

神经网络系统的 Hopf 分岔分析

孙铭娟¹, 李静², 张冬燕¹

1. 解放军信息工程大学理学院数理系, 郑州 450000
2. 解放军理工大学理学院数理系, 南京 211101

摘要 讨论了一类带有惯性项的时滞神经网络模型的 Hopf 分岔。首先从模型特征方程入手, 分析了特征方程特征根的分布情况; 结合已有文献中对系统平衡点稳定性的分析, 得到了平衡点失稳后发生 Hopf 分岔的条件; 利用伪振子分析法研究了平衡点在临界点附近的局部动力学行为, 包括产生 Hopf 分岔的分岔方向及分岔周期解的稳定性, 给出了分岔周期解的振幅估计的计算式; 最后, 通过计算机软件和数值模拟试验给出了平衡点在临界点附近的时间历程图或相图, 很好地验证了前边对于稳定性分析, 以及伪振子分析法对该模型在临界点附近产生的局部动力学行为研究的正确性。特别地, 与原文献所采用的规范型方法相比较而言, 伪振子分析法无论是在计算过程还是在计算结果以及计算结果的精确性上, 都显示出其简便、快捷、准确和易于操作的特点。

关键词 神经网络; Hopf 分岔; 伪振子; 分岔周期解

中图分类号 O317, O322

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2012.26.003

Hopf Bifurcation of a Delayed Neural Network Model

SUN Mingjuan¹, LI Jing², ZHANG Dongyan¹

1. Department of Mathematics and Physics, Institute of Science, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450000, China
2. Department of Mathematics and Physics, Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China

Abstract The stability and the Hopf bifurcation of a delayed neural network model with an inertial term are investigated in this paper. The characteristic equation of the linearized time delay equation is first considered about the trivial solution, and the condition for the existence of a Hopf bifurcation is obtained based on the study of the root location of the characteristic equation. Then, the newly developed method, the pseudo-oscillator analysis, is applied to study the local dynamics round the trivial solution and near the bifurcation point, including the bifurcation direction, the stability of the bifurcation-induced periodic solution, and the estimation of the amplitude of the periodic solution. Finally, two case studies are given to validate the theoretical prediction of the bifurcated periodic solution, which is checked numerically by the plots of the time history, the phase portraits and the bifurcation diagrams. It is shown that the Hopf bifurcation is supercritical, and the bifurcation-induced periodic solution is stable. In addition, the results show that the pseudo-oscillator analysis has several advantages over the center manifold reduction and the normal form theory used in literature: it involves easy calculation about integration of harmonic functions only, it results in simple computational results in terms of the system parameters, and it offers an estimation of the bifurcated periodic solution with a high computational accuracy.

Keywords neural network model; Hopf bifurcation; pseudo-oscillator analysis; periodic solution

0 引言

神经网络研究始于 20 世纪 40 年代, 一般是指由大量相对简单的神经元相互连接而成的复杂系统。1943 年,

McCulloch 与 Pitts 合作最早提出了神经网络的数学模型, 即 MP 模型^[1]。1949 年, Hebb 推出了一种学习模型——Hebb 学习规则^[2]。1957 年, Frankrosenblatt 首次提出并设计制作了著

收稿日期: 2012-06-05; 修回日期: 2012-08-09

作者简介: 孙铭娟, 讲师, 研究方向为时滞动力系统的 Hopf 分岔, 电子邮箱: xueting1980@126.com

名的感知器,掀起了研究神经网络热潮。1982年, Hopfield 提出了 HNN(Hopfield Neural Network)模型^[9]。以后的 20 余年里,对该模型进行了大量的分析和改进,并有许多新的神经网络模型出现,如 Hopfield 型神经网络、细胞神经网络、双向联想记忆神经网络模型等,而这些模型的研究成果已经广泛应用于模式识别、信号处理、联想记忆、最优化等诸多方面。因此,研究神经网络有着重要的科学意义和应用价值,而且越来越多的数学家、物理学家、心理学家、计算机科学家联合起来,开展跨学科研究,更深入的探讨神经网络的模型、机理和功能,以更好的加以应用。

一般认为神经网络系统是高度复杂的非线性动力学系统,理论分析非常困难。为此,人们试图通过对由单个神经元或少数几个神经元构成的相对简单的低维系统的研究了解神经网络系统的基本特征,将真实的系统尽可能简化。神经元在传递信息过程中存在时滞,时滞起因于信息储存和传输处理过程。时滞会导致系统平衡点失稳、Hopf 分岔、混沌等现象。例如,有文献研究表明^[4,9],即使比较简单的神经网络模型也可以存在非常复杂的分岔、混沌等动力学行为,其中文献[4]、[5]的神经网络模型仅为—阶时滞微分方程。

以往研究中,建立的模型是不含有惯性项的^[9],为一阶系统。例如,文献[6]的模型不含时滞;文献[8]的模型是在文献[5]—[7]的基础上把非线性函数项做了更具有一般性的拓展,增加了惯性项,使系统由—阶成为二阶的,但是文献[8]采用 Cooke 引理和规范形理论对该模型的稳定性和 Hopf 分岔进行研究,其中涉及大量的符号运算。Hopf 分岔研究通常采用中心流形约化法^[9]、规范形法^[9]和摄动法^[10]等,常包含大量的符号计算,而计算精度未必高^[11-12]。文献[13]提出了一种适合于单变量时滞微分方程的 Hopf 分岔分析新方法——伪振子分析法,该方法构造了一个与原系统相对应的伪单自由度振动系统,通过计算平均伪功函数研究系统失稳后发生 Hopf 分岔的方向、分岔周期解稳定性和振幅估计。该方法比较直观,涉及的计算简便且精度较高^[14-17]。

本文讨论如下的时滞神经网络模型,在已有稳定性分析的基础上,研究带时滞的神经网络系统平衡点失稳后发生 Hopf 分岔所产生的周期解:

$$\ddot{x} = -ax - bx + cf(x - hx(t - \tau)) \quad (1)$$

其中,系数 a, b, c 均为正数;非负数 h 为对过去历史抑制作用的度量; $x(\cdot)$ 为自激的局部正反馈且连续;时滞 $\tau > 0$; $f(\cdot)$ 为非线性函数且 3 阶可导。本文首先简要介绍了系统的特征方程和平衡点的稳定性;第二部分简单介绍了伪振子分析法,研究在分岔参数 h 下的 Hopf 分岔,运用伪振子分析法研究 Hopf 分岔的方向、分岔周期解的稳定性及振幅估计;第三部分用数值实例检验伪振子分析法对分岔分析的结果,并给出了结论。

1 平衡点及其特征方程

假设式(1)的非线性函数项满足 $f(0)=0$ 且 $f'(0)>0$,对式

(1)作变换 $x_1(t)=x(t)-hx(t-\tau)$,得到与原系统等价的系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=-ax_2(t)-bx_1(t)+cf(x_1(t))-chf(x_1(t-\tau)) \end{cases} \quad (2)$$

显然,平凡解 $(0,0)$ 是原系统的平衡点,对 $f(\cdot)$ 在平衡点 $(0,0)$ 处应用幂级数的泰勒展开式,得到式(2)对应的线性化方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=-ax_2(t)-bx_1(t)+cf'(0) \cdot x_1(t)-chf'(0) \cdot x_1(t-\tau) \end{cases} \quad (3)$$

相应的特征拟多项式为

$$P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+(b-cf'(0))+chf'(0)e^{-\lambda\tau} \quad (4)$$

即原系统在平衡点 $(x_1, x_2)=(0,0)$ 处的特征方程为

$$\lambda^2+a\lambda+(b-cf'(0))+chf'(0)e^{-\lambda\tau}=0 \quad (5)$$

系统平衡点的稳定性可以通过特征根(即特征方程(5)的根)的分布判断。如果都具有负实部,平衡点是渐近稳定的;如果有正实部的特征根,平衡点是不稳定的;如果方程(5)除负实部特征根外仅有零实部的特征根且零实部特征根为单根,则平衡点是临界稳定的。为方便起见,假设 $P(0)=(b-cf'(0))+chf'(0) \neq 0$,即特征方程(5)不含有零根。由于特征根连续依赖于参数 h ,因而平衡点的稳定性发生改变当且仅当某条特征根曲线跨越虚轴。假设特征方程有 1 对共轭纯虚根:

$$\lambda = \pm i\omega_0 \quad \omega_0 > 0$$

代入方程(5)可得

$$\cot(\omega_0\tau) = \frac{\omega_0^2 - (b - cf'(0))}{a\omega_0} \quad (6)$$

文献[8]详细讨论了分岔参数 h 的系统失稳的条件:记 ω_0 为满足式(6)的临界振动频率,那么当 h 取值为

$$h_0 = \frac{a\omega_0}{cf'(0)\sin(\omega_0\tau)}$$

时,其特征方程出现 1 对正实部的特征根,而其余特征根都具有负实部,使得当 $h \in (0, h_0)$ 时,原系统的平衡点渐近稳定;而当 $h > h_0$ 时,特征方程存在正实部的特征根使得原系统平衡点是不稳定的。因此,方程(1)在 $h=h_0$ 处发生 Hopf 分岔。

2 分岔分析

原系统式(1)是一个单变量的时滞微分方程,并且在稳定性发生改变的临界点处满足 Hopf 分岔条件,因此,可以采用伪振子分析法讨论系统失稳后发生 Hopf 分岔的方向、分岔周期解稳定性及振幅近似估计。由于 Hopf 分岔是局部性质,研究系统的 Hopf 分岔解可由以下时滞方程得到。首先,将原方程中的 $f(\cdot)$ 在平衡点附近做 3 阶泰勒展开,得到

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + (b - cf'(0))x(t) + chf'(0)x(t - \tau) - c\frac{f''(0)}{2}x(t)^2 + \\ ch\frac{f''(0)}{2}x(t - \tau)^2 - c\frac{f'''(0)}{6}x(t)^3 + ch\frac{f'''(0)}{6}x(t - \tau)^3 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

在分岔参数 $h=h_0$ 处,系统处于临界稳定状态,即特征方程有 1 对纯虚根 $\pm i\omega_0$,且其余特征根都具有负实部。在分岔点

处附近,如果 $\varepsilon:=h-h_0 \neq 0$ 是小参数,则时滞微分方程(1)式或(7)式解的主要部分为 $x \approx x_0=r\cos(\omega_0 t+\theta)$ 。首先构造与式(7)相对应的伪单自由度振荡系统:

$$\ddot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)+[a\dot{x}(t)+(b-cf'(0))x(t)+chf''(0)x(t-\tau)-c\frac{f''(0)}{2}x(t)^2+ch\frac{f''(0)}{2}x(t-\tau)^2-c\frac{f'''(0)}{6}x(t)^3+\frac{chf'''(0)}{6}x(t-\tau)^3-\omega_0^2 x(t)]=0 \quad (8)$$

其中,方括号内的式子(为书写简便以下记为 $\phi(t)$)在分岔点附近是小量,因而上述方程可视为无阻尼振动方程 $\ddot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=0$ 的小扰动方程。对式(1)局部动力学行为研究可以借助式(8)进行,定义方程(8)的能量函数为

$$E=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\omega_0^2 x^2$$

对应的功函数为

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{(1)} = -\phi(t) \cdot \dot{x}(t)$$

将此功函数定义为式(1)的伪功函数。由于在式(1)的分岔点附近,分岔周期解的主要部分是 $x_0=r\cos(\omega_0 t+\theta)$,且 $\phi(t)$ 近似等于 0,所以功函数的主要部分是以 $T=2\pi/\omega_0$ 为周期且变化缓慢的周期函数。类似于平均法,采用 1 个周期内的平均功函数代替功函数,即

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{(1)} = h(r)+o(\varepsilon)$$

其中,

$$h(r)=-\frac{1}{T} \int_0^T \phi(t)\dot{x}(t)dt \quad (9)$$

也就是

$$h(r)=-\frac{1}{T} \int_0^T \phi(\ddot{x}(t),\dot{x}(t),x(t),x(t-\tau)) \cdot \dot{x}(t)dt \quad (10)$$

直接计算可得

$$h(r)=\frac{1}{16}\omega_0 r^2(r^2 chf'''(0)\sin(\omega_0 \tau)+8chf''(0)\sin(\omega_0 \tau)-8a\omega_0) \quad (11)$$

$$h''(0)=-a\omega_0^2+ch\omega_0 f''(0)\sin(\omega_0 \tau) \quad (12)$$

由伪振子分析法,如果 $h''(0)<0$,平衡点 $x=0$ 渐近稳定;如果 $h''(0)>0$,平衡点 $x=0$ 不稳定,且此时存在一个 $r_0>0$ 使得 $h(r_0)=0$,即

$$r_0=4\sqrt{\frac{a\omega_0-chf''(0)\sin(\omega_0 \tau)}{2chf'''(0)\sin(\omega_0 \tau)}} \quad (13)$$

如果 $h'(r_0)<0$,那么式(1)在 Hopf 分岔附近有一个稳定的周期解,振幅近似为 r_0 ;反之,有一个振幅近似为 r_0 且不稳定的周期解。

3 数值实验

取定参数 $a=1, b=1.1, c=1, \tau=1, f(x)=\tanh(x)$,由原有稳定性结论及发生 Hopf 分岔的条件可以知道,式(1)在临界点 $h_0=1.1496$ 处产生 Hopf 分岔,对应的临界振动频率 $\omega_0=0.9017$ 。对

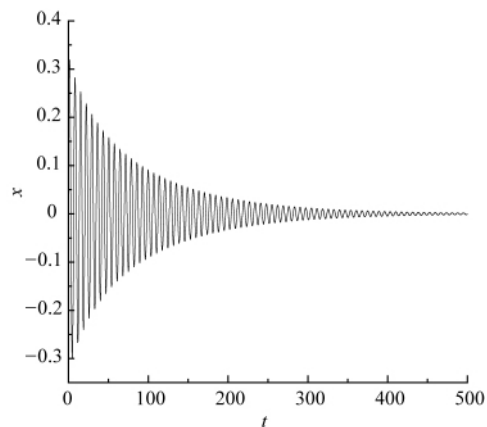
任意 $h \in [0, 1.1496)$,式(1)的平衡点 $x=0$ 是渐近稳定的;而当 $h \in (1.1496, +\infty)$ 时,平衡点是不稳定的,根据伪振子分析法,由(9)式,可得

$$h(r)=(0.3536h-0.0884hr^2-0.4065) \cdot r^2$$

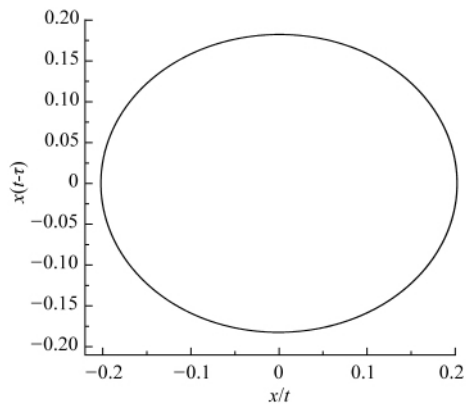
首先,在临界点 $h_0=1.1496$ 附近取 $h=1.14$,此时 $h''(0)<0$,所以平衡点稳定。当 $h''(0)>0$ 时,在 Hopf 分岔附近, $h(r)=0$ 的非平凡解 r_0 应为

$$r_0=4\sqrt{\frac{h\sin(0.9017)-0.9017}{4h\sin(0.9017)}}$$

此时的系统局部动力学行为的特点是:当 $h>1.1496$ 时, $h(r)=0$ 有唯一正解;当 $h<1.1496$ 时, $h(r)=0$ 没有非平凡解,所以 Hopf 分岔是超临界分岔。对任意 $h(r)=0$ 的任意一个正解 r_0 ,都有 $h'(r_0)<0$,说明分岔周期解是稳定的。图 1 是平衡点在



(a) $h=1.11$



(b) $h=1.16$

图 1 参数 $a=1, b=1.1, c=1, \tau=1$ 时网络模型在临界点 $h=1.1496$ 附近的时间历程图(a)和相图(b)

Fig. 1 State of the neural network model near the bifurcation point, under different parameter combinations

该组参数下在临界点 $h=1.1496$ 附近的时间历程图和相图。

另取参数 $a=1, b=1.1, c=2, \tau=1, f(x)=\tanh(x)$,则原系统在临界点 $h_0=0.5063$ 处产生 Hopf 分岔,对应的临界振动频率 $\omega_0=0.2737$ 。当 $h=0$ 时,特征方程有 1 对正实部的特征根,所以

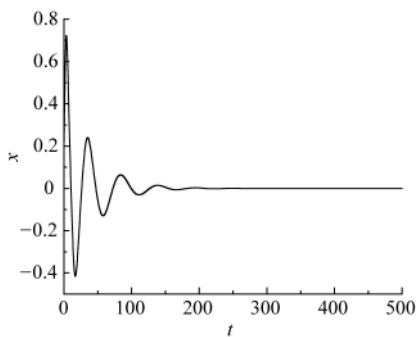
平衡点不稳定; 当 h 从 0 增大到 $\bar{h}=0.45$ ($\omega=0$ 时的临界参数值) 时, 方程减少 1 对正实部特征根, 从而所有特征根都具有负实部, 即对任意 $h \in [0, 0.45)$ 时, 原系统的平衡点 $x=0$ 是不稳定的; 对任意 $h \in (0.45, h_0)$ 时, 平衡点是渐近稳定的; 对任意 $h \in (h_0, +\infty)$ 时, 平衡点是不稳定的。根据伪振子分析法在分岔点 $h_0=0.5063$ 处, 由式 (10) 可得:

$$h(r) = \delta \cdot (0.0740h - 0.0185hr^2 - 0.0375) \cdot r^2$$

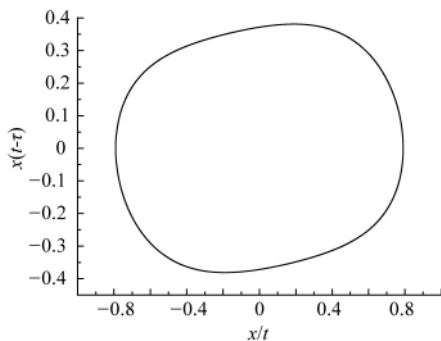
同样, 在临界点 $h_0=0.5063$ 附近取 $h=0.50$, 此时 $h''(0) < 0$, 所以平衡点渐近稳定; 当 $h''(0) > 0$ 时, 在 Hopf 分岔附近, $h(r) = 0$ 的非平凡解 r_0 为

$$r_0 = 4 \sqrt{\frac{2h \sin(0.2737) - 0.2737}{8h \sin(0.2737)}}$$

因此, 系统在参数 $a=1, b=1.1, c=2, \tau=1, f(x)=\tanh(x)$ 时的局部动力学行为的特点是: 当 $h > 0.5063$ 时, $h(r)$ 有唯一解; 当 $0.45 < h < 0.5063$ 时, $h(r)$ 没有解, 所以 Hopf 分岔是超临界分岔。对任意 $h(r)=0$ 的任意正解 r_0 , 都有 $h'(r_0) < 0$, 说明分岔周期解是稳定的。图 2 是平衡点在此组参数下在临界点 $h=0.5063$ 附近的时间历程图和相图。



(a) $h=0.46$

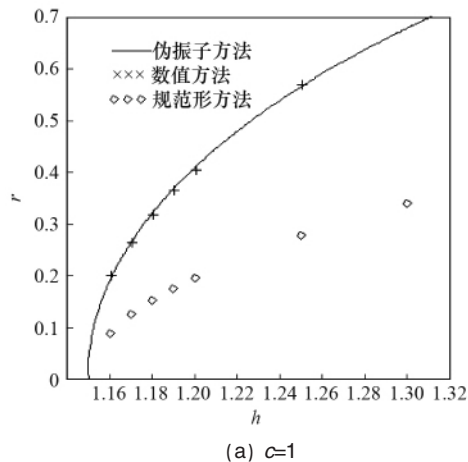


(b) $h=0.6$

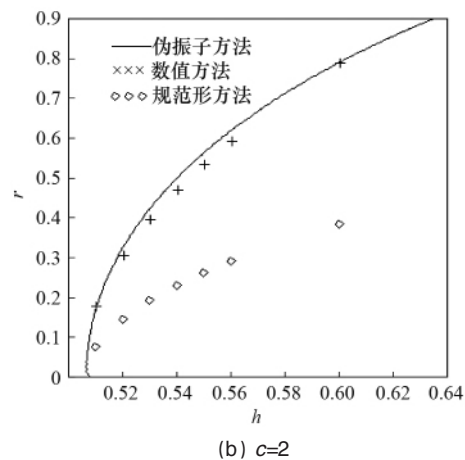
图 2 参数 $a=1, b=1.1, c=2, \tau=1$ 时网络模型在临界点 $h=0.5063$ 附近的状态时间历程图 (a) 和相图 (b)

Fig. 2 State of the neural network model near the bifurcation point, under different parameter combinations

图 3 是在不同参数取值时分岔周期解的振幅 r_0 在伪振子分析法和规范形方法以及数值计算中结果的比较, 可以看出用伪振子分析法算出的振幅要比规范形方法更接近数值



(a) $c=1$



(b) $c=2$

图 3 参数 $a=1, b=1.1, \tau=1$ 时分岔周期解的振幅
Fig. 3 Amplitude of bifurcation periodic solution vs c by using different methods

计算的结果。其中数值计算是采用 Runge-Kutta 积分法在 XPPAUT 中得到的, 步长取 0.005。

4 结论

本文研究了一类带有惯性项的神经网络模型, 采用了一种计算过程较简单的伪振子分析法, 可以很方便地确定系统失稳后发生 Hopf 分岔的局部动力学行为, 包括分岔方向、周期解的振幅和稳定性。数值算例表明, 由伪振子分析法得到的结果和数值计算结果吻合得较好, 且对该系统来说, 伪振子分析法和中心流型降维法、规范形方法相比更为简单, 结果更优。

参考文献 (References)

[1] McCulloch W S, Pitts W H. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity[J]. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 1943, 5(4): 115-133.
[2] Hebb D O. *The Organization of Behavior* [M]. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 1949.

- [3] Hopfield J J. Neural networks and physical system with emergent collective computational abilities[J]. *PNAS*, 1982, 79(8): 2554-2558.
- [4] Xu X, Hu H Y, Wang H L. Stability switches, Hopf bifurcation and chaos of a neural model with delay-dependent parameters [J]. *Physical Letters A*, 2006, 354(1-2): 126-136.
- [5] Liao X F, Wong K W, Leung C S, et al. Hopf bifurcation and chaos in a single delayed neuron equation with non-monotonic activation function [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2001, 12(8): 1535-1547.
- [6] Wheeler D W, Schieve W C. Stability and chaos in an inertial two-neuron system[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1997, 105(4): 267-284.
- [7] Gopalsmay K, Leung I K. Convergence under dynamical thresholds with delays[J]. *IEEE Trans Neural Networks*, 1994, 8(2): 341-348.
- [8] Li C G, Chen G R, Liao X F, et al. Hopf bifurcation and chaos in a single inertial neuron model with time delay [J]. *The European Physical Journal B*, 2004, 41(3): 337-343.
- [9] 施晓红, 余龙华. 非线性磁悬浮控制系统的周期运动稳定性研究[J]. *动力学与控制学报*, 2005, 3(3): 52-55.
Shi Xiaohong, She Longhua. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(3): 52-55.
- [10] 钱长照, 李克安. 梁摆系统耦合振动分析 [J]. *动力学与控制学报*, 2006, 4(4): 375-379.
Qian Changzhao, Li Kean. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(4): 375-379.
- [11] Xu J, Chung K W. A perturbation-incremental scheme for studying Hopf bifurcation in delayed differential systems [J]. *Science in China Series E: Technological Science*, 2009, 52(3): 698-708.
- [12] Gao F, Wang H L, Wang Z H. Hopf bifurcation of a nonlinear delayed system of machine tool vibration via pseudo-oscillator analysis [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2007, 8(5): 1561-1568.
- [13] Wang Z H, Hu H Y. Pseudo-energy analysis of scalar nonlinear dynamics with time delay near a Hopf bifurcation [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, 17(8): 2805-2814.
- [14] Li J, Wang Z H. Hopf bifurcation of a nonlinear Lasota-Ważewska-type population model with maturation delay [J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications & Algorithms*, 2007, 14(5): 611-623.
- [15] Li J Y. Hopf bifurcation of the sunflower equation [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10(4): 2574-2580.
- [16] 李静. 一类经济模型的分岔周期解[J]. *动力学与控制学报*, 2010, 8(4): 380-384.
Li Jing. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(4): 380-384.
- [17] Zhang L L, Huang L H, Zhang Z Z. Hopf bifurcation of the maglev time-delay feedback system via pseudo-oscillator analysis [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010, 52(5-6): 667-673.

(责任编辑 朱宇)

·学术动态·

“第八届环境与发展论坛”征文

由中华环保联合会、联合国环境规划署联合主办,中华环保联合会承办的“第八届环境与发展论坛”将于2012年11月8—10日在浙江省义乌市举行。同期还将举办“第五届中国(国际)建设环境友好型社会成果展览会”。本届论坛以“以环境保护优化经济发展促进经济结构调整和环境质量改善”为主题。

征稿范围:专题论坛一:源头把关,强化环境规划;专题论坛二:严格环评制度和“三同时”制度,实行污染物排放总量、环境容量和质量的统一监管;专题论坛三:立足于治,着眼于防,坚持环境倒逼机制;专题论坛四:严格法治环保,严惩违法排污;专题论坛五:严格环境目标责任,强化环境保护意识。

全文截稿日期:2012年10月5日。

联系电话:(010)51230009/51230018。

电子邮箱:lunwen2012@acef.com.cn。

会议网站:<http://www.acef.com.cn/tzl/hbz/43176.shtml>。