反射棱镜调整法则

连铜淑

北京理工大学光电学院,北京 100081

摘要　利用反射棱镜特征矩阵 $S_{T,2\varphi}$ 可作为"角矢量传递矩阵"的新意,对反射棱镜调整理论中分别与棱镜微量转动 $\Delta\theta P$ 和棱镜微量移动 ΔgD 相对应的两条法则的定义,甚至是法则本身的名称,进行更加深入的探讨,以求得完全透彻地掌握棱镜调整的内在规律,从而提升了两条法则的科学性和逻辑性。

关键词　反射棱镜;调整;成像;像偏转;像移动;光轴偏;像倾斜

中图分类号　O439, TH74　**文献标志码**　A　**doi**　10.3981/j.issn.1000-7857.2013.19.004

Rule of Adjustment for Reflecting Prisms

LIAN Tongshu

School of Optoelectronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract　This paper is devoted to introducing refinement into the theory of adjustment for reflecting prisms based on the fact that the characteristic matrix $S_{T,2\varphi}$ of a reflecting prism could also be regarded as a transmission matrix in case the input to the prism is an angular vector. Thanks to this new conception, the two rules, related respectively to a small angular displacement $\Delta\theta P$ and a small linear displacement ΔgD of a reflecting prism have significantly been rewritten in terms of the definition of the rules and even the title of themselves. Thus, the theory of adjustment for reflecting prisms will come up to quite a high level in scientific and logical sense.

Keywords　reflecting prism; adjustment; image formation; image rotation; image displacement; optical axis deviation; image lean

0　引言

传统上,反射棱镜方向共轭的基本方程为

$$A'=RA \tag{1}$$

式中,R 为棱镜作用矩阵,A 和 A' 为共轭物、像体的方向(单位)矢量。

1972 年唐家范提出:

$$A'=(-1)^t S_{T,2\varphi}A \tag{2}$$

式中,单位矢量 T 和 2φ 分别为棱镜的特征方向和特征角;t 为棱镜的反射面总数或称反射次数;$S_{T,2\varphi}$ 代表绕特征方向 T 转了特征角 2φ 的转动矩阵,取名棱镜特征矩阵。

由式(1)和式(2),有

$$R=(-1)^t S_{T,2\varphi} \tag{3}$$

式(3)表明了作用矩阵和特征矩阵的一种共性,即二者以不同的方式反映了棱镜方向共轭的功效,只是后一种方式显得更加形象化。如对单平面镜而言,t=1;T=N;2φ=180°,式(2)变成

$$A'=(-1)^1 S_{N,180°}A=S_{N,180°}(-A) \tag{4}$$

由此可见,将任一输入的物矢量 A,先调转一个方向变成其反矢量 $(-A)$,然后再绕平面镜的法线单位矢量 N 转动 180°,便可求得相应的像矢量 A',如图 1 所示。

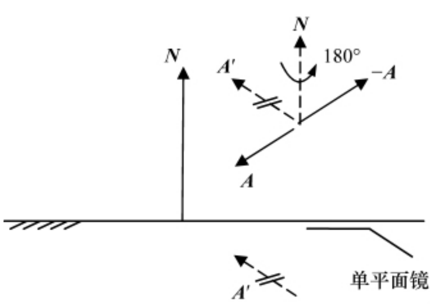


图 1　单平面镜成像

Fig. 1　Image formation of a single plane mirror

1　角矢量传递矩阵

1.1　角矢量

在棱镜调整中,微量转动矢量 $\Delta\theta$ 或 $\Delta\theta P$ 是一个非常重

收稿日期:2013-03-28;修回日期:2013-04-28

作者简介:连铜淑,教授,研究方向为反射棱镜共轭理论,电子信箱:lts3006083680@sina.com

要的概念,图 2 给出了一个按照右螺旋规则表达的微量转动矢量。

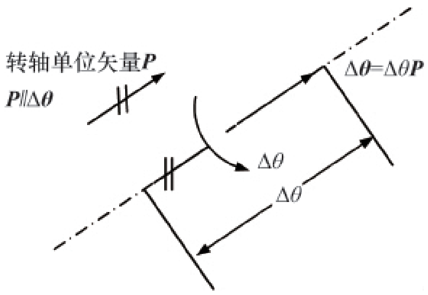


图 2　按右螺旋规则的微量转动矢量$\Delta\boldsymbol{\theta}$

Fig. 2　Diagram of a vector of small rotation $\Delta\boldsymbol{\theta}$ according to the right screw rule

有必要特别地指出,大转动矢量的概念是不存在的,换句话说,如果 θ 代表任意大小的转角,那么 $\theta\boldsymbol{P}$ 这样的符号不但没有任何实质性的意义,而且会铸成大错。

为了以下讨论的方便,此类代表微量转动的矢量统称为角矢量,以区别于普通的线矢量。

1.2　角矢量通过反射棱镜的传递

线矢量有固定的物体方向矢量 $\boldsymbol{A}$ 和运动的微量移动矢量 $\boldsymbol{g}$(或 $g\boldsymbol{D}$)。反射棱镜对固定矢量的作用叫做成像,而对运动矢量的作用称为传递。可以看出,反射棱镜对线矢量的成像或是传递是没有差异的,换句话说,对线矢量而言,棱镜的作用矩阵 $\boldsymbol{R}$ 同时具有成像与传递作用。例如:

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}$$

$$g\boldsymbol{D}'=\boldsymbol{R}g\boldsymbol{D}=g\boldsymbol{R}\boldsymbol{D} \tag{5}$$

所以,在线矢量的情形 $\boldsymbol{R}$ 既是成像矩阵,也是传递矩阵。

现在回到本小节的正题上。见图 3,设 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 或 $\Delta\theta\boldsymbol{P}$ 代表单平面镜物空间一物体绕其物轴 $\boldsymbol{P}$ 转动 $\Delta\theta$ 的微量转动矢量,它们通过平面镜成像且在其像空间呈现的相应部分为像体、像轴 $\boldsymbol{P}'$ 和($-\Delta\theta$)。其中,

$$\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{R}\boldsymbol{P} \tag{6}$$

而($-\Delta\theta$)中的负号是镜像效应所致。这表明,单平面镜的成像使物空间中的右螺旋转动变换成像空间内的左螺旋转动(不限于微量转动)。此种现象也存在于所有的奇次反射棱镜之中。

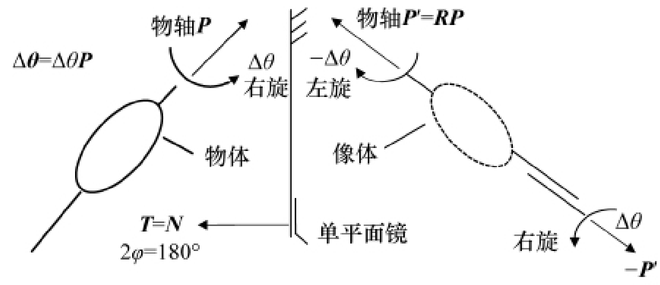
由于负值的转角($-\Delta\theta$)与像轴 $\boldsymbol{P}'$ 呈现为左螺旋的关系,不符合右螺旋规则。因此,像体微量转动矢量的方向并非像轴矢量 $\boldsymbol{P}'$,而应是其反向矢量($-\boldsymbol{P}'$)。设 $\Delta\boldsymbol{\theta}'$ 代表所求的像体微量转动矢量,

$$\Delta\boldsymbol{\theta}'=\Delta\theta(-\boldsymbol{P}') \tag{7}$$

将式(6)、(3)代入式(7),并考虑式(7)中的负号(-1)在一般的情况下应由$(-1)^t$所取代,得:

$$\Delta\boldsymbol{\theta}'=\Delta\theta(-1)^t(-1)^t\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}\boldsymbol{P}=(-1)^{2t}\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}\Delta\theta\boldsymbol{P}$$

又由于$(-1)^{2t}=1$;$\Delta\theta\boldsymbol{P}=\Delta\boldsymbol{\theta}$,最终有



$$\Delta\boldsymbol{\theta}'=(-\Delta\theta)\boldsymbol{P}'=\Delta\theta(-\boldsymbol{P}')$$

图 3　单平面镜角矢量传递

Fig. 3　Transmission of angular vectors through a plane mirror

$$\Delta\boldsymbol{\theta}'=\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}\Delta\boldsymbol{\theta} \tag{8}$$

式(8)赋予 $\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}$ 以"角矢量传递矩阵"的新意。于是 $\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 之间又多了一层新的关系:反射棱镜的特征矩阵 $\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}$ 和作用矩阵 $\boldsymbol{R}$ 分别呈现为角矢量和线矢量的传递矩阵。

上述推导表明,简单的推导却引出了重要的概念。

式(8)中所采用的符号 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 和 $\Delta\boldsymbol{\theta}'$ 容易引起误解,即错把二者理解为成像的关系,为此在下文中将在代表角矢量的符号字母之上添加一尖角符,如$\widehat{\Delta\boldsymbol{\theta}}$、$\widehat{\Delta\boldsymbol{\theta}}'$以及$\hat{\boldsymbol{i}}$、$\hat{\boldsymbol{j}}$、$\hat{\boldsymbol{k}}$、$\hat{\boldsymbol{i}}'$、$\hat{\boldsymbol{j}}'$、$\hat{\boldsymbol{k}}'$,等等。

2　余弦律与差向量法则 1 的构建

2.1　像偏转

定义　在物体不动的条件下,由反射棱镜的微量转动$\Delta\theta\hat{\boldsymbol{P}}$所造成像体在方向上的微量变化称为像偏转。

以下用角矢量 $\widehat{\Delta\boldsymbol{\mu}}'$代表像偏转。根据刚体运动学的原理,利用文献[2]中提出的两步法及角矢量传递矩阵 $\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}$,可立即写出像偏转 $\widehat{\Delta\boldsymbol{\mu}}'$的表达式:

$$\widehat{\Delta\boldsymbol{\mu}}'=\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}(-\Delta\theta\hat{\boldsymbol{P}})+\Delta\theta\hat{\boldsymbol{P}} \tag{9}$$

合并后,得:

$$\widehat{\Delta\boldsymbol{\mu}}'=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{S}_{T,2\varphi})\Delta\theta\hat{\boldsymbol{P}} \tag{10}$$

式中,$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。

式(9)右方加号"+"的两侧代表两步法的 2 个步骤。由于在第 1 个步骤里有两个运算环节,所以两步法实际上包含有 3 个环节。

关于 2 步骤和 3 环节的详细诠释请参见表 1。

简单地说,首末的 2 次运算($-\Delta\theta\hat{\boldsymbol{P}}$)和($+\Delta\theta\hat{\boldsymbol{P}}$)分别代表由定坐标向动坐标和由动作标返回定坐标的坐标转换,而中间的运算"$\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}$ 左乘($-\Delta\theta\hat{\boldsymbol{P}}$)"则代表反射棱镜对输入的物方角矢量($-\Delta\theta\hat{\boldsymbol{P}}$)的传递作用。可见,两步法的数学基础为坐标转换,而物理基础则是相对运动。

表 1　两步法求像偏转$\Delta\widehat{\mu}'$的过程与思路

Table 1　Principle of solving the image rotation $\Delta\widehat{\mu}'$ by two-step rule

步骤	转动			诠释	
	物体(物空间)	反射棱镜	像体(像空间)	数学运算	物理实质
第 1 步	$-\Delta\theta\hat{P}$	0 (静止不动)	$S_{T,2\varphi}(-\Delta\theta\hat{P})$	1) $-\Delta\theta\hat{P}$:由定坐标向动坐标的坐标转换 2) $-\Delta\theta\hat{P}$:作为与棱镜相固结的动坐标中的输入 3) $S_{T,2\varphi}(-\Delta\theta\hat{P})$:特征矩阵对输入角矢量的线性变换	1) $-\Delta\theta\hat{P}$: 物体对棱镜的相对运动(机械运动) 2) $-\Delta\theta\hat{P}$:输入一微量转动(机械运动) 3) 输入的微量转动通过棱镜的传递(光学运动)
第 2 步	$+\Delta\theta\hat{P}$	$+\Delta\theta\hat{P}$	$+\Delta\theta\hat{P}$	$+\Delta\theta\hat{P}$:由动坐标向定坐标的坐标转换	$+\Delta\theta\hat{P}$: 棱镜的运动像空间对静止像空间的相对运动(机械运动)或换一种说法,物体、棱镜和像体,三者如同一个刚体一起微量转动 $\Delta\theta\hat{P}$,因而物体复位,棱镜和像体二者则完全到位(刚体运动)
综合	0 (物体复位)	$\Delta\theta\hat{P}$	$S_{T,2\varphi}(-\Delta\theta\hat{P})+\Delta\theta\hat{P}$	像偏转 $\Delta\widehat{\mu}'=(E-S_{T,2\varphi})\Delta\theta\hat{P}$	

2.2　像偏转分量

设单位矢$\widehat{r'}$代表棱镜像空间的任意一个方向,$\Delta\mu'_{r'}$代表像偏转 $\Delta\widehat{\mu}'$沿$\widehat{r'}$方向上的分量。为简单起见,称 $\Delta\mu'_{r'}$为 r'像偏转。

下面推导 r'像偏转 $\Delta\mu'_{r'}$同引起像偏转的棱镜微量转动$\Delta\theta\hat{P}$之间的关系。

首先,

$$\Delta\mu'_{r'}=\Delta\widehat{\mu}'\cdot\widehat{r'} \tag{11}$$

将式(10)中的 $\Delta\widehat{\mu}'$代入式(11),

$$\begin{aligned}\Delta\mu'_{r'}&=(E-S_{T,2\varphi})\Delta\theta\hat{P}\cdot\widehat{r'}\\&=\Delta\theta\hat{P}\cdot\widehat{r'}-\Delta\theta S_{T,2\varphi}\hat{P}\cdot\widehat{r'}\end{aligned} \tag{12}$$

由于$\widehat{r'}$属于角矢量,所以按照传递的关系,令$\widehat{r'}$在棱镜物空间对应的单位矢量为$\hat{r}$:

$$\widehat{r'}=S_{T,2\varphi}\hat{r}\text{或}\hat{r}=S_{T,-2\varphi}\widehat{r'} \tag{13}$$

考虑到式(13)的关系,可将式(12)右边的第 2 项写成 :

$$-\Delta\theta S_{T,2\varphi}\hat{P}\cdot S_{T,2\varphi}\hat{r}=-\Delta\theta\hat{P}\cdot\hat{r}$$

于是,

$$\Delta\mu'_{r'}=\Delta\theta\hat{P}\cdot\widehat{r'}-\Delta\theta\hat{P}\cdot\hat{r}$$

由此,

$$\Delta\mu'_{r'}=\Delta\theta\hat{P}\cdot(\widehat{r'}-\hat{r}) \tag{14}$$

或

$$\Delta\mu'_{r'}=\hat{P}\cdot\Delta\theta(\widehat{r'}-\hat{r}) \tag{15}$$

可以将式(15)写成下列的形式:

$$\Delta\mu'_{r'}=\hat{P}\cdot\hat{\delta}_h=\delta_h\cos(\widehat{\hat{P},\hat{\delta}_h}) \tag{16}$$

其中,

$$\hat{\delta}_h=\Delta\theta(\widehat{r'}-\hat{r})=\delta_h\hat{h} \tag{17}$$

式中,$\hat{h}$为引入矢量$\hat{\delta}_h$方向上的单位矢。

2.3　余弦律与差向量法则 1

根据式(16)和式(17)的结构,可将其概括为"余弦律与差向量法则"。

定义　像偏转 $\Delta\widehat{\mu}'$沿反射棱镜像空间内的方向单位矢$\widehat{r'}$上的分量 $\Delta\mu'_{r'}$(r'像偏转) 同引起像偏转的棱镜微量转动 $\Delta\theta\hat{P}$之间的关系受余弦律支配:$\Delta\mu'_{r'}=\hat{P}\cdot\hat{\delta}_h=\delta_h\cos(\widehat{\hat{P},\hat{\delta}_h})$,而余弦律中的唯一的矢参量$\hat{\delta}_h$可由差向量法则求得:$\hat{\delta}_h=\Delta\theta(\widehat{r'}-\hat{r})$。这里,$\hat{r}=S_{T,-2\varphi}\widehat{r'}$或$\widehat{r'}=S_{T,2\varphi}\hat{r}$。

由式(16)可见,当棱镜的转轴$\hat{P}$和$\hat{\delta}_h$矢量同向时,r'像偏转 $\Delta\mu'_{r'}$取极值 $\Delta\mu'_{r'_{max}}$,该极值正好等于$\hat{\delta}_h$本身的大小 δ_h,

$$\Delta\mu'_{r'}=\delta_h\cos(\widehat{\hat{P},\hat{\delta}_h})=\delta_h\cos0°=\delta_h=\Delta\mu'_{r'_{max}} \tag{18}$$

显然,当$\hat{P}$与$\hat{\delta}_h$反向时,r'像偏转 $\Delta\mu'_{r'}$取负号的极值:

$$\Delta\mu'_{r'}=\delta_h\cos180°=-\delta_h=-\Delta\mu'_{r'_{max}}$$

根据矢参量$\hat{\delta}_h=\delta_h\hat{h}$的上述含义,$\hat{\delta}_h$的方向$\hat{h}$取名为 r'像偏转的极值轴向;$\hat{\delta}_h$的大小即 $\delta_h=\Delta\mu'_{r'_{max}}$取名为 r'像偏转极值;而

矢量$\hat{\boldsymbol{\delta}}_h$本身则取名$r'$像偏转的极值特性向量。

又由式(16)可见,当棱镜转轴$\hat{\boldsymbol{P}}$垂直于$\hat{\boldsymbol{\delta}}_h$时,$r'$像偏转$\Delta\mu'_{r'}$取零值,即

$$\Delta\mu'_{r'}=\delta_h\cos 90°=0$$

故知,一切和r'像偏转的极值轴向相垂直的方向均为r'像偏转的零值轴向。

当$\hat{\boldsymbol{\delta}}_h=0$时,说明无论棱镜绕什么样的$\hat{\boldsymbol{P}}$轴微量转动,都不会产生$r'$像偏转,即$\Delta\mu'_{r'}$总是等于零。在此情形,不存在$r'$像偏转的极值轴向,而所有的方向均可视作$r'$像偏转的零值轴向。

应当指出,在以上的讨论中并未对$\hat{\boldsymbol{r}}'$轴附加任何约束条件,或者说,$\hat{\boldsymbol{r}}'$可以是棱镜像空间的一根任意方向的轴线,所以,式(16)和式(17)具有一定的普遍意义。

根据极值轴向的含义,它和同一个r'像偏转的梯度方向应该是一致的,因此也可以利用梯度的公式求得r'像偏转$\Delta\mu'_{r'}$的极值轴向。

设$\hat{\boldsymbol{\eta}}_h$代表$\Delta\mu'_{r'}$的梯度或梯度轴向,则有

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_h=\mathrm{grad}\Delta\mu'_{r'}=\frac{\partial\Delta\mu'_{r'}}{\partial\Delta\theta_{x'}}\hat{\boldsymbol{i}}'+\frac{\partial\Delta\mu'_{r'}}{\partial\Delta\theta_{y'}}\hat{\boldsymbol{j}}'+\frac{\partial\Delta\mu'_{r'}}{\partial\Delta\theta_{z'}}\hat{\boldsymbol{k}}' \tag{19}$$

式中

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}=\Delta\theta\hat{\boldsymbol{P}}$$

或

$$\Delta\theta_{x'}=\Delta\theta P_{x'}\quad \Delta\theta_{y'}=\Delta\theta P_{y'}\quad \Delta\theta_{z'}=\Delta\theta P_{z'} \tag{20}$$

由式(16)和式(17)有

$$\begin{aligned}\Delta\mu'_{r'}&=\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\hat{\boldsymbol{\delta}}_h=\Delta\theta\hat{\boldsymbol{P}}\cdot(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})\\&=\Delta\theta P_{x'}(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})_{x'}+\Delta\theta P_{y'}(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})_{y'}+\Delta\theta P_{z'}(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})_{z'}\\&=\Delta\theta_{x'}(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})_{x'}+\Delta\theta_{y'}(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})_{y'}+\Delta\theta_{z'}(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})_{z'}\end{aligned} \tag{21}$$

式中,$(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})_{x'}$、$(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})_{y'}$、$(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})_{z'}$代表矢量$(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})$在$x'$、$y'$、$z'$上的分量。

将式(21)代入式(19),得

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_h=(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})_{x'}\hat{\boldsymbol{i}}'+(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})_{y'}\hat{\boldsymbol{j}}'+(\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}})_{z'}\hat{\boldsymbol{k}}' \tag{22}$$

式(22)也可写成

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_h=\mathrm{grad}\Delta\mu'_{r'}=\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}} \tag{23}$$

比较式(23)与式(17),可看出有下列关系:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_h=\Delta\theta\hat{\boldsymbol{\eta}}_h \tag{24}$$

由此可见,同一个r'像偏转$\Delta\mu'_{r'}$的极值特性向量$\hat{\boldsymbol{\delta}}_h$和梯度轴向$\hat{\boldsymbol{\eta}}_h$具有同样的方向,而在数值上只差一个比例系数$\Delta\theta$。因此说,$r'$像偏转的梯度轴向就是它的极值轴向。差向量的结果就是r'像偏转的梯度,或称角梯度。

因此,可以换一种方式,将式(16)、式(17)写成:

$$\Delta\mu'_{r'}=\Delta\theta\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\hat{\boldsymbol{\eta}}_h=\Delta\theta\eta_h\cos(\widehat{\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{\eta}}_h}) \tag{25}$$

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_h=\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}} \tag{26}$$

3 余弦律与差向量法则2的构建

下面讨论与棱镜微量移动相关的问题。由于微量移动与微量转动的情况相似,所以只须在原有的公式和法则中做一些适当的替换,特别要指出角矢量传递矩阵$\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}$应为线矢量传递矩阵$\boldsymbol{R}$所取代,则可以得到棱镜微量移动的情形下相应的公式与法则。

3.1 像移动

定义 在物体不动的条件下,由反射棱镜的微量移动$\Delta g\boldsymbol{D}$所造成像体的位移$\Delta\boldsymbol{S}'$称为像移动。

由式(9)和式(10),经适当的替换,得:

$$\Delta\boldsymbol{S}'=\boldsymbol{R}(-\Delta g\boldsymbol{D})+\Delta g\boldsymbol{D} \tag{27}$$

$$\Delta\boldsymbol{S}'=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{R})\Delta g\boldsymbol{D} \tag{28}$$

3.2 像移动分量

设单位矢$\boldsymbol{r}'$代表棱镜像空间的任意一个方向,$\Delta S'_{r'}$代表像移动$\Delta\boldsymbol{S}'$沿$\boldsymbol{r}'$方向上的分量。为简单起见,称$\Delta S'_{r'}$为r'像移动。

由式(16)和式(17),经适当的替换,得:

$$\Delta S'_{r'}=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\delta}_e=\delta_e\cos(\widehat{\boldsymbol{D},\boldsymbol{\delta}_e}) \tag{29}$$

式中,

$$\boldsymbol{\delta}_e=\Delta g(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})=\delta_e\boldsymbol{e} \tag{30}$$

其中,$\boldsymbol{e}$为引入矢量$\boldsymbol{\delta}_e$方向上的单位矢量。

3.3 余弦律与差向量法则2

根据式(29)、式(30)的结构,可将其概括为“余弦律与差向量法则”。

定义 像移动$\Delta\boldsymbol{S}'$沿反射棱镜像空间内的方向单位矢$\boldsymbol{r}'$上的分量$\Delta S'_{r'}$(r'像移动)同引起像移动的棱镜微量移动$\Delta g\boldsymbol{D}$之间的关系受余弦律支配:$\Delta S'_{r'}=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\delta}_e=\delta_e\cos(\widehat{\boldsymbol{D},\boldsymbol{\delta}_e})$,而余弦律中的唯一的矢参量$\boldsymbol{\delta}_e$可由差向量法则求得:$\boldsymbol{\delta}_e=\Delta g(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$。这里,$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r}'$或$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}$。

矢参量$\boldsymbol{\delta}_e=\delta_e\boldsymbol{e}$和上一节里的矢参量$\hat{\boldsymbol{\delta}}_h=\delta_h\hat{\boldsymbol{h}}$,具有完全类同的意义。因此,$\boldsymbol{\delta}_e$的方向$\boldsymbol{e}$取名$r'$像移动的极值移向;$\boldsymbol{\delta}_e$的大小,即$\delta_e=\Delta S'_{r'_{\max}}$取名为$r'$像移动极值;而矢量$\boldsymbol{\delta}_e$本身则取名为$r'$像移动的极值特性向量。

同样,式(23)~式(26)的对应部分为

$$\boldsymbol{\eta}_e=\mathrm{grad}\Delta S'_{r'}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{\delta}_e=\Delta g\boldsymbol{\eta}_e \tag{32}$$

和

$$\Delta S'_{r'}=\Delta g\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\eta}_e=\Delta g\eta_e\cos(\widehat{\boldsymbol{D},\boldsymbol{\eta}_e}) \tag{33}$$

$$\boldsymbol{\eta}_e=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r} \tag{34}$$

式中,$\boldsymbol{\eta}_e$为r'像移动的梯度(移向)。

4 反射棱镜调整图与调整特性参量

现在讨论如何将上述的两条“余旋律与差向量法则”应用于一块具体的反射棱镜上。

图4所示的直角屋脊棱镜可视为偶次反射棱镜的一个

代表。首先选定棱镜的像坐标系 $x'y'z'$。为了此后编制统一的调整图表的方便，规定 $x'y'z'$ 为右手坐标系；x' 轴为棱镜的出射光轴；在平面棱镜的情形（见文献[8]），y' 轴在共轭光轴平面内，其取向使 z' 轴指向读者一侧；设在方向上相应一致的 $\hat{\boldsymbol{i}}'$、$\hat{\boldsymbol{j}}'$、$\hat{\boldsymbol{k}}'$ 和 $\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$ 为沿 x'、y'、z' 坐标轴的两组单位矢量，它们分别用在棱镜微量转动和微量移动的情况；通过角矢量传递矩阵 $\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}$ 和线矢量传递矩阵 $\boldsymbol{R}$ 找出棱镜像方的两组单位矢量在棱镜物方相对应的两组单位矢量 $\hat{\boldsymbol{i}}$、$\hat{\boldsymbol{j}}$、$\hat{\boldsymbol{k}}$ 和 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。

因为是偶次反射棱镜，$\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 没有区别：

$$\boldsymbol{R}=(-1)^t\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}=\boldsymbol{S}_{T,2\varphi} \tag{35}$$

所以物方的两组单位矢量相应一致，在图上可标在一起：$\hat{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{i})$、$\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{j})$、$\hat{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k})$。

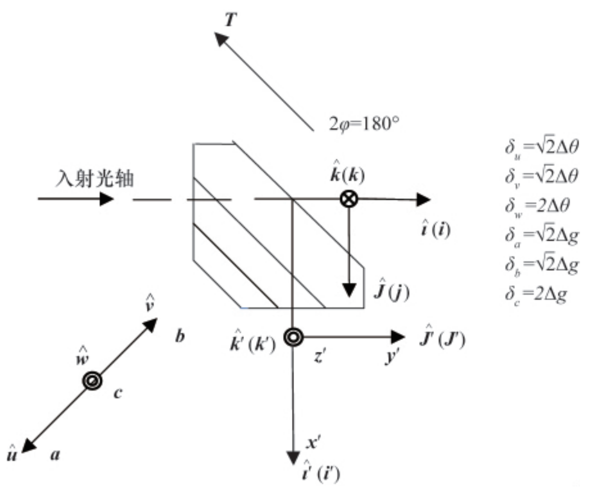


图 4 一偶次反射棱镜的调整图

Fig. 4 Adjustment diagram for a prism with an even number of reflections

然后，由式（16）、（17）、（23）、（24）、（29）~（32）可直接写出下列 4 组公式。

$$\begin{cases}\Delta\mu'_{x'}=\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\hat{\boldsymbol{\delta}}_u=\delta_u\cos(\widehat{\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{\delta}}_u})=\delta_u\cos\alpha\\ \Delta\mu'_{y'}=\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\hat{\boldsymbol{\delta}}_v=\delta_v\cos(\widehat{\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{\delta}}_v})=\delta_v\cos\beta\\ \Delta\mu'_{z'}=\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\hat{\boldsymbol{\delta}}_w=\delta_w\cos(\widehat{\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{\delta}}_w})=\delta_w\cos\gamma\end{cases} \tag{36}$$

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\delta}}_u=\Delta\theta(\hat{\boldsymbol{i}}'-\hat{\boldsymbol{i}})=\delta_u\hat{\boldsymbol{u}}=\Delta\theta\hat{\boldsymbol{\eta}}_u\\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_v=\Delta\theta(\hat{\boldsymbol{j}}'-\hat{\boldsymbol{j}})=\delta_v\hat{\boldsymbol{v}}=\Delta\theta\hat{\boldsymbol{\eta}}_v\\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_w=\Delta\theta(\hat{\boldsymbol{k}}'-\hat{\boldsymbol{k}})=\delta_w\hat{\boldsymbol{w}}=\Delta\theta\hat{\boldsymbol{\eta}}_w\end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases}\Delta S'_{x'}=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\delta}_a=\delta_a\cos(\widehat{\boldsymbol{D},\boldsymbol{\delta}_a})=\delta_a\cos\alpha\\ \Delta S'_{y'}=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\delta}_b=\delta_b\cos(\widehat{\boldsymbol{D},\boldsymbol{\delta}_b})=\delta_b\cos\beta\\ \Delta S'_{z'}=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\delta}_c=\delta_c\cos(\widehat{\boldsymbol{D},\boldsymbol{\delta}_c})=\delta_c\cos\gamma\end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{\delta}_a=\Delta g(\boldsymbol{i}'-\boldsymbol{i})=\delta_a\boldsymbol{a}=\Delta g\boldsymbol{\eta}_a\\ \boldsymbol{\delta}_b=\Delta g(\boldsymbol{j}'-\boldsymbol{j})=\delta_b\boldsymbol{b}=\Delta g\boldsymbol{\eta}_b\\ \boldsymbol{\delta}_c=\Delta g(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})=\delta_c\boldsymbol{c}=\Delta g\boldsymbol{\eta}_c\end{cases} \tag{39}$$

式中，$\Delta\mu'_{x'}$、$\Delta\mu'_{y'}$、$\Delta\mu'_{z'}$ 和 $\Delta S'_{x'}$、$\Delta S'_{y'}$、$\Delta S'_{z'}$ 分别为 x'、y'、z' 像偏转和 x'、y'、z' 像移动；$\hat{\boldsymbol{\delta}}_u$、$\hat{\boldsymbol{\delta}}_v$、$\hat{\boldsymbol{\delta}}_w$ 和 $\boldsymbol{\delta}_a$、$\boldsymbol{\delta}_b$、$\boldsymbol{\delta}_c$ 分别为 x'、y'、z' 像偏转和 x'、y'、z' 像移动的极值特性向量；单位矢 $\hat{\boldsymbol{u}}$、$\hat{\boldsymbol{v}}$、$\hat{\boldsymbol{w}}$ 和 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 分别为 x'、y'、z' 像偏转的极值轴向和 x'、y'、z' 像移动的极值移向；$\hat{\boldsymbol{\eta}}_u$、$\hat{\boldsymbol{\eta}}_v$、$\hat{\boldsymbol{\eta}}_w$ 和 $\boldsymbol{\eta}_a$、$\boldsymbol{\eta}_b$、$\boldsymbol{\eta}_c$ 分别为 x'、y'、z' 像偏转的角梯度（轴向）和 x'、y'、z' 像移动的梯度（移向）；$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 代表棱镜转轴 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 分别与极值轴向 $\hat{\boldsymbol{u}}$、$\hat{\boldsymbol{v}}$、$\hat{\boldsymbol{w}}$ 的夹角余弦，同时也代表棱镜移向 $\boldsymbol{D}$ 分别与极值移向 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的夹角余弦。

由公式组（37）和（39）所求得的调整特性参量已标在棱镜的调整图上，而利用这些已知的参量，在给定棱镜微量转动 $\Delta\theta\hat{\boldsymbol{P}}$ 或微量移动 $\Delta g\boldsymbol{D}$ 后，根据公式组（36）或（38），可以求得 3 个像偏转分量或 3 个像移动分量。

图 5 的直角棱镜可视为奇次反射棱镜的一个代表。同样，设在方向上相应一致的一对像方坐标系 $\hat{\boldsymbol{i}}'\hat{\boldsymbol{j}}'\hat{\boldsymbol{k}}'$ 和 $\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'$ 通过角矢量传递矩阵 $\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}$ 和线矢量传递矩阵 $\boldsymbol{R}$ 找出它们在棱镜物方对应的一对坐标系 $\hat{\boldsymbol{i}}\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{k}}$ 和 $\boldsymbol{ijk}$。

在此情形，由于

$$\boldsymbol{R}=(-1)^t\boldsymbol{S}_{T,2\varphi}=-\boldsymbol{S}_{T,2\varphi} \tag{40}$$

所以，物方坐标系 $\hat{\boldsymbol{i}}\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{k}}$ 和 $\boldsymbol{ijk}$ 呈现互为反向的关系。其他与偶次反射棱镜无异，故从略。

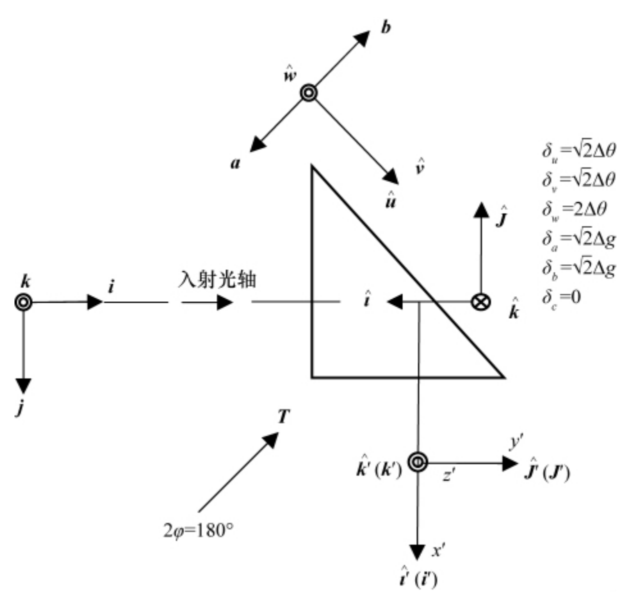


图 5 一奇次反射棱镜的调整图

Fig. 5 Adjustment diagram for a prism with an odd number of reflections

5 反射棱镜调整法则

以上两条法则分别涉及反射棱镜的微量转动和微量移动。如所知,当利用反射棱镜进行整个光学系统的调整时,该棱镜所做的运动不外乎就是微量的转动或移动。

因此,可以将上述的两条法则“余弦律与差向量法则1、2”统称为反射棱镜调整法则。

反射棱镜调整法则具有一石三鸟之功效:

(1) 构建了棱镜调整特性参量;

(2) 给出了解题的具体方法;

(3) 揭示了棱镜调整的内在规律。

6 结论

由于按照棱镜调整的内在规律,科学地利用了反射棱镜特征矩阵可以作为角矢量传递矩阵的新概念,导致棱镜调整中的两条法则终于取得了一致的名称和统一的定义。

致谢:本文得到赵维谦教授主持的“国家重大科学仪器设备开发专项‘激光差动共焦成像与检测仪器研发与应用研究’(2011YQ040136)”项目提供的资助,在此表示感谢。

参考文献(References)

[1] 唐家范. 四元数在光学仪器中的应用[J]. 云光技术, 1975(4): 40–47.
Tang Jiafan. Yunguang Jishu, 1975(4): 40–47.

[2] 何绍宇, 郑长英. 棱镜位移和微量旋转引起的光路变化 [C]//光学设计文集. 北京: 第一机械工业部情报所, 1973.
He Shaoyu, Zheng Changying. The change of ray path caused by linear and angular displacements of reflecting prisms [C]//Proceedings on Optical Design. Beijing: 1st Ministry of Machine Building. Institute of Information, 1973.

[3] 连铜淑. 棱镜调整 (光轴偏和像倾斜计算)[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1974.
Lian Tongshu. Adjustment of reflecting prisms(Calculation of optical axis deviation and image lean)[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1974.

[4] 连铜淑. 棱镜调整[M]. 北京: 国防工业出版社, 1978: 14–20.
Lian Tongshu. Adjustment of reflecting prisms [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1978: 14–20.

[5] 连铜淑. 棱镜调整(原理和图表)[M]. 北京: 国防工业出版社, 1979.
Lian Tongshu. Adjustment of reflecting prisms (Principle and tabulation) [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1979.

[6] 王志坚. 棱镜转动定理数学解析[J]. 光学技术, 1982(3): 14–21.
Deng Bixin. Guangxue Jishu, 1982(3): 14–21.

[7] 迟泽英, 徐金镛. 应用光学[M]. 南京: 华东工学院, 1984.
Chi Zeying, Xu Jinyong. Applied optics [M]. Nanjing: East-China Engineering Institute, 1984.

[8] 连铜淑. 反射棱镜共轭理论 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1988: 30–34, 100–111.
Lian Tongshu. Theory of conjugation for reflecting prisms [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1988: 30–34. 100–111.

[9] 汤自义, 须耀辉, 王志坚. 反射棱镜[M]. 北京: 国防工业出版社, 1981.
Tang Ziyi, Xu Yaohui, Wang Zhijian. Reflecting prisms [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1981.

[10] 迟泽英, 陈文建. 应用光学与光学设计基础[M]. 南京: 东南大学出版社, 2008: 131–168.
Chi Zeying, Chen Wenjian. Applied optics and elements of optical design[M]. Nanjing: Southeast University Press, 2008: 131–168.

[11] 毛文炜. 棱镜调整的矩阵分析[J]. 云光技术, 1981(5): 1–12.
Mao Wenwei. Yunguang Jishu, 1981(5): 1–12.

[12] Hopkins R E. Mirror and prism systems[M]//Applied Optics and Optical Engineering, New York: Academic Press, 1965, 3: 270–276.

[13] Kingslake R. Optical system design [M]. New York: Academic Press, 1983: 159–160.

[14] Lian Tongshu. Theory of conjugation for reflecting prisms: Adjustment and image stabilization of optical instruments [M]. Beijing: International Academic Publishers, 1991: 105–115.

[15] Pogarev G V. Adjustment of optical instruments[M]. Leningrad: Machine Building Publishing House, 1982: 128–130.

[16] 连铜淑. 反射棱镜制造误差的分析与计算 [J]. 科技导报, 2010, 28(9): 68–72.
Lian Tongshu. Science and Technology Review, 2010, 28(9): 68–72.

(责任编辑 赵业玲)