

刚柔耦合弹簧摆的复杂动力学行为

于洪洁, 张靖姝, 洪嘉振

上海交通大学工程力学系, 上海 200240

摘要 针对同时具有快慢变量的时变、强非线性刚柔耦合的多体系统, 利用弹簧摆模型定性分析和数值模拟系统复杂的动力学行为。建立双时间尺度变量刚柔耦合弹簧摆的无量纲动力学方程, 从能量守恒角度出发, 比较、选择更适用于容易产生刚性问题的数值求解方法。将不同时间尺度变量之间的频率比和初值摆角作为控制参数, 数值模拟分析弹簧摆在较大频率比和大摆角初始条件下, 大范围摆动和小幅度振荡相耦合的复杂动力学行为, 给出了一定范围内系统快慢变量呈现不同动力学性态所对应的参数域。结果表明, 双时间尺度变量系统随着不同尺度变量之间频率比和初始条件的变化呈现出包括混沌的复杂动力学行为, 尤其大摆角初值更容易导致快慢变量产生混沌行为, 这为进一步刚柔耦合多体系统动力学行为的定性分析、数值仿真研究打下一个基础并提出参考和依据。

关键词 弹簧摆; 频率比; 大范围摆角; 混沌; 刚柔耦合

中图分类号 O313

文献标志码 A

doi 10.3891/j.issn1000-7857.2013.18.004

Complex Dynamical Behavior of Rigid-flexible Coupling Spring Pendulum

YU Hongjie, ZHANG Jingshu, HONG Jiazhen

Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China

Abstract Aiming at the time-varying, strong nonlinear rigid-flexible coupling multi-body systems with both variables of fast and slow speeds, qualitative analysis is carried out and complex dynamical behaviors are numerically simulated by using a spring pendulum model. A dimensionless dynamical equation of the two-time scale variable rigid-flexible coupling spring pendulum system is established. A more appropriate numerical method for solving stiff problems is compared and selected from the perspective of energy conservation. The frequency ratio between different time scale variables and the initial value of swing angle are taking as the control parameters; on the condition of greater frequency ratio and the large range of initial swing angle, the complex dynamical behavior of wide range swing coupling with small amplitude oscillation is analyzed by means of the numerical simulation of spring pendulum system. The parameter domain for the different dynamical behavior corresponding to different time scale variables is given within a certain range. Results indicate that two-time scale variable system has a complex dynamical behavior including chaos with the change of the frequency ratio between the different time scale variables and the change of initial conditions. Especially, the initial value of large swing angle is easier to cause the chaotic behavior of different time scale variables. A foundation for further qualitative analysis and numerical simulation studies on the dynamical behavior of rigid-flexible coupling multi-body systems is laid down and references and evidence are provided.

Keywords spring pendulum; frequency ratio; wide range swing angle; chaos; rigid-flexible coupling

0 引言

非线性动力学的研究深刻揭示了客观世界的复杂性和多样性, 不仅对数理科学的发展有重大理论意义, 而且与其他学科广泛交叉, 在各个科学技术领域都有十分广阔的应用前景。在多体系统动力学领域中, 刚柔耦合的多体系统在航空航天、机器人等高科技领域有着强烈的工程应用背景, 如

空间柔性机械臂、太阳能帆板和大型涡轮机叶片等。这类系统状态变量的特点为既有大范围慢变量——刚体位移, 又有小幅度快变量——弹性变形, 它们相互耦合, 构成时变、强非线性的高维动力学方程。目前多体系统动力学性态分析的唯一方法是数值积分, 可是在过去的动力学仿真过程中, 国内外都曾遇到过很多数值分析的困境, 数值计算的发散, 数值

收稿日期: 2012-12-04; 修回日期: 2013-04-03

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(11132007)

作者简介: 于洪洁, 副教授, 研究方向为非线性动力学, 电子邮箱: yuhongjie@sjtu.edu.cn; 张靖姝(共同第一作者), 硕士研究生, 研究方向为非线性动力学, 电子邮箱: bubble611@126.com

结果与实际的现象不符等。研究发现,动力学模型数值计算的成败,有时与模型中的非线性项处理有关。然而在多体动力学领域,大量研究集中在理论建模和数值仿真方面,缺乏对非线性行为的定性分析。若能将非线性动力学中定性分析的思路与多体系统动力学的数值仿真结合起来,通过对此类方程的定性分析,对柔性多体系统动力学数值仿真的正确性与可靠性提出判据,这将对多体系统动力学的发展具有重要意义。

关于柔性多体系统非线性动力学定性分析的研究,需要通过理论研究和数值模拟,对包含快变量和慢变量的多时间尺度系统的复杂非线性动力学行为进行分析,揭示该系统新的动力学行为,提供影响系统动力学行为变化的参数范围。本文用双时间尺度变量系统——弹簧摆作为研究刚柔耦合动力学系统的模型。单摆是典型的刚体系统,本文将摆杆换为弹簧来描述系统的柔性特性,系统为简单的刚柔耦合系统。以弹簧摆频率比来描述刚柔耦合系统快慢变量间的差异,以弹簧摆初始大摆角对应刚柔耦合系统的大范围运动,以弹簧初始伸长率对应刚柔耦合系统的小幅度变形。希望通过对弹簧摆系统的动力学行为分析与数值研究,为工程上刚柔耦合系统的动力学分析和控制奠定理论与数值仿真的基础。

对于一个典型的双自由度系统,弹簧摆在许多有关非线性振动的专著中都有论述,国内外学者也已从各个方面对弹簧摆做了研究,近年来讨论较多的是弹簧摆的内共振现象和混沌运动。司丽荣等^[1]、郑建龙等^[2]、李欣业等^[3]从理论推导、数值模拟和实验观测等方面对弹簧摆的内共振现象进行了深入细致的研究,给出了弹簧摆产生内共振的条件并讨论了内共振的运动特性。Won等^[4]、石玉仁等^[5]、Amer等^[6]主要研究了弹簧摆在有阻尼且施加了简谐驱动力的情况下的动力学响应,以驱动力振幅为控制参数,给出了系统随着振幅的变化由倍周期分岔通往混沌的过程。李银山等^[7]、杨正波等^[8]以频率比为控制参数,讨论了频率比在几种特定情况下弹簧摆的动力学行为。van der Weele等^[9]则以频率比和能量比为控制参数,研究了弹簧摆从有序到混沌再回到有序的动力学过程,给出了小范围内系统处于混沌状态的参数域。

迄今为止,关于弹簧摆频率比的讨论基本都停留在较小的范围内($1 \sim \sqrt{8}$),缺乏对频率比较大,即存在慢速摆动和快速振荡耦合时弹簧摆动力学行为的研究。由于刚柔耦合系统中经常存在高频振动,因此研究弹簧摆在大频率比的条件下的动力学行为是有必要的;而关于弹簧摆初始摆角这一条件,缺乏对弹簧摆处于不同大范围摆角时存在的动力学行为的研究;另外目前学者们求解非线性方程时普遍直接采用Runge-Kutta法或Gear法,而没有考虑所运用的数值方法是否更理想,由于刚柔耦合系统快慢变量的差异,系统方程容易出现刚性问题,因此对数值计算方法要求更高,需要对数值方法的合适性加以讨论。

本文在前人研究成果的基础上,对无阻尼无驱动力具快慢双时间尺度变量的弹簧摆的动力学行为进行更深入地研

究。从系统能量守恒的角度出发选取合适的数值计算方法,比较计算精度与效率,发现采用Matlab中的ode113求解器计算更为理想;将弹簧振子与弹簧摆固有频率之比作为控制参数,为了切合工程背景,研究了频率比从1~100的变化,并且初始条件取大范围摆角($0^\circ \sim 90^\circ$)和弹簧小伸长率(0.1、0.01、0.001)的情况下,弹簧摆的复杂动力学行为。结果发现,在不同条件下,刚柔耦合弹簧摆不同时间尺度变量存在着不同的混沌、拟周期等动力学行为,为了直观展现出在研究范围内弹簧摆存在的复杂动力学行为,进一步给出了系统不同动力学性态所对应的参数域图。

1 模型及其动力学方程的建立

以绕支点无阻尼自由摆动的弹簧摆作为研究对象。如图1所示,摆杆由弹簧连接悬挂在支点上,状态变量由大范围的摆角和沿摆杆长度方向上的位移构成。系统是二自由度双时间尺度变量的系统,变量分为快变量 r 和慢变量 θ 相互耦合。 r 为质点 m 到悬点 O 的距离(m), θ 为摆角($^\circ$),弹簧原长为 l_0 (m),静平衡时长度为 l (m), k 为弹簧的弹性系数(N/m), g 为重力加速度(N/m^2),则有 $mg=k(l-l_0)$ 。

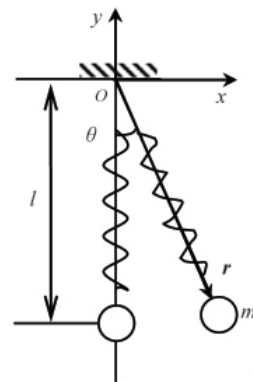


图1 弹簧摆模型示意

Fig. 1 Scheme of spring pendulum model

以平衡位置为零势能点,系统动能与势能的表达式为

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ V = mgr(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} k(r-l)^2 \end{cases} \quad (1)$$

根据拉格朗日第二类方程写出系统动力学方程:

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - g \cos\theta + \frac{k}{m}(r-l) + g = 0 \\ r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + g \sin\theta = 0 \end{cases} \quad (2)$$

将方程无量纲化,以 $x = \frac{r-l}{l}$ 表示弹簧相对于平衡位置伸

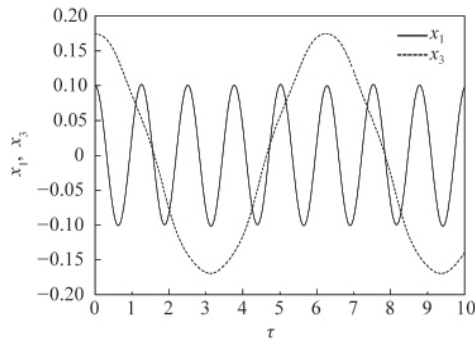
长率, $\omega_r^2 = \frac{g}{l}$ 为弹簧摆固有频率, $\omega_s^2 = \frac{k}{m}$ 为弹簧振子固有频率,

$\gamma = \frac{\omega_s}{\omega_p} = \sqrt{\frac{k/m}{gl}}$ 为两者频率比。取新时间变量为 $\tau = \omega_p t$, 则 $\frac{d}{dt} = \omega_p \frac{d}{d\tau}$, $\frac{d^2}{dt^2} = \omega_p^2 \frac{d^2}{d\tau^2}$ 。记 $\frac{dx}{d\tau}$ 为 \dot{x} , $\frac{d^2x}{d\tau^2}$ 为 \ddot{x} , 则方程(2)化简为

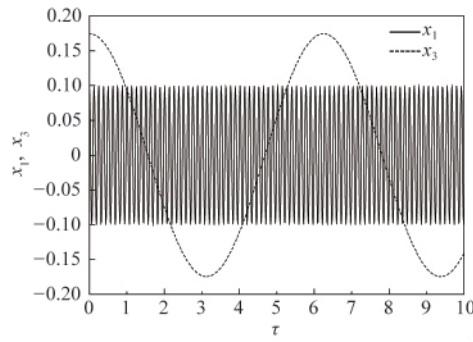
$$\begin{cases} \ddot{x} - (x+1)\dot{\theta}^2 - \cos\theta + \gamma^2 x + 1 = 0 \\ (x+1)\ddot{\theta} + 2\dot{x}\dot{\theta} + \sin\theta = 0 \end{cases} \quad (3)$$

方程(3)为无量纲化后弹簧摆的非线性动力学方程,方

程中只含有一个参数即频率比 γ , γ 越大表示弹簧摆不同变量之间时间尺度差别越大。从图 2 可以明显看出, γ 的差别对不同变量时间历程曲线的影响。图中实线为变量 x_1 的时间历程曲线, 虚线为系统状态变量 x_3 的时间历程曲线, 状态变量 x_1, x_3 分别对应变量 x, θ 。下面围绕方程(3)讨论方程稳定性分析及系统复杂动力学行为, 之后讨论中对时间求导均为对新时间变量 τ 求导。



(a) $\gamma=5$ 时系统状态变量时间历程曲线
(a) Time history curves of system status variables when $\gamma=5$



(b) $\gamma=50$ 时系统状态变量时间历程曲线
(b) Time history curves of system status variables when $\gamma=50$

图 2 不同频率比 γ 下系统状态变量时间历程曲线

Fig. 2 Time history curves of system status variables with different frequency ratios of γ

2 数值计算

方程(3)是 2 阶具双时间尺度变量的非线性微分方程组, 无法求出精确解析解, 必须由数值计算求得近似解。求解非线性动力学微分方程有多种数值计算方法, 然而计算结果是否精确可靠、计算效率是否够高是选择合适计算方法的关键。由于方程(3)是快慢变量相互耦合复杂强非线性变化的动力学微分方程, 容易产生刚性问题, 数值求解的难度更大, 因此寻找合适的数值求解方法尤其重要。本文从能量守恒的角度出发, 对几种最常用的计算方法进行比较, 并从中选择了一种更好的方法进行计算。

采用降阶法, 对方程(3)进行变量代换, 令 $x_1=x, x_2=\dot{x}, x_3=\theta, x_4=\dot{\theta}$ 。则系统状态变量为 $\mathbf{X}=[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$, 方程(3)则化简为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (x_1+1)x_4^2 + \cos x_3 - \gamma^2 x_1 - 1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{1}{x_1+1}(2x_2x_4 + \sin x_3) \end{cases} \quad (4)$$

方程(4)是 1 阶微分方程组。

从物理意义上, 无阻尼自由摆动的弹簧摆是保守系统, 故机械能应守恒。机械能表达式 $E=T+V = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2$

$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgr(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}k(r-l)^2$, 采取与之前相同的无量纲变换和化简过程, 并以状态变量表示, 则机械能 E 的表达式为

$$E = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_4^2(x_1+1)^2 - (x_1+1)\cos x_3 + \frac{1}{2}\gamma^2 x_1^2 + x_1 + 1 \quad (5)$$

给定某一初值 $\mathbf{X}_0=[x_{10} \ x_{20} \ x_{30} \ x_{40}]^T$ 和某一频率比 γ , 理论上在整个运动过程中 E 值应始终等于 E_0 。若采用某种计算方法得到的机械能随着计算步数的增加而衰减, 该情况被称为“人工阻尼”或“算法阻尼”, 这是由选用的算法造成的, 应当尽量避免并选取更为合适的算法。记能量相对误差 $\delta = (E - E_0)/E_0$, 用常用的 Adams 法、Runge-Kutta 法和 Gear 法求解方程(4)并计算能量相对误差 δ , 通过误差值的大小和计算时间的长短比较数值方法的优劣。表 1 给出了频率比取 1, 10 和 100 时, 各数值方法的比较 (所用计算机 CPU 为双核 2.00GHz, 内存 2.00GB, 软件版本为 Matlab 7.0), 其中 Adams 为自行编程的 Adams 预估校正法, 4 阶 R-K 为自行编程的 4 阶 Runge-Kutta 法, 两者皆为定步长方法, ode113、ode45 和 ode15s 为 Matlab 中提供的常微分求解器, 分别对应变阶 Adams 变步长法、Runge-Kutta 变步长法和 Gear 法, 表中 h 表示计算步长, ε 表示计算所需误差精度, δ 为能量相对误差, t 为计算所需时间。

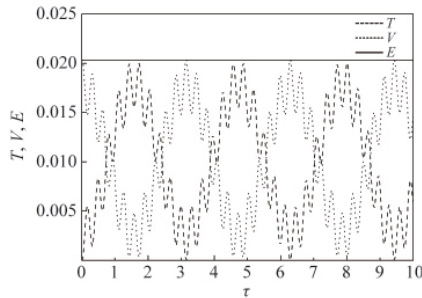
从表 1 可知, 随着 γ 的增大, 数值计算对步长和精度的

表 1 不同频率比下数值方法比较

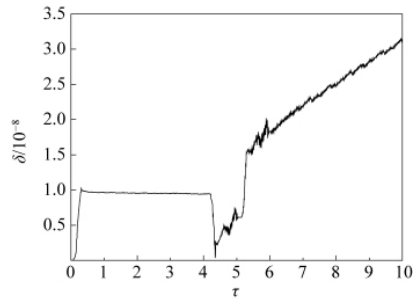
Table 1 Comparison of between numerical methods with different frequency ratios

数值方法	$\gamma=1$				$\gamma=10$				$\gamma=100$			
	h/s	ε	δ	t/s	h/s	ε	δ	t/s	h/s	ε	δ	t/s
Adams	10^{-2}	10^{-6}	1.86×10^{-6}	0.24	10^{-3}	10^{-6}	3.50×10^{-5}	1.07	10^{-4}	10^{-6}	5.13×10^{-4}	9.60
4 阶 R-K	10^{-2}	10^{-6}	8.22×10^{-8}	0.31	10^{-3}	10^{-6}	1.51×10^{-6}	1.80	10^{-4}	10^{-6}	2.21×10^{-5}	14.84
ode113	—	10^{-10}	1.99×10^{-10}	0.42	—	10^{-10}	2.26×10^{-8}	1.11	—	10^{-12}	9.64×10^{-10}	12.40
ode45	—	10^{-10}	2.28×10^{-8}	0.64	—	10^{-10}	3.90×10^{-7}	2.18	—	10^{-12}	5.43×10^{-8}	47.16
ode15s	—	10^{-10}	5.44×10^{-7}	1.50	—	10^{-10}	4.24×10^{-5}	3.47	—	10^{-12}	1.37×10^{-5}	63.90

要求越来越高,而计算产生的相对误差也越来越大,所需时间也越来越长。比较几种数值方法,发现在本文研究范围内用 ode113 得到的能量相对误差更小,说明其计算结果更为精确可靠,且计算效率更高,故本文之后的数值计算均采用 ode113 进行计算。图 3 给出了 γ 取 10 时用 ode113 计算得到的系统能量曲线和能量相对误差曲线,其中 T 为系统动能,用长虚线表示, V 为系统势能,用点表示, E 为系统机械能,用实线表示, δ 为能量相对误差,各物理量均已无量纲化。从图中可以看出系统机械能守恒,相对误差在 10^{-8} 量级上。



(a) 系统能量曲线
(a) System energy curve



(b) 系统机械能相对误差曲线
(b) Relative error curve of system mechanical energy

图 3 $\gamma=10$ 时用 ode113 计算得到的系统能量曲线和误差曲线
Fig. 3 System energy curve and error curve calculated by using ode113 when $\gamma=10$

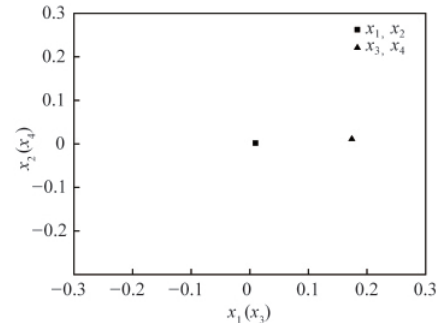
3 系统复杂动力学行为分析

对方程(4)进行稳定性分析,令 $\dot{x}_i=0 (i=1,2,3,4)$,得到系

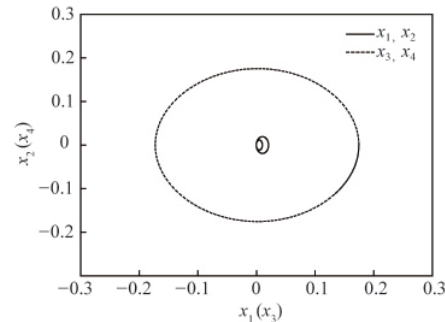
统两个平衡点 $X_1=[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 和 $X_2=[-\frac{2}{\gamma^2} \ 0 \ \pi \ 0]^T$ 。

计算在两个平衡点处的雅克比矩阵的特征值,发现第 1 个平衡点的特征值 $\alpha_{1,2}=\pm\gamma i, \alpha_{3,4}=\pm i$,都为零实部,根据 Lyapunov 稳定性准则无法判断平衡点稳定性。对第 2 个平衡点,特征值 $\alpha_{1,2}=\pm\gamma i, \alpha_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{\gamma^2}{2-\gamma^2}} i$,当 $0<\gamma<\sqrt{2}$ 时,特征值都为零实部,无法判断平衡点稳定性;当 $\gamma>\sqrt{2}$ 时,特征值存在正实部,根据 Lyapunov 稳定性准则可知平衡点不稳定。

在初始条件为 $X_0=[0.01 \ 0 \ 10^\circ \ 0]^T$ 时将频率比 γ 作为控制参数,取不同频率比 γ ,观察方程(4)的相图、庞加莱映射图(取 2π 为一个周期),分析弹簧摆的复杂动力学行为。图 4 为 $\gamma=1$ 时系统状态变量的庞加莱映射和相图,图 4(a)为系统



(a) 状态变量 $(x_1, x_2), (x_3, x_4)$ 庞加莱映射
(a) Poincaré map of status variables $(x_1, x_2), (x_3, x_4)$



(b) 状态变量 $(x_1, x_2), (x_3, x_4)$ 相图
(b) Phase diagram of status variables $(x_1, x_2), (x_3, x_4)$

图 4 $\gamma=1$ 时系统状态变量庞加莱映射和相图
Fig. 4 Poincaré map and phase diagram of the system status variables when $\gamma=1$

状态变量 (x_1, x_2) 和 (x_3, x_4) 的庞加莱映射图, 图中方块为状态变量 (x_1, x_2) 的庞加莱映射, 三角为状态变量 (x_3, x_4) 的庞加莱映射。图 4(b) 为系统状态变量 (x_1, x_2) 和 (x_3, x_4) 的相图, 图中实线为状态变量 (x_1, x_2) 的相轨迹, 虚线为状态变量 (x_3, x_4) 的相轨迹, 由图可知变量 x 和 θ 此时都做周期运动。图 5 为 $\gamma=2$ 时系统状态变量庞加莱映射图, 其中图 5(a) 为状态变量 (x_1, x_2)

的庞加莱映射, 图 5(b) 为状态变量 (x_3, x_4) 的庞加莱映射, 由图可知变量 x 和 θ 此时都做混沌运动。图 6 为 $\gamma=50$ 时系统状态变量的庞加莱映射图, 其中图 6(a) 为状态变量 (x_1, x_2) 的庞加莱映射, 图 6(b) 为状态变量 (x_3, x_4) 的庞加莱映射, 由图可知变量 x 和 θ 此时都做拟周期运动。

扩大初始条件和频率比的变化范围, 将初始摆角 θ_0 也作

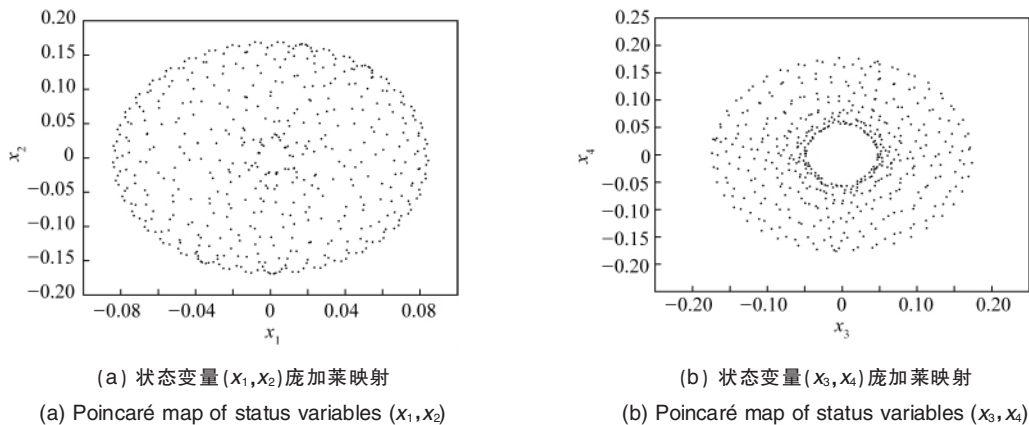


图 5 $\gamma=2$ 时系统状态变量庞加莱映射图
Fig. 5 Poincaré map of the system status variables when $\gamma=2$

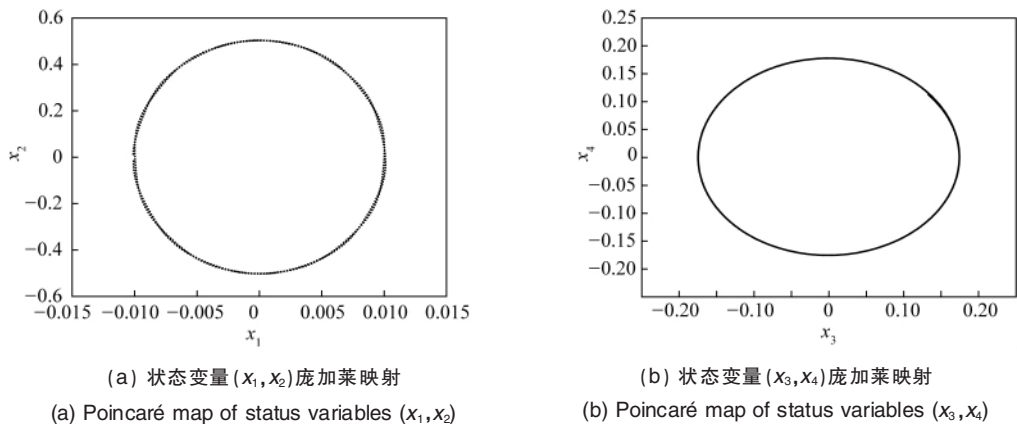


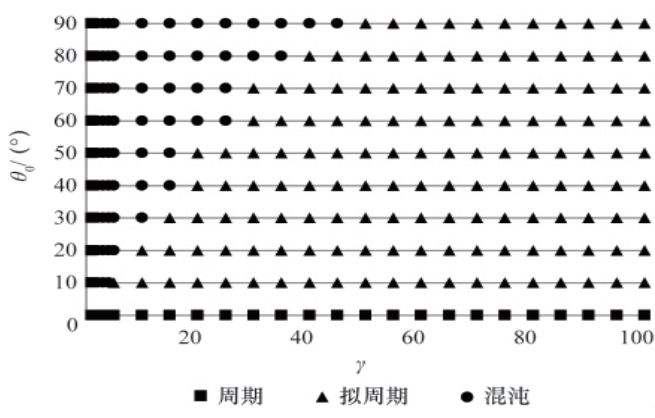
图 6 $\gamma=50$ 时系统状态变量庞加莱映射图
Fig. 6 Poincaré map of the system status variables when $\gamma=50$

为控制参数, 取初始摆角范围从 $0^\circ \sim 90^\circ$, 取 3 种弹簧初始伸长率 x_0 分别为 0.1, 0.01, 0.001, 在范围 1~100 内取不同频率比 γ , 根据方程(4)的相图和庞加莱映射图判断系统处于何种动力学性态, 以分析初始大摆角及频率比双参数对弹簧摆的复杂动力学行为有何影响。图 7~图 9 给出了在不同初始伸长率条件下, 弹簧摆系统不同时间尺度变量呈现出的不同动力学性态所对应的参数域图, 图中横坐标为频率比 γ 的参数变化范围, 纵坐标为初始摆角 θ_0 的参数变化范围。图 7 为 $x_0=0.1$ 时系统变量动力学性态参数域图, 其中图 7(a)、(b) 分别对应于变量 x, θ 。图 8(a)、(b) 分别为 $x_0=0.01$ 时系统变量 x, θ 所对应的动力学性态参数域图。图 9 为 $x_0=0.001$ 时系统变量对应

的动力学性态参数域图。

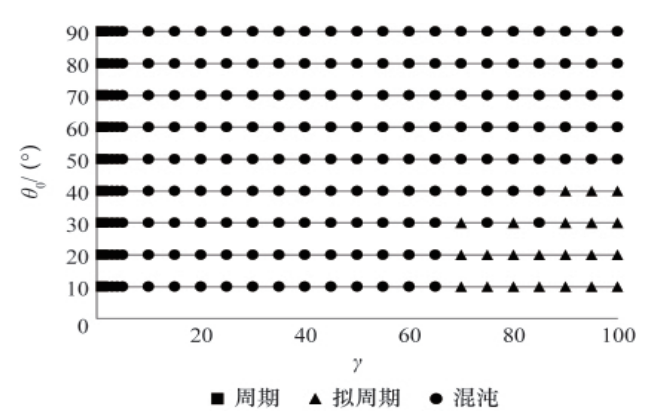
图 7~图 9 反映了刚柔耦合弹簧摆系统快慢变量的复杂动力学行为所对应的参数域, 数值模拟分析归纳如下。

- (1) 在同样的控制参数和初始条件下, 弹簧摆的两个变量 x 和 θ 可以有不同的动力学行为, 体现了双时间尺度变量系统运动的复杂性。
- (2) 由图 7~图 9 各分图最下行看出, 当初始摆角为 0° 时, 系统只有 x 方向上的周期振动, 不会激发 θ 方向上的摆动。
- (3) 由图 7~图 9 各分图最左列看出, 当系统既有初始摆角又有初始伸长率时, 当且仅当 $r=1$ 时, 变量 x 和 θ 均为周期运动。
- (4) 纵观各图发现, 当 $\gamma>1$, 系统既有初始摆角和初始伸



(a) 变量 x 动力学性态参数域图

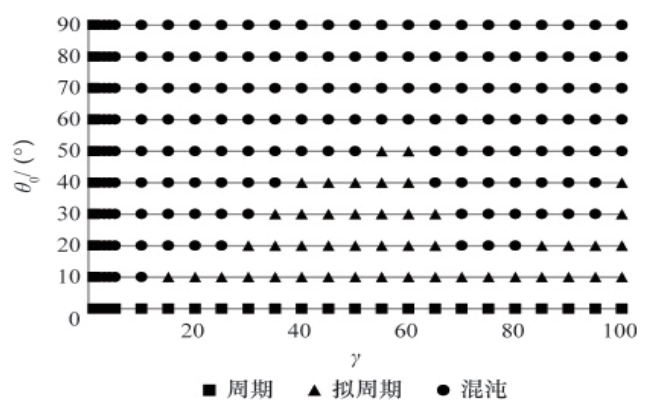
(a) Parameter domain map for the dynamical behaviors of variable x



(b) 变量 θ 动力学性态参数域图

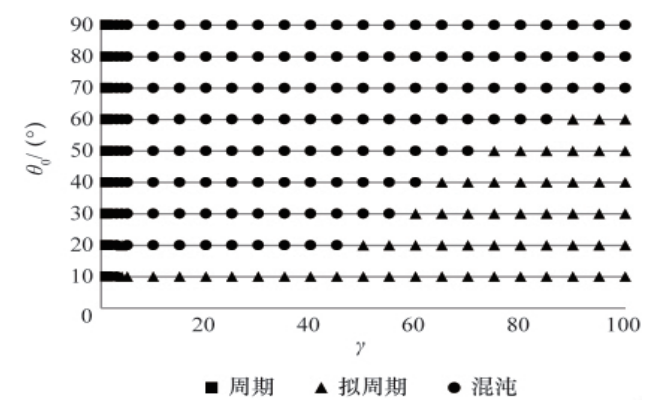
(b) Parameter domain map for the dynamical behaviors of variable θ

图 7 $x_0=0.1$ 时系统动力学性态参数域图
Fig.7 Parameter domain map of the system dynamical behaviors when $x_0=0.1$



(a) 变量 x 动力学性态参数域图

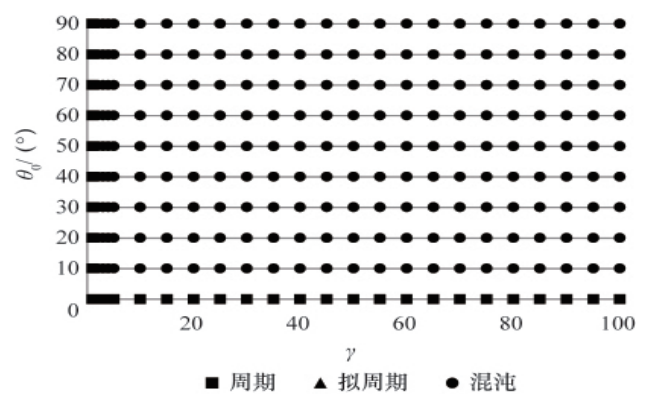
(a) Parameter domain map for the dynamical behaviors of variable x



(b) 变量 θ 动力学性态参数域图

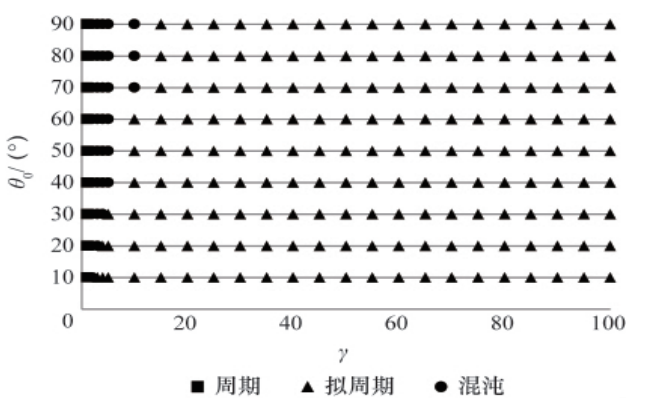
(b) Parameter domain map for the dynamical behaviors of variable θ

图 8 $x_0=0.01$ 时系统动力学性态参数域图
Fig. 8 Parameter domain map of the system dynamical behaviors when $x_0=0.01$



(a) 变量 x 动力学性态参数域图

(a) Parameter domain map for the dynamical behaviors of variable x



(b) 变量 θ 动力学性态参数域图

(b) Parameter domain map for the dynamical behaviors of variable θ

图 9 $x_0=0.001$ 时系统动力学性态参数域图
Fig. 9 Parameter domain map of the system dynamical behaviors when $x_0=0.001$

长率时,变量会产生混沌和拟周期的复杂动力学行为。由图 9 (a)、(b)可以看出,对于初值 $x_0=0.001$,在 (γ, θ_0) 参数范围内,变量 x 基本处于混沌状态,变量 θ 基本处于拟周期运动状态。由图 8(a)、(b)可以看出,对于初值 $x_0=0.01$,在 (γ, θ_0) 参数范围内,变量 x 和 θ 既有拟周期运动又有混沌运动;当初始摆角较小时,变量 x 和 θ 容易出现拟周期运动,当初始摆角逐渐增大时,变量 x 和 θ 混沌运动逐渐增多;而对应于某一初始摆角,随着 γ 的增大, θ 逐渐由混沌运动变为拟周期运动。由图 7 (a)、(b)可以看出,对于初值 $x_0=0.1$,在 (γ, θ_0) 参数范围内,变量 x 和 θ 既有拟周期运动又有混沌运动;初始摆角越大,变量 x 和 θ 混沌状态越多;当 $\gamma>50$ 时变量 x 基本处于拟周期状态,而随着 γ 的增大, θ 也开始出现拟周期运动。

(5) 顺序比较图 7、图 8、图 9 中变量的动力学性态可以发现,随着弹簧初始伸长率的减小,变量 x 混沌状态逐渐增多(对应各图(a)),而变量 θ 拟周期运动状态逐渐增多(对应各图(b)),两者变化规律相反。

4 结论

本文针对同时具有快慢变量的时变、强非线性的刚柔耦合多体系统,以弹簧摆作为研究模型,对系统的复杂动力学行为进行数值模拟与定性分析。通过比较各种常用数值方法,找到了更适用于此类容易产生刚性问题的方程的数值计算方法。以初始条件和频率比作为控制参数,给出了一定范围内弹簧摆系统不同动力学性态对应的参数域,并讨论了系统不同变量的复杂动力学行为与控制参数间的相关性。本课题研究将非线性动力学中的定性分析思路与多体系统动力学中的数值仿真结合起来,在本文基础上进一步分析刚柔耦合系统数值解的稳定性与方程动力学性态间的影响,试图对系统动力学数值仿真的正确性与可靠性提出判据,这将对多体系统动力学的发展具有重要的意义。

参考文献 (References)

[1] 司丽荣, 张竞夫. 弹簧摆内共振现象的实验研究 [J]. 物理实验, 2002,

22(3): 9-12.

Si Lirong, Zhang Jingfu. Physics Experimentation, 2002, 22(3): 9-12.

[2] 郑建龙, 虞献文. 弹簧摆的内共振特性分析 [J]. 物理与工程, 2010, 20(2): 13-16.

Zheng Jianlong, Yu Xianwen. Physics and Engineering, 2010, 20(2): 13-16.

[3] 李欣业, 张华彪, 贺丽娟, 等. 内共振关系对弹簧摆动力学行为的影响 [J]. 动力学与控制学报, 2011, 9(2): 152-157.

Li Xinye, Zhang Huabiao, He Lijuan, et al. Journal of Dynamics and Control, 2011, 9(2): 152-157.

[4] Won K L, Hae D P. Chaotic dynamics of a harmonically excited spring-pendulum system with internal resonance [J]. Nonlinear Dynamics, 1997, 14(3): 211-229.

[5] 石玉仁, 薛具奎. 弹簧摆的混沌行为 [J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 2001, 37(3): 91-97.

Shi Yuren, Xue Jukui. Journal of Northwest Normal University: Natural Science Edition, 2001, 37(3): 91-97.

[6] Amer T S, Bek M A. Chaotic responses of a harmonically excited spring pendulum moving in circular path [J]. Nonlinear Dynamics: Real World Applications, 2009, 10(5): 3196-3202.

[7] 李银山, 树学锋. 弹簧摆的内共振和混沌运动 [J]. 太原理工大学学报, 1998, 29(6): 555-559.

Li Yinshan, Shu Xuefeng. Journal of Taiyuan University of Technology, 1998, 29(6): 555-559.

[8] 杨正波, 夏清华, 刘思平. 不同控制参数下的弹簧摆 [J]. 大学物理, 2011, 30(5): 23-26.

Yang Zhengbo, Xia Qinghua, Liu Siping. College Physics, 2011, 30(5): 23-26.

[9] van der Weele J P, de Kleine E. The order-chaos-order sequence in the spring pendulum [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 1996, 228(1-4): 245-272.

[10] Maciejewski A J, Przybylska M, Weil J. Non-integrability of the generalized spring-pendulum problem [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2004, 37(7): 2579-2597.

[11] 管慧, 李维善. 弹簧摆运动的研究 [J]. 大学物理, 2010, 29(3): 16-20.

Guan Hui, Li Weishan. College Physics, 2010, 29(3): 16-20.

[12] Coulet P, Gilli J M, Rousseaux G. On the critical equilibrium of the spiral spring pendulum [J]. Proceeding of the Royal Society A, 2010,

466(2114): 407-421.

(责任编辑 吴晓丽)



《科技导报》征集“封面文章”

为快速反映我国最新科技研究成果,《科技导报》拟利用刊物最显著位置——封面将最新科研成果第一时间予以突出报道。来稿要求:研究成果具创新性或新颖性;反映该领域我国乃至世界前沿研究水平;可以图片形式予以反映,图片美观、清晰、分辨率超过 300dpi;文章篇幅不限,要说明研究的背景、方法、取得的结果,以及结论。在线投稿:www.kjdb.org。