

OCS4 格式的数值边界格式及其渐近稳定性

刘晓, 李一帆, 李文强, 王贞化

河南师范大学数学与信息科学学院, 河南新乡 453007

摘要 根据多项式拟合数值边界格式(SFEBS)和 Taylor 展开数值边界格式(TEBS)相结合的思想, 构造了与优化 3 对角 4 阶跳点紧致差分格式(OCS4)及其插值格式(OCI4)相匹配的具有 4 阶精度的数值边界格式(SF-TEBS4)。通过计算格式特征值的理论分析表明, OCS4、OCI4 格式在与数值边界格式 SF-TEBS4 格式相结合时, 数值格式在整体上能够满足渐进稳定性的要求。一阶导数数值试验表明, OCS4、OCI4 与 4 阶数值边界格式 SF-TEBS4 在数值模拟中相结合使用时, 能够保证格式整体精度达到 4 阶, 且计算误差较小; 行波解数值模拟表明, 这些格式的组合能够有效抑制数值计算的误差, 具有能够长时间保持群速度和较强渐进稳定性的特性。理论分析和数值算例均表明, SF-TEBS4 与 OCS4 和 OCI4 相结合, 能够很好地求解小尺度波动问题。

关键词 多项式拟合; Taylor 展开; 数值边界格式; 渐近稳定性; 整体精度

中图分类号 O241.6

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2012.36.003

A Numerical Boundary Scheme of OCS4 and Its Asymptotic Stability

LIU Xiao, LI Yifan, LI Wenqiang, WANG Zhenhua

College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan Province, China

Abstract Based on the ideas of the polynomial fitting numerical boundary scheme (SFEBS) and the Taylor expansion boundary scheme (TEBS), a fourth-order numerical boundary scheme (SF-TEBS4) is proposed in this paper. The SF-TEBS4 is an extension of the optimized fourth-order staggered tridiagonal compact difference scheme (OCS4) and the corresponding interpolation scheme (OCI4) on the staggered grid system, developed by the authors recently, for the equations with non-periodical physical boundary conditions. The asymptotic stability of the overall difference scheme, the combination of the numerical boundary scheme SF-TEBS4, and the inner points schemes OCS4 and OCI4, is analyzed. It is shown that, SF-TEBS4 combined with OCS4 and OCI4, can achieve the asymptotic stability. Moreover, the numerical experiment for determining the first order derivative of a function indicates that (1) the global accuracy of our scheme is fourth-order, and that (2) the computational error is reduced greatly. The numerical experiment for solving the wave propagation problem shows that the combination of SF-TEBS4 with OCS4 and OCI4 can effectively suppress the growth rate of the computational error, preserve the group velocity and the numerical asymptotic stability. The theoretical and numerical analyses show that the combination of SF-TEBS4 with OCS4 and OCI4 can be applied to simulate the propagation of small scale waves.

Keywords polynomial fitting; Taylor expansion; numerical boundary scheme; asymptotic stability; global accuracy

0 引言

随着科学技术和计算机水平的不断提高, 数值计算已经广泛应用于计算电磁学、气动声学、空气动力学等领域。在实际应用中, 人们逐渐认识到用传统差分方法计算的数值解已经不能满足求解实际问题的需要, 为此, 研究人员便开始探

索更加高效的算法以提高数值格式的整体计算精度并得到更为准确的数值解。

在高精度差分格式的研究和应用方面, 1992 年, Lele^[1]提出具有谱精度的紧致差分格式, 与传统差分格式相比, 它能够很好地保持高频波动的谱特征。2003 年, Nagarajan^[2-3]等把

收稿日期: 2012-06-25; 修回日期: 2012-10-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(41004063); 河南省教育厅自然科学研究计划项目(2010B110014); 河南师范大学校级青年骨干教师培养资助计划项目
作者简介: 刘晓, 副教授, 研究方向为计算数学、大气动力学, 电子信箱: xliu@spaceweather.ac.cn

Lele 提出的具有谱精度并能保持高频波动谱特征的紧致差分格式推广到跳点网格中,推广后的格式能够有效地消除同位网格系统下的格点振荡问题。2004 年 Piller 和 Stalio 利用 Kim 和 Lee 优化紧致差分格式的思想 and 有限体积方法,在 Nagarajan 的基础上优化了 3 对角 4 阶跳点紧致差分格式 OCS4,将其可精确求解波数提高到 0.74π ^[4]。最近,刘晓等^[5]利用修正波数应在充分大的波数范围内接近准确波数的思想再次优化 3 对角 4 阶跳点紧致差分格式 OCS4 及相应的插值格式 OCI4,将 OCS4 和 OCI4 格式的精确求解区间分别提高到 0.86π 和 0.63π 。

在实际问题计算中,最为关注的是内点上差分格式的计算精度和分辨能力。因此,通常要求内点格式具有高精度高分辨率的紧致差分格式,这对于提高数值模拟的准确性,减小计算误差是非常重要的。然而,要想完成整个数值计算,必须要构造与内点格式的精度相匹配的数值边界格式,然后再从整体上研究内点格式和边界格式相结合时对算法的稳定性影响,这是十分必要的^[6]。1992 年,Lele^[1]利用 Taylor 展开的思想构造了具有 3 阶和 4 阶精度的数值边界格式,这种边界格式在与 4 阶紧致差分格式结合使用时,在 G-K-S 意义下是稳定的^[3,7]。2004 年,Givoli^[8]对无反射边界条件的种类和发展做了总结并发展了一类高阶的无反射边界条件。2006 年,刘晓等^[9]基于物理量在人工边界内外应该光滑过渡的思想,利用多项式拟合的方法构造出光滑拟合外推数值边界格式(SFEBS),并分析了 SFEBS 格式在 G-K-S 意义下的稳定性^[3]。

本文基于多项式拟合数值边界格式(SFEBS)和 Taylor 展开数值边界格式(TEBS)相结合的思想,构造出与文献[5]中优化 3 对角 4 阶紧致格式相匹配的具有 4 阶精度的数值边界格式 SF-TEBS4。由于 Fourier 分析通常只能分析内点格式的数值稳定性,因此将利用内点格式和边界格式统一考虑的方法^[6]证明本文中构造的数值边界格式具有渐近稳定性。

1 OCS4 格式的数值边界格式

1.1 OCS4 格式和 OCI4 格式

优化 3 对角 4 阶跳点紧致差分格式 OCS4 的构造方法和计算效果已在文献[5]中有详细的描述,这里简单列出主要公式:

$$\alpha u'_{i-1} + u'_i + \alpha u'_{i+1} = b \frac{u_{i+3/2} - u_{i-3/2}}{3\Delta x} + a \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{\Delta x} \quad (1)$$

式中的优化系数 a, b, α 如表 1 所示^[5]。

表 1 跳点紧致差分格式的优化系数

Table 1 Optimized coefficients of compact staggered scheme

优化系数	a	b	α
OCS4	0.9661264	0.4575367	0.2118315

优化 3 对角 4 阶紧致插值格式 OCI4 的构造方法和分辨能力也在文献[5]中有详细的描述,这里简单给出计算公式:

$$\alpha u'_{i-1} + u'_i + \alpha u'_{i+1} = \frac{b}{2} (u_{i+3/2} + u_{i-3/2}) + \frac{a}{2} (u_{i+1/2} + u_{i-1/2}) \quad (2)$$

式中的优化系数 a, b, α 如表 2 所示^[5]。

表 2 紧致插值格式的优化系数

Table 2 Optimized coefficients of compact interpolation scheme

优化系数	a	b	α
OCI4	1.5530072	0.1318043	0.3424058

1.2 SF-TEBS4 数值边界格式的构造

对于高阶差分格式,只有构造与内点格式精度一致的稳定的边界格式,才能有效确保数值计算的稳定性。因此,本文将对优化 3 对角 4 阶跳点紧致格式 (OCS4 和 OCI4 格式) 构造具有 4 阶精度的边界格式,在确保格式整体稳定性的基础上使计算精度达到 4 阶。利用 OCS4 和 OCI4 格式计算时的网格剖分如图 1 所示,网格剖分均采用等距剖分。图中, u_i ($i=1, 2, \dots, n$) 为网格整点处数值, $u_{i+1/2}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) 为网格半点处数值, u_1 和 u_n 为边界点处数值,网格步长用 Δx 表示。

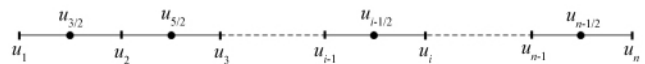


图 1 网格剖分示意图

Fig. 1 Schematic diagram for grids

1.2.1 OCS4 格式的数值边界格式构造

对于 OCS4 格式,给出带边界参数的 4 阶边界格式如下^[1-2,6]。

左边界格式:

$$i=1 \quad u'_1 + \alpha u'_2 = \frac{1}{\Delta x} (d_1 u_{3/2} + d_2 u_{5/2} + d_3 u_{7/2} + d_4 u_{9/2} + d_5 u_{11/2}) \quad (3)$$

$$i=2 \quad \alpha u'_1 + u'_2 + \alpha u'_3 = \frac{b}{3\Delta x} (u_{7/2} - u_{1/2}) + \frac{a}{\Delta x} (u_{5/2} - u_{3/2}) \quad (4)$$

右边界格式:

$$i=n-1 \quad \alpha u'_{n-2} + u'_{n-1} + \alpha u'_n = \frac{b}{3\Delta x} (u_{n+1/2} - u_{n-5/2}) + \frac{a}{\Delta x} (u_{n-1/2} - u_{n-3/2}) \quad (5)$$

$$i=n \quad \alpha u'_{n-1} + u'_n = \frac{1}{\Delta x} (d_6 u_{n-1/2} + d_7 u_{n-3/2} + d_8 u_{n-5/2} + d_9 u_{n-7/2} + d_{10} u_{n-9/2}) \quad (6)$$

而式(4)中的 $u_{1/2}$ 和式(5)中的 $u_{n+1/2}$ 为边界外点,这里利用 4 阶 SFEBS 边界格式^[3]处理:

$$u_{1/2} = 5u_{3/2} - 10u_{5/2} + 10u_{7/2} - 5u_{9/2} + u_{11/2} \quad (7)$$

$$u_{n+1/2} = 5u_{n-1/2} - 10u_{n-3/2} + 10u_{n-5/2} - 5u_{n-7/2} + u_{n-9/2} \quad (8)$$

然后,将式(7)代入式(4),得到 OCS4 格式的 4 阶精度左边界格式:

$$i=1 \quad u'_1 + \alpha u'_2 = \frac{1}{\Delta x} (d_1 u_{3/2} + d_2 u_{5/2} + d_3 u_{7/2} + d_4 u_{9/2} + d_5 u_{11/2}) \quad (9)$$

$$i=2 \quad \alpha u'_1 + u'_2 + \alpha u'_3 = \frac{1}{\Delta x} (e_1 u_{3/2} + e_2 u_{5/2} + e_3 u_{7/2} + e_4 u_{9/2} + e_5 u_{11/2}) \quad (10)$$

将式(8)代入式(6),可以得到 OCS4 格式带参数边界的 4 阶精度右边界格式:

$$i=n-1 \quad \alpha u'_{n-2} + u'_{n-1} + \alpha u'_n = \frac{1}{\Delta x} (e_6 u_{n-1/2} + e_7 u_{n-3/2} + e_8 u_{n-5/2} + e_9 u_{n-7/2} + e_{10} u_{n-9/2}) \quad (11)$$

$$i=n \quad \alpha u'_{n-1} + u'_n = \frac{1}{\Delta x} (d_6 u_{n-1/2} + d_7 u_{n-3/2} + d_8 u_{n-5/2} + d_9 u_{n-7/2} + d_{10} u_{n-9/2}) \quad (12)$$

利用 Taylor 展开和 SFEB5 边界格式的构造过程^[3]结合边界格式需要达到 4 阶精度的要求进行推导和计算, 可求得边界格式中的参数: $d_1 = -\frac{1}{24} (22\alpha + 93)$, $d_2 = \frac{1}{24} (17\alpha + 229)$, $d_3 = \frac{1}{8} (3\alpha - 75)$, $d_4 = \frac{1}{24} (-5\alpha + 111)$, $d_5 = \frac{1}{24} (\alpha - 22)$, $d_6 = \frac{1}{24} (22\alpha + 93)$, $d_7 = -\frac{1}{24} (17\alpha + 229)$, $d_8 = -\frac{1}{8} (3\alpha - 75)$, $d_9 = -\frac{1}{24} (-5\alpha + 111)$, $d_{10} = -\frac{1}{24} (\alpha - 22)$; $e_1 = -\frac{5}{3}b - a$, $e_2 = \frac{10}{3}b + a$, $e_3 = -3b$, $e_4 = \frac{5}{3}b$, $e_5 = -\frac{b}{3}$, $e_6 = \frac{5}{3}b + a$, $e_7 = -\frac{10}{3}b - a$, $e_8 = 3b$, $e_9 = -\frac{5}{3}b$, $e_{10} = \frac{b}{3}$ 。

1.2.2 OCI4 格式的数值边界格式构造

对于 OCI4 格式, 给出带边界参数的 4 阶边界格式如下^[2]:

$$i=1 \quad u_{3/2} + \alpha u_{5/2} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 \quad (13)$$

$$i=n-1 \quad \alpha u_{n-3/2} + u_{n-1/2} = c_5 u_n + c_6 u_{n-1} + c_7 u_{n-2} + c_8 u_{n-3} \quad (14)$$

同样利用 Taylor 展开和边界格式应具有 4 阶精度求解边界格式参数, 有^[2] $c_1 = \frac{1}{16} (-\alpha + 5)$, $c_2 = \frac{1}{16} (9\alpha + 15)$, $c_3 = \frac{1}{16} (9\alpha - 5)$, $c_4 = \frac{1}{16} (-\alpha + 1)$, $c_5 = \frac{1}{16} (-\alpha + 5)$, $c_6 = \frac{1}{16} (9\alpha + 15)$, $c_7 = \frac{1}{16} (9\alpha - 5)$, $c_8 = \frac{1}{16} (-\alpha + 1)$ 。

2 OCS4 格式的渐近稳定性分析

考虑一维对流方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

其中, 边界条件和初始条件为

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = g(t) \end{cases} \quad (16)$$

将计算区域平均分成 N 等分, 空间步长为 Δx 。将式(15)变形为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (17)$$

2.1 利用 SF-TEBS4、OCS4 和 OCI4 格式对方程离散

首先利用 SF-TEBS4、OCS4 格式对一阶导数进行离散。

将式(17)中的 $\partial u / \partial x$ 在边界点 ($i=1, 2, n-1, n$) 处按式(9)一式(12)离散, 内点 ($i=3, 4, \dots, n-2$) 处按式(1)离散并写成矩阵形式, 得

$$A_1 \frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (P_1 U + B g(t)) \quad (18)$$

这里, $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, $U^I = (u_{3/2}, u_{5/2}, \dots, u_{n-1/2})^T$, $g(t)$ 对应于初

始和边界条件。根据常微分方程组的稳定性理论知, $g(t)$ 的取值不影响方程组(18)的稳定性^[6,10]。不失一般性, 可在常微分方程组的稳定性分析中令 $g(t) = 0$ ^[6], 则:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} A_1^{-1} P_1 U \quad (19)$$

其中, A_1 为 $n \times n$ 阶矩阵, P_1 为 $n \times (n-1)$ 阶矩阵:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & 1 & \alpha \\ & & & \alpha & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \frac{b}{3} & -a & a & \frac{b}{3} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -\frac{b}{3} & -a & a & \frac{b}{3} \\ e_{10} & e_9 & e_8 & e_7 & e_6 \\ d_{10} & d_9 & d_8 & d_7 & d_6 \end{bmatrix}_{n \times (n-1)}$$

在式(19)中含有半点处的数值 U^I , 因此下面利用 SF-TEBS4 和 OCI4 格式对插值格式进行离散。将插值数值在边界点 ($i=1, n-1$) 处按式(13)、式(14)离散, 内点 ($i=2, 3, \dots, n-2$) 处按式(2)离散, 并写成矩阵形式, 得

$$U^I = A_2^{-1} P_2 U \quad (20)$$

其中, A_2 为 $(n-1) \times (n-1)$ 阶矩阵; P_2 为 $(n-1) \times n$ 阶矩阵:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & 1 & \alpha \\ & & & \alpha & 1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ \frac{b}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \frac{b}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \frac{b}{2} \\ c_{10} & c_9 & c_8 & c_7 & c_6 \end{bmatrix}_{(n-1) \times n}$$

2.2 渐近稳定性分析

将式(20)代入式(19)有

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (A_1^{-1} P_1) (A_2^{-1} P_2) U \quad (21)$$

令 $Q = (A_1^{-1} P_1) (A_2^{-1} P_2)$, 则 Q 为 $n \times n$ 阶矩阵。根据常微分方程组的稳定性理论: 当 Q 所有特征值的实部均不大于 0 时, 可以保证计算的稳定性, 这种稳定性称为渐近稳定性^[6,10]。

将 OCS4 和 OCI4 格式的系数和所对应的边界格式参数代入矩阵 Q 中进行计算, 得出 SF-TEBS4 格式在取不同网格

剖分 $n=50, n=100, n=150, n=200$ 时对应的矩阵 Q 的所有特征值。SF-TEBS4 格式的特征值随网格点数的变化情况如图 2 所示。

由图 2 看出,当网格剖分在取不同网格点数时,格式特征值的实部均不大于 0,说明 SF-TEBS4 格式与 OCS4 和 OCI4 格式结合使用时是渐近稳定的。

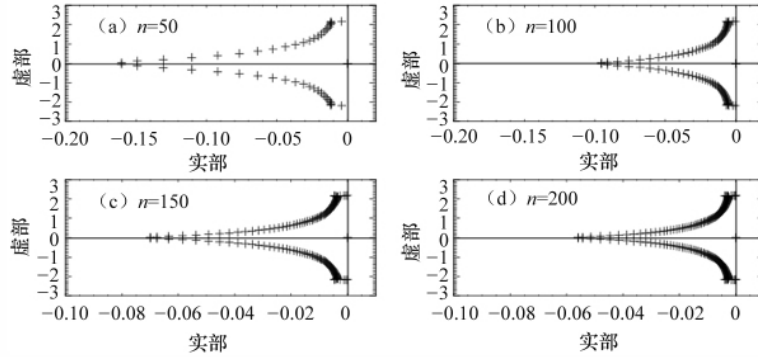


图 2 SF-TEBS4 格式的特征值随网格点数的变化

Fig. 2 Eigenvalues of SF-TEBS4 scheme vs grids

3 数值算例

3.1 误差及精度分析

算例 1 计算函数 $f(x)=\sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的一阶导函数验证 OCS4 格式及其边界格式的计算精度。计算中利用 OCS4、OCI4 及 SF-TEBS4 格式相结合的方法,计算误差及精度如表 3 所示。

表 3 中的数值均采用最大范数误差计算。计算结果表明,SF-TEBS4 与 OCS4、OCI4 格式结合使用时,在实际计算中的计算精度能够达到 4 阶且计算误差较小。

表 3 OCS4、OCI4 与 SF-TEBS4 格式结合在不同网格剖分下的误差及计算精度

Table 3 Errors and computational accuracy of OCS4、OCI4 with SF-TTBS4 in different grids

网格点数	误差	精度
100	2.0610×10^{-5}	3.9926
150	4.0320×10^{-6}	3.9968
200	1.2689×10^{-6}	3.9982

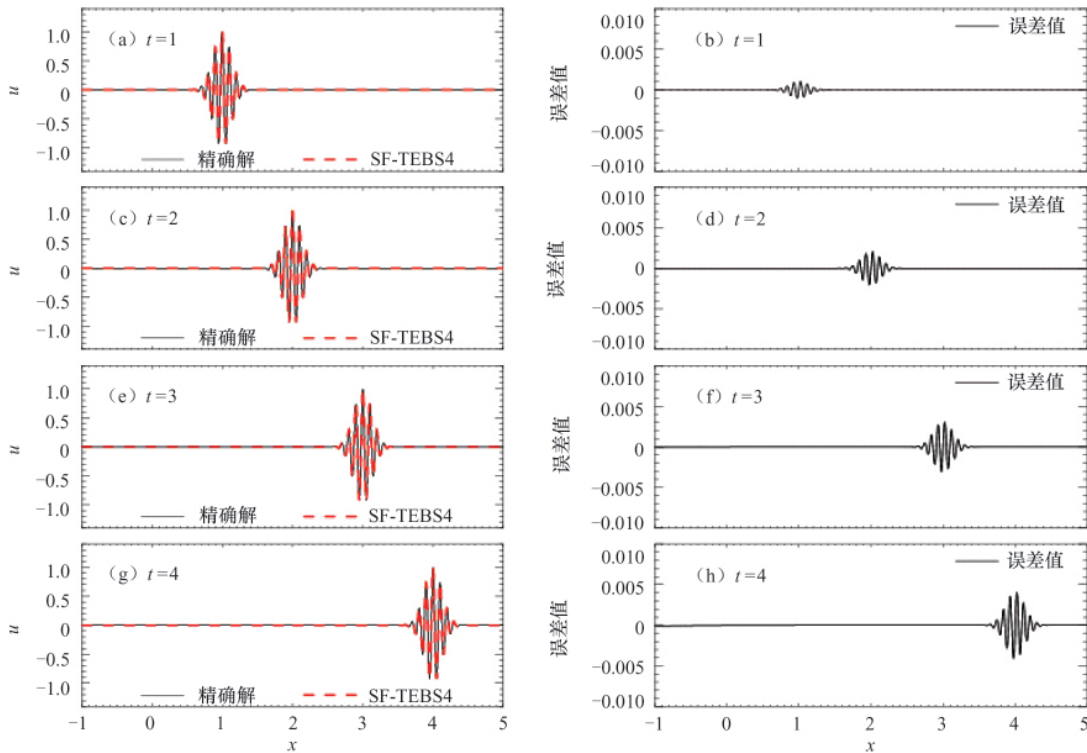


图 3 随时间变化的波形图和绝对误差值比较

Fig. 3 Comparison of fluctuations and errors vs time

3.2 行波解算例

算例 2 计算一维对流方程(15),其初始条件为如下的正弦波包^[9]:

$$u(x, 0) = \exp[-\ln(2)(x/\mu)^2] \sin(20\pi x + \theta) \quad -1 \leq x \leq 5 \quad (22)$$

解析解

$$u(x, t) = \exp[-\ln(2)((x-t)/\mu)^2] \sin[20\pi(x-t) + \theta]$$

其中, $\mu=0.15$, $\theta=\pi/2$ 。计算中取 $\Delta x=0.004$, 库朗数 $CFL=0.25$, 比较 $t=1, t=2, t=3, t=4$ 时刻(无量纲时间单位)的计算结果及误差如图 3 所示。计算中边界利用 SF-TEBS4 格式, 时间积分采用低色散和低耗散的 LDDRK (Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta) 方法^[11]。

图 3 表明, 利用 OCS4、OCI4 及其数值边界格式 SF-TEBS4 计算小尺度激波问题时, 能够有效地抑制计算误差, 并能够在较长时间内保持群速度, 说明格式整体具有较好的渐近稳定性。

4 结论

本文根据多项式拟合数值边界格式(SFEBS)和 Taylor 展开数值边界格式(TEBS)相结合的思想, 构造了与优化 3 对角 4 阶跳点紧致差分格式(OCS4)及其插值格式(OCI4)相匹配的具有 4 阶精度数值边界格式 SF-TEBS4。通过计算格式矩阵特征值的方法, 证明了 SF-TEBS4 与 OCS4 和 OCI4 相结合时, 能够保证差分格式的渐近稳定性。

通过正弦函数验证可知, 利用 OCS4、OCI4 及其数值边界格式 SF-TEBS4 进行实际计算时, 能够保证整体计算精度达到 4 阶。通过对行波问题的模拟, 说明数值格式能够有效减小数值误差并长时间保持波包传播的群速度, 从而验证了格式具有渐近稳定性。在后续的工作中, 将探索这些格式在模拟二维问题时的计算效果。

参考文献 (References)

- [1] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, 103(1): 16-42.
- [2] Nagarajan S, Lele S K, Ferziger J H. A robust high-order compact method for large eddy simulation [J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 191(2): 392-419.
- [3] 李文强, 刘晓. 多项式拟合数值边界格式及其稳定性分析[J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2010, 38(1): 16-20.
Li Wenqiang, Liu Xiao. *Journal of Henan Normal University: Natural Science Edition*, 2010, 38(1): 16-20.
- [4] Pillar M, Stalio E. Finite-volume compact schemes on staggered grids[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 197(1): 299-340.
- [5] 刘晓, 李一帆, 李文强, 等. 三对角四阶跳点紧致格式优化和初步应用[J]. 科技导报, 2012, 30(16): 66-70.
Liu Xiao, Li Yifan, Li Wenqiang, et al. *Science & Technology Review*, 2012, 30(16): 66-70.
- [6] 毛枚良, 邓小刚. 高阶精度线性耗散紧致格式的渐近稳定性[J]. 空气动力学学报, 2000, 18(2): 165-171.
Mao Meiliang, Deng Xiaogang. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2000, 18(2): 165-171.
- [7] Carpenter M H, Gottlieb D, Abarbanel S. The stability of numerical boundary treatments for compact high-order finite-difference schemes[J]. *J Comput Phys*, 1993, 108(2): 272-295.
- [8] Givoli D. High-order local non-reflecting boundary conditions: A review [J]. *Wave Motion*, 2004, 39(4): 319-326.
- [9] 刘晓, 徐寄遥. 大气波动传播问题的一种无反射数值边界格式[J]. 空间科学学报, 2006, 26(2): 111-117.
Liu Xiao, Xu Jiayao. *Chinese Journal of Space Science*, 2006, 26(2): 111-117.
- [10] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
Wang Gaoxiang, Zhou Zhiming, Zhu Siming, et al. *Ordinary differential equations*[M]. Beijing: High Education Press, 2006.
- [11] Hu F Q, Hussaini M Y, Manthey Y J L. Low-dissipation and low-dispersion runge-kutta schemes for computational acoustics[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 124(1): 177-191.

(责任编辑 刘志远)

·学术动态·

“中国力学大会-2013”征文



中国力学大会是中国力学界每两年一次的综合性学术盛会,是广大力学科技工作者学术交流的重要平台。“中国力学大会-2013”将于 2013 年 8 月 21 日在西安举行。会议由中国力学学会、西安交通大学联合主办,现征集相关学术论文。

联系电话: 010-82543903, 62559209。

电子邮箱: liuyang@cstam.org.cn。

大会网站: www.cstam.org.cn/templates/lxxh_1/index.aspx?nodeid=94&page=ContentPage&contentid=171131。