向量基本定理的几何表示

李奋勇 [1],**张金刚** [2]

1. 鄂尔多斯市教育教学研究室,内蒙古鄂尔多斯 017000
2. 中国科学院光电研究院,北京 100094

摘要　以纯向量为工具研究几何问题,将向量基本定理用几何形式表示,可以将几何中的基本元素点、线、面、体用一个公式表示,实现了几何问题与向量问题相互转化,从理论上给出了几何问题和代数问题相互转化的又一方法。这一方法不仅涵盖了笛卡儿的坐标法,而且从非正交的角度推广了笛卡儿的坐标法,并由此引出了许多新的结论、方法和题型,并从几何的角度推广了向量基本定理,给出了其确切的几何解释,形成了相应的向量几何理论。从实体几何的角度看,它解决了几何应用过程中的许多计算、证明和作图问题,并且丰富了欧几里得空间的内涵。

关键词　纯向量;几何;向量;向量几何理论

中图分类号　O183.1　　**文献标志码**　A　　**doi**　10.3981/j.issn.1000-7857.2013.14.011

Geometric Representation of Fundamental Theorem of Vector

LI Fenyong[1], ZHANG Jingang[2]

1. Laboratory of Education and Teaching for Ordos, Ordos 017000, Inner Mongolia Autonomous Region, China
2. Academy of Opto-Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100094, China

Abstract　This paper studies the geometry problems with a pure vector tool. The geometry and vector problems can be transformed into each other, and this paper establishes the corresponding vector geometry theory to completely solve this transformation problem, covering the Cartesian coordinate method. A new, independent, complete mathematics system is formed, which leads to a lot of new methods and problems. From a geometric point of view to generalize the fundamental vector theorem, the fundamental vector theorem would have a precise geometric interpretation. From the solid geometry perspective, it not only solves a number of calculation, proof and mapping problems in the application process, and also enriches the connotation of the Euclidean space.

Keywords　pure vector; geometry; vector; vector geometric theory

0　引言

向量是沟通代数和几何之间的一座桥梁, 也是最完美、最简单的数形结合工具,但如何将其应用于几何中,仍有一些根本性问题没有得到解决。诸如,如何把向量问题与几何问题互相转化,以及转化后向量系数的几何意义等。虽然笛卡儿坐标法[1]在一定程度上解决了以上问题,但它是一种正交的、特殊的情况,不具有一般性,也未给出向量系数的几何意义。本文通过对向量基本定理[2]的推广,用纯向量巧妙地把几何中的点、线、面、体,以及点、线段长度、几何图形面积、几何体体积用一个统一的公式表示。从理论上解决了这一问题,把向量理论推广到几何空间,给出了空间向量基本定理的几何表示[3],并可推广到 n 维欧几里得空间[4],为用纯向量方法研究一般性的几何问题奠定了理论基础。

1　直线上向量基本定理的几何表示

1.1　空间向量基本定理

引理　n 维向量空间的任一向量都可以唯一地表示为这个空间给定基底的线性组合[1]。

1.2　直线上向量基本定理的几何表示

定理 1　如图 1 所示，设 O,A 是直线 l 上的两个定点

收稿日期:2012-11-23;修回日期:2013-02-18

作者简介:李奋勇,高级教师,研究方向为用纯向量方法解决几何问题,电子信箱:lfydlxdzx78@126.com;张金刚(通信作者),助理研究员,研究方向为光电工程,用纯向量方法解决几何问题,电子信箱:jingangzhang@nssc.ac.cn

(OA 为基底),M 是 l 上任一点,则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{OM}{OA}\cdot\overrightarrow{OA} \tag{1}$$

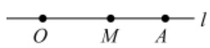

图 1

Fig. 1

其中,OA,OM 为对应向量的长度(下同),可为任意实数,也就是线段的相对(有向)长度,只取正值的长度为绝对长度。明显地,$OM+MA\equiv OA$。

向量系数线段的符号规则为:规定 $OA>0$,当点 A,M 在点 O 的同侧时,$OM>0$,两侧时,$OM<0$。

2　平面向量基本定理的几何表示

2.1　平面上直线向量基本定理的几何表示

定理 2　如图 2 所示,设 OAB 为三角形,M 是直线 AB 上的任一点($\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 为基底),则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{MB\cdot\overrightarrow{OA}+AM\cdot\overrightarrow{OB}}{AB} \tag{2}$$

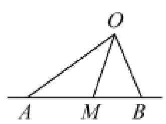

图 2

Fig. 2

证明　由式(1)得

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{AM}{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{AB\cdot\overrightarrow{OA}+AM\cdot\overrightarrow{AB}}{AB}$$

$$=\frac{AB\cdot\overrightarrow{OA}+AM\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})}{AB}=\frac{MB\cdot\overrightarrow{OA}+AM\cdot\overrightarrow{OB}}{AB}$$

式(2)具有极强的对称性。分子中每一向量的系数都等于把分母中对应于分子向量终点的字母换成 M 后所得有向线段的数量,这也是直线的向量参数方程。注意到:$AM+MB\equiv AB$。本文中每一向量基本定理都具有这一结构特征。

向量系数线段的符号规则:规定 $AB>0$,当 AM 或 MB 与 AB 同向时为正,反向时为负。

2.2　平面向量基本定理的几何表示

定理 3　如图 3 所示, 设 OAB 为三角形,M 为平面 OAB 上的任一点($\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 为基底),则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{S_{\Delta OMB}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{\Delta OAM}\cdot\overrightarrow{OB}}{S_{\Delta OAB}} \tag{3}$$

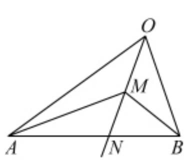

图 3

Fig. 3

证明　设直线 OM 交 AB 于 N,d 为点 O 到直线 AB 的距离,由式(1)、式(2)得

$$\overrightarrow{OM}=\frac{OM}{ON}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{OM}{ON}\,\frac{NB\cdot\overrightarrow{OA}+AN\cdot\overrightarrow{OB}}{AB}$$

$$=\frac{OM}{ON}\,\frac{(NB\cdot d)\overrightarrow{OA}+(AN\cdot d)\overrightarrow{OB}}{AB\cdot d}$$

$$=\frac{OM}{ON}\,\frac{S_{\Delta ONB}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{\Delta OAN}\cdot\overrightarrow{OB}}{S_{\Delta OAB}}$$

因为 $\frac{S_{\Delta OMB}}{S_{\Delta ONB}}=\frac{S_{\Delta OAM}}{S_{\Delta OAN}}=\frac{OM}{ON}$,所以有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{S_{\Delta OMB}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{\Delta OAM}\cdot\overrightarrow{OB}}{S_{\Delta OAB}}$$

当 $OM/\!/AB$ 时,结论仍然成立。

这里,三角形的面积为相对(有向)面积,可为任意实数,只取正值的面积称为绝对面积。

向量系数面积的符号规则为: 规定 $S_{\Delta OAB}>0$, 对于面积 $S_{\Delta OMB}$(或 $S_{\Delta OAM}$),如果点 A,M(B,M)在直线 OB(OA)的同侧,$S_{\Delta OMB}>0$($S_{\Delta OAM}>0$),两侧则 $S_{\Delta OMB}<0$($S_{\Delta OAM}<0$);或者,规定 $S_{\Delta OAB}>0$,当点 O,A,M 或 O,M,B 与 O,A,B 按顺或逆时针方向排列的顺序相同时,对应的面积为正,反之为负。

2.3　空间中平面向量基本定理的几何表示

定理 4　如图 4,设 O–ABC 为三棱锥,M 为平面 ABC 上的任一点($\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 为基底),则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{S_{\Delta MBC}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{\Delta AMC}\overrightarrow{OB}+S_{\Delta ABM}\cdot\overrightarrow{OC}}{S_{\Delta ABC}} \tag{4}$$

证明　由式(3)得

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{S_{\Delta AMC}\cdot\overrightarrow{AB}+S_{\Delta ABM}\cdot\overrightarrow{AC}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$=\frac{S_{\Delta ABC}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{\Delta AMC}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+S_{\Delta ABM}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})}{S_{\Delta ABC}}$$

$$=\frac{S_{\Delta MBC}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{\Delta AMC}\overrightarrow{OB}+S_{\Delta ABM}\cdot\overrightarrow{OC}}{S_{\Delta ABC}}$$

注:$S_{\Delta MBC}+S_{\Delta AMC}+S_{\Delta ABM}\equiv S_{\Delta ABC}$。当 $O\in$ 平面 ABC 时上述结论也成立。

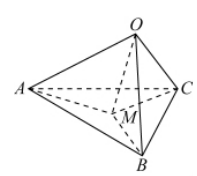

图 4

Fig. 4

向量系数面积的符号规则同式(3)。式(4)也是平面向量的参数方程。

3　空间向量基本定理的几何表示

3.1　空间向量基本定理的几何表示

定理 5　如图 5 所示, 设 O-ABC 为三棱锥,M 为空间任一点($\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 为基底),则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{V_{O\text{-}MBC}\cdot\overrightarrow{OA}+V_{O\text{-}AMC}\cdot\overrightarrow{OB}+V_{O\text{-}ABM}\cdot\overrightarrow{OC}}{V_{O\text{-}ABC}} \quad (5)$$

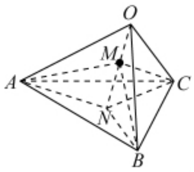

图 5

Fig. 5

证明　设直线 OM 交平面 ABC 于 N,d 为点 O 到平面 ABC 的距离。由式(1)和式(4)得

$$\overrightarrow{OM}=\frac{OM}{ON}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{OM}{ON}\frac{S_{\Delta NBC}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{\Delta ANC}\cdot\overrightarrow{OB}+S_{\Delta ABN}\cdot\overrightarrow{OC}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$=\frac{OM}{ON}\cdot\frac{(S_{\Delta NBC}\cdot d)\overrightarrow{OA}+(S_{\Delta ANC}\cdot d)\overrightarrow{OB}+(S_{\Delta ABN}\cdot d)\overrightarrow{OC}}{S_{\Delta ABC}\cdot d}$$

$$=\frac{OM}{ON}\cdot\frac{V_{O\text{-}NBC}\cdot\overrightarrow{OA}+V_{O\text{-}ANC}\cdot\overrightarrow{OB}+V_{O\text{-}ABN}\cdot\overrightarrow{OC}}{V_{O\text{-}ABC}}$$

因为 $\frac{V_{O\text{-}MBC}}{V_{O\text{-}NBC}}=\frac{V_{O\text{-}AMC}}{V_{O\text{-}ANC}}=\frac{V_{O\text{-}ABM}}{V_{O\text{-}ABN}}=\frac{OM}{ON}$,所以有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{V_{O\text{-}MBC}\cdot\overrightarrow{OA}+V_{O\text{-}AMC}\cdot\overrightarrow{OB}+V_{O\text{-}ABM}\cdot\overrightarrow{OC}}{V_{O\text{-}ABC}}$$

当 OM//平面 ABC 时结论仍然成立。

这里的体积为相对(有向)体积,可为任意实数,只取正值的体积称为绝对体积。

向量系数体积的符号规则为:规定 $V_{O\text{-}ABC}>0$,把分母体积中的字母 A 换成 M 得分子向量$\overrightarrow{OA}$的系数 $V_{O\text{-}MBC}$。对于体积 $V_{O\text{-}MBC}$,如果点 A 与 M 在平面 OBC 的同侧,系数 $V_{O\text{-}MBC}>0$,两侧则 $V_{O\text{-}MBC}<0$,其余系数体积的符号类推;或者,四面体的任一面所在的平面把空间分成两部分,规定含四面体的部分为正半空间,不含的为负半空间。如果空间一点在某面分成的正半空间内,则这点与四面体的这个面构成的新四面体的体积为正,反之为负。当点在所在的平面上时体积为 0,显然 $V_{O\text{-}ABC}>0$。例如设点 M 在平面 OBC 分出的负半平面上,则 $V_{O\text{-}MBC}<0$。

3.2　空间向量的四面体表示

推论　设 $ABCD$ 为四面体,O,M 为空间任两点,则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{V_{M\text{-}BCD}\cdot\overrightarrow{OA}+V_{M\text{-}ACD}\cdot\overrightarrow{OB}+V_{M\text{-}ABD}\cdot\overrightarrow{OC}+V_{M\text{-}ABC}\cdot\overrightarrow{OD}}{V_{ABCD}} \quad (6)$$

证明　由式(6)得

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{V_{M\text{-}ACD}\cdot\overrightarrow{AB}+V_{M\text{-}ABD}\cdot\overrightarrow{AC}+V_{M\text{-}ABC}\cdot\overrightarrow{AD}}{V_{ABCD}}$$

$$=\frac{V_{ABCD}\overrightarrow{OA}+V_{M\text{-}ACD}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+V_{M\text{-}ABD}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+V_{M\text{-}ABC}\cdot(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})}{V_{ABCD}}$$

$$=\frac{V_{M\text{-}BCD}\cdot\overrightarrow{OA}+V_{M\text{-}ACD}\cdot\overrightarrow{OB}+V_{M\text{-}ABD}\cdot\overrightarrow{OC}+V_{M\text{-}ABC}\cdot\overrightarrow{OD}}{V_{ABCD}}$$

注:$V_{M\text{-}BCD}+V_{M\text{-}ACD}+V_{M\text{-}ABD}+V_{M\text{-}ABC}\equiv V_{ABCD}$。向量系数体积的符号规则同式(5)。

4　空间向量基本定理的统一几何表示

4.1　定义

设$(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\cdots,\overrightarrow{OA_n})$为线性无关的有序向量组[4],$|(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\cdots,\overrightarrow{OA_n})|=f_n(A_i)$为该向量组的绝对量度;把$(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\cdots,\overrightarrow{OA_n})$中的第 i 个向量$\overrightarrow{OA_i}$换成$\overrightarrow{OM}$后得向量组$(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\cdots,\overrightarrow{OM},\cdots,\overrightarrow{OA_n})$,$\pm|(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\cdots,\overrightarrow{OM},\cdots,\overrightarrow{OA_n})_i|=f_{ni}(\overrightarrow{OM})$称为向量组的相对量度。绝对量度恒为正,相对量度可正可负。在三维以内的几何空间,当把基底向量中的终点字母 A_i 换成 M 后,如果点 A_i 与 M 在余下各终点构成的几何图形(点、直线、平面等)的同侧,则 $f_{ni}(\overrightarrow{OM})>0$,反之 $f_{ni}(\overrightarrow{OM})<0$ $(i=1,2,\cdots,n)$。

4.2　空间向量基本定理的统一几何表示

设向量$\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\cdots,\overrightarrow{OA_n}$为 n 维向量空间的一组基底,$\overrightarrow{OM}$为向量空间的任一向量,则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{f_{n1}(\overrightarrow{OM})\overrightarrow{OA_1}+f_{n2}(\overrightarrow{OM})\overrightarrow{OA_2}+\cdots+f_{nn}(\overrightarrow{OM})\overrightarrow{OA_n}}{f_n(\overrightarrow{OA_i})} \quad (7)$$

关于空间向量组的量度的定义与计算问题,将在后续的有关文章中介绍,此处不再赘述。

5　结论

本文以纯向量为工具研究几何问题,将向量基本定理用几何形式表示,将几何中的基本元素点、线、面、体用公式表示,实现了几何问题与向量问题相互转化,从理论上给出了几何问题和代数问题相互转化的又一方法,并由此引出了许多新的结论、方法和题型,从几何的角度推广了向量基本定理,给出了其确切的几何解释,形成了相应的向量几何理论。从实体几何的角度看,解决了几何应用过程中的许多计算、证明和作图问题,丰富了欧几里得空间的内涵。

参考文献(References)

[1] 杨文茂. 空间解析几何[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2006: 8-26.
Yang Wenmao. Space analytic geometry [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2006: 8-26.

[2] 北京大学数学力学系. 高等代数 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1978: 236-240.
School of Mathematical Sciences, Peking University. Higher algebra[M]. Beijing: People's Education Press, 1978: 236-240.

[3] 朱鼎勋. 空间解析几何[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1981: 77-78.
Zhu Dingxun. Space analytic geometry [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1981: 77-78.

[4] 课程教材研究所. 高中数学选修 4 [M]. A 版. 北京: 人民教育出版社, 2009: 93.
Curriculum Materials Institute of People's Education Press. Mathematics for high school 4[M]. A ed. Beijing: People's Education Press, 2009: 93.

(责任编辑　朱宇,马宇红)