

球体斜面运动 DEM 对比分析

闫民, 戚超

北京林业大学工学院, 北京 100083

摘要 在已有研究基础上, 提出了一个全新的研究物体动力学方法。以球体在 45° 斜面上运动为例, 在推导理论公式、建立理论模型、得出理论速度-时间关系和位移-时间关系曲线后, 运用散体单元法理论 (DEM), 通过 Borland C++ Builder 6.0 平台开发建立了可视化球体-斜面动力学模型。模拟计算不但获得了球体在滑动运动、滑滚运动、纯滚动运动条件下的速度-时间关系和位移-时间关系曲线, 还清晰地观察到球体在斜面上的运动状态。将模拟计算得到的曲线与理论速度-时间关系和位移-时间关系曲线进行比较, 结果显示, DEM 计算结果与理论计算结果完全一致, 说明运用 DEM 理论研究球体斜面运动是完全可行性的。

关键词 散体单元法; 球体-斜面动力学模型; 速度-时间曲线; 位移-时间曲线

中图分类号 O242.26

文献标志码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2013.21.004

DEM Contrastive Analysis of Spherical Motion in Inclined Plane

YAN Min, QI Chao

School of Technology, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China

Abstract Based on previous research, an innovative method to investigate object dynamics is suggested. Concerning DEM itself, it can precisely simulate the interaction among discrete spheres. DEM is a powerful tool in simulation and calculation. One sphere is kinetic in an inclined plane with 45° . After reasoning theoretical formula and establishing theoretical model by which theoretical relations between velocity-time and displacement-time are acquired respectively, DEM is employed and visual sphere-inclined plane is archived in the platform of Borland C++ 6.0, then, the theoretical formula is deduced. and the theoretical curves are drawn. Also, critical coefficient of friction will be determined when sphere is purely rolling in an inclined plane. The relationship of velocity-time and displacement-time will be achieved respectively when sphere moves on pure displacement condition, sliding and rolling condition, and purely rolling condition, then their relational curves are drawn. These curves are compared to theoretical curves of the relationship between velocity-time, and the relationship between displacement-time. It is concluded that computed results and theoretical results are consistent. Therefore, it is verified that theory of DEM is available.

Keywords discrete element method; sphere-slope dynamics model; velocity-time curve; displacement-time curve

0 引言

散体单元法^[1](Discrete Element Method, DEM) 又称离散单元法, 是研究不连续体力学行为的一种数值方法。

散体单元法的基本假设: 在散体单元法分析建模时, 系统被视为非连续离散介质。这个系统中每一个离散介质构成一个计算单元, 在各个计算步骤中认为单元为理想刚体, 各个单元只是空间位置的平移或转动, 而其本身的形状和大小不变。根据单元之间的相互作用, 它们在空间有固定的位置, 处于平衡状态。

散体单元法计算的基本原理: 当所考虑系统的作用力系

或边界约束条件发生变化时, 某些单元在重力及外力的作用下产生一定加速度及相应位移, 使单元的空间状态发生变化。位移后的单元与所接触的单元产生“叠合”, 根据力-位移关系, 产生新的作用力系状态。之后会有更多的单元由于作用力的传递产生运动和位移^[2-4]。在迭代计算过程中, 各个时步的计算结果模拟了各个单元位移和转动的全部过程。

在动力学中, 常需要研究摩擦力对放在斜面上的球体运动的影响, 很多学者已经对此问题进行了详细的研究和说明, 但是研究方法比较固定, 在计算机技术快速发展的今天, 采用更为快速简便的研究方法研究这类问题变得越来越重

收稿日期: 2013-01-28; 修回日期: 2013-03-26

基金项目: 国家自然科学基金项目(11272061, 10572027)

作者简介: 闫民, 副教授, 研究方向为车辆工程、机械动力学和散体力学, 电子信箱: hoffmen@gmail.com; 戚超(共同第一作者), 硕士研究生, 研究方向为车辆工程, 电子信箱: qingchuan1986@126.com

要。就 DEM 本身而言,它可以细致地模拟各散体单元间的相互作用,是仿真计算的有力工具^[5]。但目前还未发现有学者使用 DEM 方法研究球体在斜面上运动的动力学问题。本文以球体在 45°斜面运动为研究对象进行 DEM 模拟计算和对比研究,得出球体在不同粗糙度的斜面上运动时的速度-时间曲线、位移-时间曲线,通过与速度-时间、位移-时间的理论曲线进行对比分析,在验证 DEM 方法研究球体斜面运动可行性的同时,为研究此类问题提供了一种全新的方法。

1 球体-斜面理论建模

1.1 理论公式

球体在与水平夹角为 α 的斜面上运动,受力如图 1 所示。球体沿斜面方向的运动方程为

$$m \frac{dv}{dt} = mgs\sin\alpha - F_s \quad (1)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = F_s r \quad (2)$$

式中, v 为球体沿斜面的运动速度, m/s; F_s 为摩擦力, 非纯滚动时 $F_s = F_n \cdot \mu$, 其中 F_n 为斜面对球体的支撑力, N, μ 为摩擦系数; I 为球体的转动惯量, $\text{kg} \cdot \text{m}^2$; ω 为球体的转速, rad/s; t 为时间, s; r 为球体半径, m。

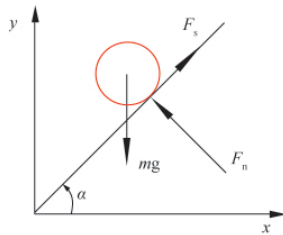


图 1 球体在斜面上的受力示意
Fig. 1 Stress map of sphere in slope

由式(1)和式(2)推导得

$$dv = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)dt \quad d\omega = \frac{mgr}{I} \cdot \mu\cos\alpha dt \quad (3)$$

由式(3)积分得

$$v = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t \quad \omega = \frac{mgr}{I} \cdot \mu\cos\alpha \cdot t \quad (4)$$

设其运动距离为 s , 则

$$s = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2 \quad (5)$$

1.2 纯滚动临界摩擦系数确定

球体在斜面上做纯滚动时满足 $v = \omega r$, 由式(4)推导得

$$\mu = \frac{2}{7} \tan\alpha \quad (6)$$

本文中斜面与水平面夹角 $\alpha = 45^\circ$, 则球体做纯滚动的临界值 $\mu = 0.286$ 。当摩擦系数大于此临界值时,球体在斜面上做纯滚动运动。

1.3 纯滚动时静摩擦力确定

设球体质心加速度 $a_0 = dv/dt$, 角加速度 $a_1 = d\omega/dt$ 。若球体在斜面上做纯滚动, 则 $a_1 r = a_0$ 。由式(1)和式(2)得

$$F_s = \frac{2}{5} m a_0 \quad (7)$$

代入式(1)得

$$a_0 = \frac{5}{7} g \sin\alpha \quad (8)$$

所以,球体在斜面上纯滚动的静摩擦力为

$$F_s = \frac{2}{7} m g \sin\alpha \quad (9)$$

1.4 理论曲线

本文以球体在倾斜角 $\alpha = 45^\circ$ 的斜面上运动为理论条件, 理论公式如下:

(1) 当斜面 $\mu = 0$ 时,球体纯滑动,由式(4)和式(5)得

$$v = g \sin\alpha \cdot t \quad s = 0.5 g \sin\alpha \cdot t^2 \quad (10)$$

(2) 当斜面 $\mu = 0.15$ 时,球体滑滚,由式(4)和式(5)得

$$v = g(\sin\alpha - 0.15 \cdot \cos\alpha)t \quad s = 0.5g(\sin\alpha - 0.15 \cdot \cos\alpha)t^2 \quad (11)$$

(3) 当斜面 $\mu = 0.3$ 时,球体纯滚动,由式(1)和式(9)得

$$v = \frac{5}{7} g \sin\alpha \cdot t \quad s = \frac{5}{14} g \sin\alpha \cdot t^2 \quad (12)$$

由理论公式得到球体在斜面运动时的速度-时间曲线、位移-时间曲线,如图 2 所示。

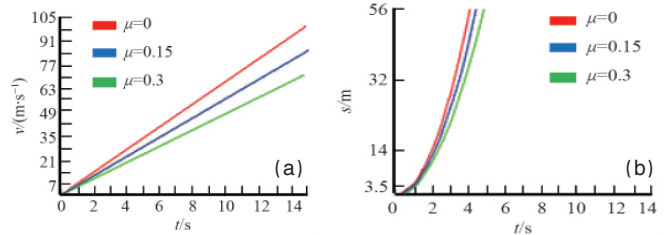


图 2 理论速度-时间曲线(a)和理论位移-时间曲线(b)
Fig. 2 Theoretical velocity-time curve (a) and displacement-time curve (b)

2 球体-斜面 DEM 建模

2.1 DEM 模型的本构关系

DEM 模型的受力分析如图 3(a)所示,其球体与斜面接触处的法向力 F_n 、切向力 F_s 可由散体单元法的本构关系求出,其散体单元法的本构关系^[6]如图 3(b)所示,单元之间的接触关系由一对法向和切向弹簧阻尼器及一个切向摩擦器组成, k_n, k_s 分别为法向和切向弹簧刚度系数, c_n, c_s 分别为法向和切向阻尼系数, μ 为摩擦系数,其计算公式表示为

$$F_n = k_n \cdot s_n \quad (13)$$

$$F_s^{\text{new}} = \begin{cases} F_s^{\text{old}} + k_s v_s \Delta t & F_s < F_n \mu \\ F_n \mu \text{sign}(F_s) & F_s \geq F_n \mu \end{cases} \quad (14)$$

式中, F_s, F_n 为 DEM 计算中的法向力和切向力, 其中 $F_s^{\text{new}}, F_s^{\text{old}}$ 分别为本计算时步的切向力和上一计算时步记录下的切向

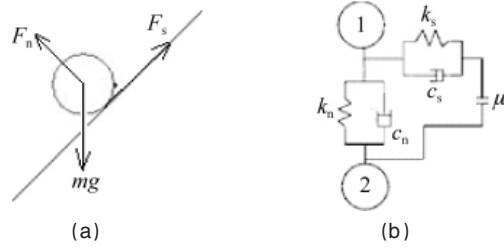


图3 DEM模型的受力分析(a)及DEM本构关系(b)
Fig. 3 Stress map of DEM model (a) and constitutive relationship of DEM (b)

力, N ; k_n, k_s 为法向刚度系数和切向刚度系数; v_s 为 DEM 计算中相对切向速度, m/s ; s_n 为法向叠合量, m ; Δt 为计算时步, s 。

单元和单元之间的切向力计算遵循库仑定律, 当切向力达到静摩擦极值时, 取 $F_s = F_n \mu \text{sign}(F_s)$,

2.2 DEM 模型的运动方程

颗粒总是产生于一定边界中, 当颗粒单元欲越边界时, 必然受到边界力的约束作用^[9]。颗粒单元与边界之间的作用如图 3 所示, 其处理方法与颗粒单元之间的相互作用的处理方法类似。本文散体单元法构造的模型可分为两个单元, 即球体单元和地面单元, 此时地面单元为曲率半径无穷大的球。

在球体单元与地面系统模型中, 根据本构关系求出球体-斜面 DEM 的基本运动方程为

$$m\ddot{x}_i + c_i \dot{x}_i + k_i x_i = F_i \quad i=n, s \quad (15)$$

$$I_i \ddot{\theta}_i + \sum_{j=1}^2 (k_j x_j + c_j \dot{x}_j) S_j = M_i \quad i=n, s \quad (16)$$

式中, x_i 为被研究球体单元的位移, m ; \dot{x}_i 为速度, m/s ; \ddot{x}_i 为加速度, m/s^2 ; F_i 为外力, M_i 为外力矩, $N \cdot m$, 下标 $i=n, s$ 为相互垂直的法向轴和切向轴; S_j 为接触点到回转中心的距离分量。上述 2 个方程是下述 2 阶非线性微分方程的特殊情况, 其中 F (x, \dot{x}) 为球体单元的碰撞力作用。

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = \frac{1}{m} F(x, \dot{x}) \quad (17)$$

方程(17)可由有限差分法积分求解

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}(t+\Delta t) - \dot{x}(t)}{\Delta t} \quad \dot{x} = \frac{\dot{x}(t+\Delta t) + \dot{x}(t)}{2} \quad (18)$$

将方程(18)代入方程(17)就可得到 t 到 $t+\Delta t$ 区间对速度可解的简单方程。对速度积分即可求得位移

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \dot{x}(t+\Delta t)\Delta t \quad (19)$$

用类似方法可求得球体单元的角速度和角位移。这样球体单元的位置就被确定, 并且给出球体单元在研究空间内随时间变化的演变过程。

3 DEM 模拟计算结果及比较分析

模拟计算以球体在粗糙程度不同的斜面上运动为条件, 即斜面摩擦系数 μ 取值不同。根据 μ 值的不同, 球体的运动

形式可分为滑动运动、滑滚运动、纯滚动运动。在 DEM 计算程序中, 以球上的小黑点为标志, 观察分析其运动形式。

计算曲线是通过 DEM 球体-斜面程序计算的速度和位移, 并根据程序运行时间得到每一计算时步的点 (t, v) 和 (t, s) , 根据各点得到模拟计算的曲线, 并分别显示为黑色。

3.1 摩擦系数 $\mu=0$

当 $\mu=0$ 时, 球在斜面上的运动为滑动, 其运动形式和模拟计算曲线分别如图 4、图 5 所示。由图 4、图 5 可以看出, 当 $\mu=0$ 时, DEM 速度-时间曲线、位移-时间曲线与理论滑动时的速度-时间曲线、位移-时间曲线吻合。此时球体在斜面上并没有发生滚动而是沿斜面滑下, 这是因为当球体在光滑斜面上运动时, 由于没有摩擦力, 所以没有能使球体滚动的力矩存在, 球体沿斜面滑下。摩擦力为 0 故没有功率损失, 且球体不会转动, 所以计算曲线与其理论曲线吻合。

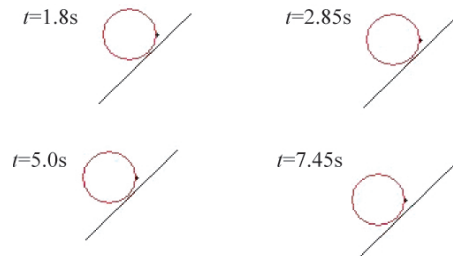


图4 $\mu=0$ 时球体在斜面上的下滑运动
Fig. 4 Spherically sliding down motion when $\mu=0$

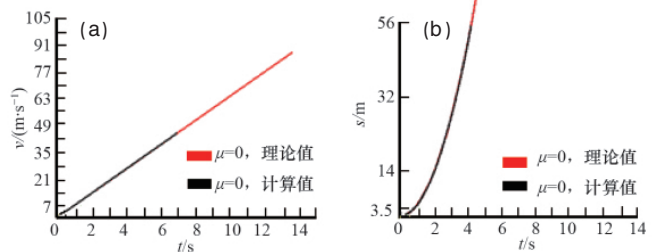


图5 $\mu=0$ 时速度-时间(a)和位移-时间(b)的计算与理论曲线比较

Fig. 5 Comparison computed curve to theoretical curve of velocity-time (a) and displacement-time (b) when $\mu=0$

3.2 摩擦系数 $\mu=0.15$

当 $\mu=0.15$ 时, 球在斜面上做滑滚运动, 其运动形式和模拟计算曲线分别如图 6、图 7 所示。由图 6、图 7 可以看出, $\mu=0.15$ 时, DEM 速度-时间曲线、位移-时间曲线与理论速度-时间曲线、位移-时间曲线吻合, 但由式(11)可得, 其理论曲线斜率比在 $\mu=0$ 时的理论曲线的斜率减少 0.15 倍。此时球体在滚动的同时还沿斜面滑动, 这是因为球体和斜面接触处产生相对滑动速度, 由于摩擦力的存在, 球体要消耗掉部分功率, 所以球体质心速度变小, 位移减少, 其计算曲线和理论曲线

在 $\mu=0$ 时理论曲线的下方,如图2所示。

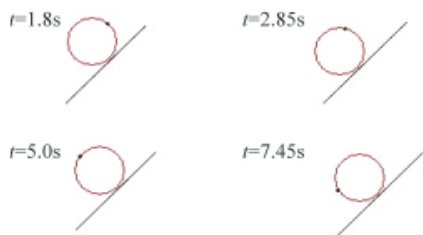


图6 $\mu=0.15$ 时球体在斜面上的滑滚运动

Fig. 6 Spherically sliding and rolling motion when $\mu=0.15$

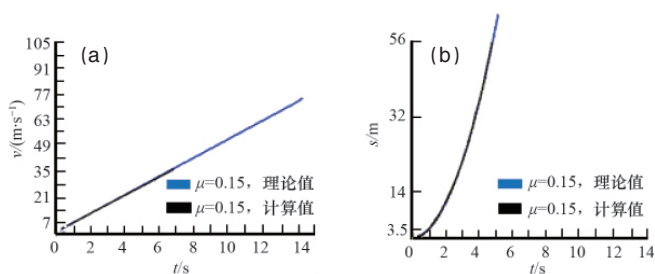


图7 $\mu=0.15$ 时速度-时间(a)和位移-时间(b)的计算与理论曲线比较

Fig. 7 Comparison computed curve to theoretical curve of velocity-time (a) and displacement-time (b) when $\mu=0.15$

3.3 摩擦系数 $\mu=0.3$

当 $\mu=0.3$ 时,球在斜面上的运动为纯滚动,其运动形式和模拟计算曲线分别如图8、图9所示。由图8、图9可以看出,

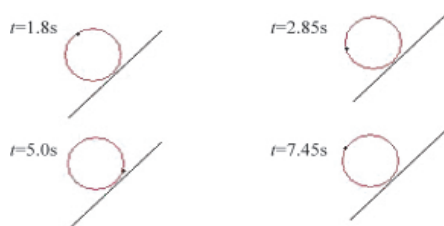


图8 $\mu=0.3$ 时球体在斜面上的纯滚动运动

Fig. 8 Spherically purely sliding motion when $\mu=0.3$

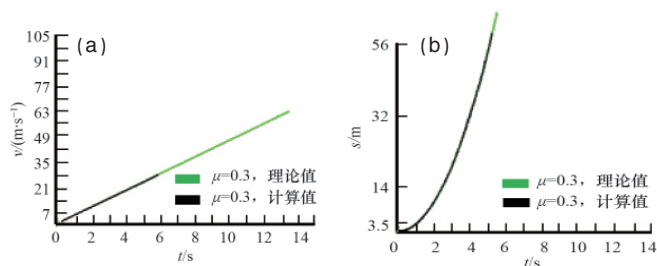


图9 $\mu=0.3$ 时速度-时间(a)和位移-时间(b)的计算与理论曲线比较

Fig. 9 Comparison computed curve to theoretical curve of velocity-time (a) and displacement-time (b) when $\mu=0.3$

当 $\mu=0.3$ 时,其DEM速度-时间曲线、位移-时间曲线与理论速度-时间曲线、位移-时间曲线吻合,但是由式(12)得,其理论曲线斜率比 $\mu=0$ 时理论曲线斜率减少 $2/7$ 倍。此时球体所受摩擦力为静摩擦力^[8],静摩擦力的存在保证了纯滚动的实现,但又减小了球体质心运动的加速度,其质心加速度可由式(8)得到。这是因为静摩擦力矩的作用使球体产生角加速度,静摩擦力矩消耗功率从而使球体具有转动动能,所以球体的质心加速度减少,故其理论曲线和计算曲线在 $\mu=0$ 和 $\mu=0.15$ 时理论曲线的下方,如图2所示。

4 结论

本文在已有研究基础上,从一个全新的角度对球体在斜面上的运动问题进行了比较全面的分析。以球体在 45° 斜面运动为研究对象进行DEM与理论计算的比较研究。分析了球体在光滑斜面, $\mu=0.15$ 的斜面和 $\mu=0.3$ 的斜面上滑动,滑滚,纯滚动的原因,得到的DEM计算曲线与理论曲线完全一致,不仅说明了DEM方法研究球体斜面运动的可行性和正确性,还提供了研究此类问题的一个新方法,对研究动力学问题具有一定的参考价值。

参考文献 (References)

- [1] Cundall P A. A computer model for simulating progressive large scale moments in blocky rock systems [C]//Proceedings of the International Symposium on Rock Fracture, Lisboa: International Society for Rock Mechanics, 1971, 1: II8-II12.
- [2] 方俊. 车辆-地面系统散体动力学模型研究[D]. 北京: 北京林业大学, 2008: 69-72.
Fang Jun. Research of the discrete granule dynamics model of type-ground system[D]. Beijing: Beijing Forestry University, 2008: 69-72.
- [3] 魏群. 岩土工程中散体元的基本原理数值方法及实验研究[D]. 北京: 清华大学, 1990: 9-24.
Wei Qun. Basic principle and numerical method and experimental research about discrete element in geotechnical engineering[D]. Beijing: Tsinghua University, 1990: 9-24.
- [4] 徐泳, 孙其诚, 张凌, 等. 颗粒离散元法研究进展[J]. 力学进展, 2003, 33(2): 251-260.
Xu Yong, Sun Qicheng, Zhang Ling, et al. Advances in Mechanics, 2003, 33(2): 251-260.
- [5] 李伟. 冲击减振理论的离散单元法研究及应用[D]. 西安: 西安交通大学, 1997: 11-12.
Li Wei. Research and application of theory of impact damping using DEM[D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 1997: 11-12.
- [6] Yan Min. Granule hydrodynamics method: A discrete element method on fluid motions [J]. The International Journal of Computational Methods, 2012, 9(1): 8-9.
- [7] 方俊, 闫民, 许立峰. 颗粒轮胎与颗粒地面模型[J]. 科技导报, 2007, 25(24): 69-72.
Fang Jun, Yan Min, Xu Lifeng. Science & Technology Review, 2007, 25(24): 69-72.
- [8] 陈淑芳. 刚体做纯滚动的摩擦力[J]. 青海师专学报, 1987, 20(4): 95-98.
Chen Shufang. Journal of Qinghai Junior Teachers' College, 1987, 20(4): 95-98.

(责任编辑 朱宇, 马宇红)