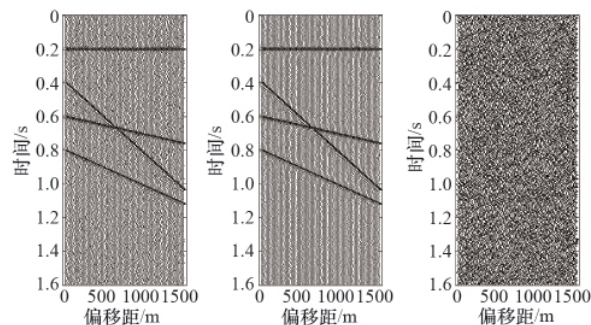


图 7 频率域 SVD 多个倾斜同相轴剖面去噪效果
Fig. 7 Denoising effect of multiple dip event profiles using frequency-domain SVD

图 7 频率域 SVD 多个倾斜同相轴剖面去噪效果

图 7 频率域 SVD 多个倾斜同相轴剖面去噪效果
Fig. 7 Denoising effect of multiple dip event profiles using frequency-domain SVD

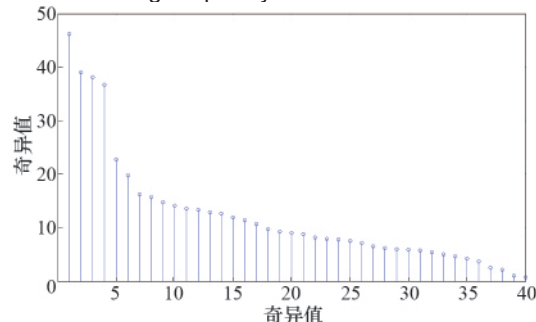


图 8 频率域 SVD 处理多个倾斜同相轴对应的奇异值分布
Fig. 8 Singular value distribution of multiple dip events profile using frequency-domain SVD

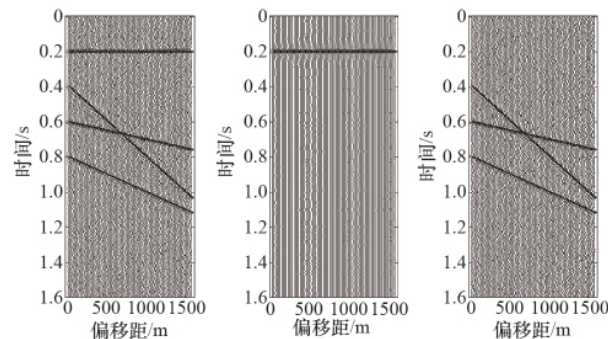


图 9 只取第 1 个奇异值重构时,时间域 SVD 多个倾斜同相轴剖面去噪效果
Fig. 9 Denoising effect of multiple dip event profiles using time-domain SVD with only first singular value

图 9 只取第 1 个奇异值重构时,时间域 SVD 多个倾斜同相轴剖面去噪效果

图 9 只取第 1 个奇异值重构时,时间域 SVD 多个倾斜同相轴剖面去噪效果
Fig. 9 Denoising effect of multiple dip event profiles using time-domain SVD with only first singular value

到此时去噪去除了其余 3 个有效倾斜同相轴,即使取前 10 个奇异值对应的本征图像之和来重构地震剖面,倾斜同相轴也没有完全恢复(图 10),而随机噪音却在恢复倾斜同相轴的同时,得到了很大的恢复。究其原因,是因为倾斜同相轴与随机噪音同时分散在小奇异值上,它们混合在一起,不具有明显的可分性。

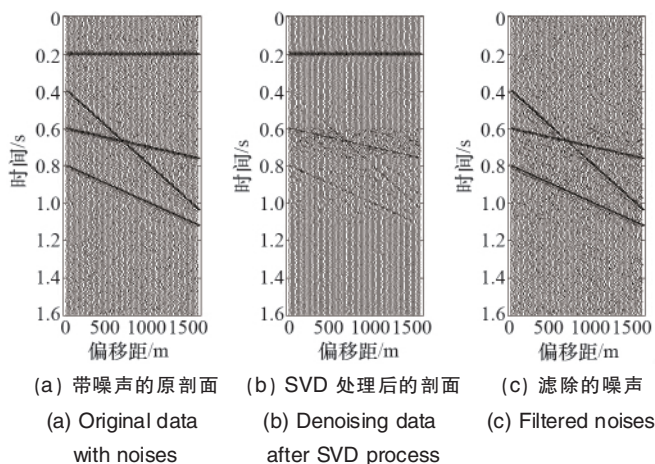


图 10 取前 10 个奇异值重构时,时间域 SVD 多个倾斜同相轴剖面去噪效果

Fig. 10 Denoising effect of multiple dip event profiles using time-domain SVD with the first ten singular values

时间域及频率域 SVD 去噪方法计算效率均比较低,为提高计算效率,同时使算法更好地处理实际数据,可以采用数据分块的方法,将地震剖面划分为较小的数据块,分别处理每一小块数据矩阵,处理完成后再将小数据矩阵组合起来形成最终的滤波剖面。

局部频率域 SVD 压制随机噪声过程可以表述为:

- (1) 对时空域滑动窗口内的地震数据进行 Fourier 变换;
- (2) 提取有效频带内某一频率切片,构成 Hankel 矩阵,调整 m 的值,改变矩阵 H 的维数, H 应尽可能使其为方阵,通常选取 $m=n/2$;

- (3) 对矩阵 H 进行奇异值分解,有

$$H=USV^T$$

对 H 取前 k 个特征图像进行降秩重构,有

$$F_k(H)=I_1+I_2+\dots+I_k \quad I_i=S_iU_iV_i^T$$

- (4) 对有效频带内每一频率切片作如上步骤处理;

(5) 将新的频率数据反 Fourier 变换回时间域,即可得到去除随机噪声的地震记录。

2 实际数据处理示例

使用 SVD 法处理叠后地震剖面,如果针对的是简单剖面,可以直接对其处理。然而实际的地震资料数据量较大,利用 SVD 算法进行处理计算量也非常巨大。常规的 SVD 滤波方法需要在假设有效信号是线性且平稳的前提下进行,但大

窗口的实际地震资料并非如此,因此实际处理时一般采用分窗处理。实质上,分窗处理的作用是使地震资料局部线性化和局部平稳化。一般来说,如果窗口选的过大,这种对应的极限情况是没有加入窗口,这样局部线性化和局部平稳化会受到限制,可能会有很多同相轴并没有接近假设条件;如果窗口选的太小,则很明显会增加运算量。因此,窗口的空间宽度要适中,需要根据实际资料的复杂程度来进行最优化的选择,简单的地震资料空间宽度可选大一点,而复杂的地震资料空间宽度可选小一点。而窗口的时间长度依赖于地震资料地层同相轴走向变化的复杂程度。如果变化不是很复杂,则窗口的时间长度的影响不大,但考虑到计算时间的问题,可考虑较大的时间长度;如果变化较为复杂,则窗口的时间长度应当选择小一些,以保证每个局部窗口里的不同方向同相轴个数尽可能少。

如图 11 所示为一个叠后地震剖面,其时间采样间隔为 2ms,每道样点数为 2500,总道数为 2000。

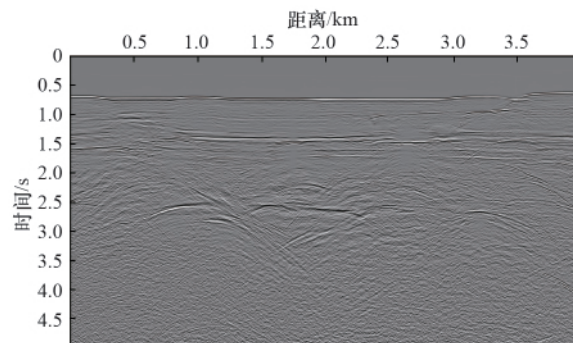


图 11 实际地震数据原始剖面图

Fig. 11 Original profile of real seismic data

图 12 为使用时间域 SVD 处理该剖面的结果,图 13 为差异剖面。可以很直观地看出,时间域 SVD 法对于去除随机噪声具有一定的效果,但是大量的有效信息被作为噪声一并滤除了。这种情况的发生很大程度上源于时间域 SVD 法处理非水平同相轴的无力。很明显,该实际剖面中含有大量的非水平同相轴,不能通过该方法有效地对剖面进行处理。

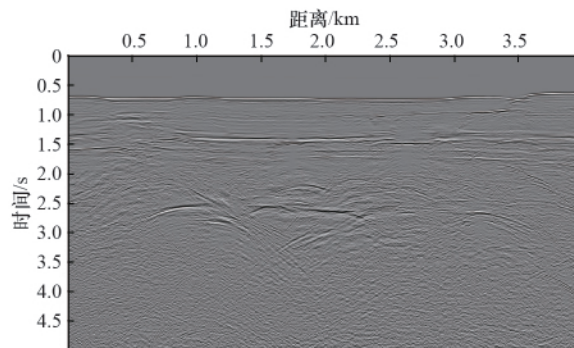


图 12 经过时间域 SVD 滤波处理后的剖面

Fig. 12 Seismic profile after time-domain SVD filtering process

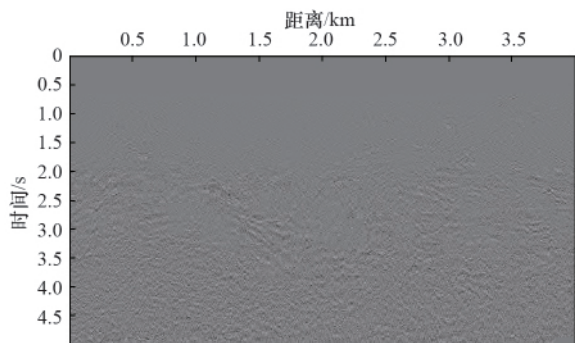


图 13 时间域 SVD 滤除的噪音
Fig. 13 Noises filtered by time-domain SVD

图 14 为使用频率域 SVD 处理该剖面的结果,图 15 为差异剖面。可以很直观地看出,频率域 SVD 法对于去除随机噪声效果与时间域 SVD 法相比好得多。

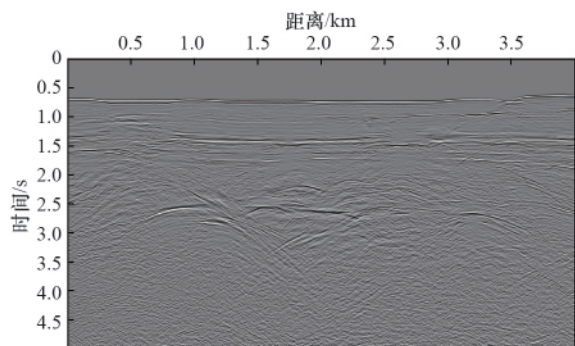


图 14 经过频率域 SVD 滤波处理后的剖面
Fig. 14 Seismic profile after frequency-domain SVD filtering process

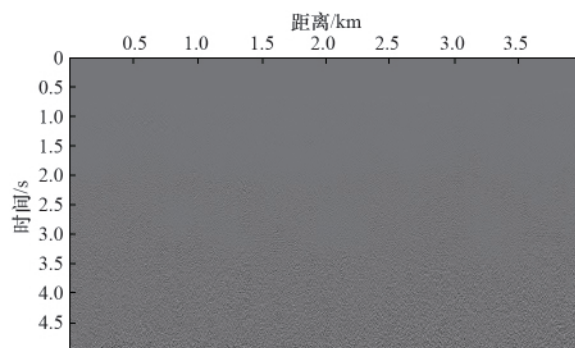


图 15 频率域 SVD 滤除的噪音
Fig. 15 Noises filtered by frequency-domain SVD

3 结论

时间域 SVD 在地震资料处理应用中的保真性饱受质疑,而局部频率域 SVD 在模型和实际资料信号加强处理中的应用则效果颇佳。通过一系列的分析和研究,得到以下结论和建议。

(1) 时间域 SVD 对于水平同相轴信号的加强具有良好的应用效果,但是处理到倾斜同相轴时,直接使用时间域 SVD 技术无法得到预期的处理效果,限制了其在实际资料处理中的应用。

(2) 频率域 SVD 滤波法可以直接用来处理倾斜同相轴,避免了时间域 SVD 去噪技术的弊病,能够在有效压制随机噪声的同时,适应同相轴振幅横向的变化,具有更高的保真性。

(3) 对于较大的数据体,建议对数据进行分窗处理,在一个时间窗口内,可以近似认为有效信号是线性的。

参考文献 (References)

- [1] Sergio L M, Freire S L M, Ulrych T D. Application of singular value decomposition to vertical seismic profiling[J]. Geophysics, 1988, 53(6): 778-785.
- [2] 高静怀,朱光明,王玉贵. 奇异值分解在 VSP 中的应用[J]. 西安地质学院学报, 1992, 14(3): 71-78.
Gao Jinghuai, Zhu Guangming, Wang Yugui. Journal Xi'an College of Geology, 1992, 14(3): 71-78.
- [3] 徐伯勋,白应甫,白旭滨,等. 奇异值分解在垂直地震剖面中的应用[J]. 石油物探, 1993, 32(3): 60-72.
Xu Boxun, Bai Yingfu, Bai Xubin, et al. Geophysical Prospecting for Petroleum, 1993, 32(3): 60-72.
- [4] 陈遵德,段天友,朱广生. SVD 滤波方法的改进与应用[J]. 石油地球物理勘探, 1994, 29(6): 783-792.
Chen Zunde, Duan Tianyou, Zhu Guangsheng. Oil Geophysical Prospecting, 1994, 29(6): 783-792.
- [5] 陆文凯,牟永光. 一种改进的 SVD 滤波器[J]. 石油地球物理勘探, 1996, 31(5): 736-741.
Lu Wenkai, Mou Yongguang. Oil Geophysical Prospecting, 1996, 31(5): 736-741.
- [6] 吴亚东,符溪,文鹏飞,等. 奇异值分解压制随机噪声的方法及应用[J]. 新疆石油地质, 2003, 24(2): 144-145.
Wu Yadong, Fu Xi, Wen Pengfei, et al. Xinjiang Petroleum Geology, 2003, 24(2): 144-145.
- [7] 李文杰,魏修成,刘洋,等. SVD 滤波法在直达波和折射波衰减处理中的应用[J]. 石油勘探与开发, 2004, 31(5): 71-73.
Li Wenjie, Wei Xiucheng, Liu Yang, et al. Petroleum Exploration and Development, 2004, 31(5): 71-73.
- [8] 詹毅,赵波. 自动追踪 SVD 压制线性干扰方法的改进[J]. 石油地球物理勘探, 2008, 43(2): 158-160.
Zhan Yi, Zhao Bo. Oil Geophysical Prospecting, 2008, 43(2): 158-160.
- [9] 刘伟,杨凯,王征,等. 基于 SVD 的正交多项式变换及其在地震资料处理中的应用[J]. 工程地球物理学报, 2010, 7(4): 433-437.
Liu Wei, Yang Kai, Wang Zheng, et al. Chinese Journal of Engineering Geophysics, 2010, 7(4): 433-437.
- [10] Beltrami E. Sulle funzioni bilineari [J]. Giornale di Matematiche, 1873, 11: 98-106.
- [11] Golub G H, Reinsch C. Handbook for automatic computation II, linear algebra[M]. New York: Springer-Verlag, 1971: 439-457.
- [12] 金龙,陈小宏,刘其成. 基于奇异值分解的时移地震互均衡方法[J]. 地球物理学进展, 2005, 20(2): 294-297.
Jin Long, Chen Xiaohong, Liu Qicheng. Progress in Geophysics, 2005, 20(2): 294-297.

(责任编辑 刘志远)