

基于离散非线性指数趋近律变结构控制

吕强, 白洪瑞, 王冬来, 刘峰

装甲兵工程学院控制工程系, 北京 100072

摘要 针对传统趋近律抖振大、趋近速度不快的缺陷, 提出了一种新的离散趋近律。通过在指数趋近律切换项系数中加入非线性函数, 实现了切换项系数随运动点到切换面的距离从大到小逐步变化, 加快了趋近速度并降低了抖振, 间接提高了系统鲁棒性。仿真结果证明, 离散非线性指数趋近律具有良好的趋近品质, 对确定性系统和不确定系统都有良好的控制效果。

关键词 离散变结构控制; 抖振; 鲁棒性; 指数趋近律

中图分类号 TP273

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2012.18.005

Control of Discrete-time Variable Structure Based on a Discrete Nonlinear Exponentially Approaching Law

LU Qiang, BAI Hongrui, WANG Donglai, LIU Feng

Department of Control Engineering, Academy of Armored Force Engineering, Beijing 100072, China

Abstract A new discrete-time nonlinear exponentially approaching law is proposed to overcome the shortcomings of the traditional approaching law. A nonlinear function is adopted in the switching coefficients in the approaching law, to simulate the real situation that the distances of the switching coefficients from the system mobile point to the sliding surface decrease step by step, with the approaching speed improved and the chattering depressed, thus to improve the robust performance of the system indirectly. The simulation results show the superiority of the discrete-time approaching law, with better controlling performance for deterministic and non-deterministic systems alike.

Keywords discrete-time variable structure control; chattering; robust performance; exponential reaching law

0 引言

近年来, 基于滑动模态的变结构控制因其对系统匹配的不确定性因素具有较强的鲁棒性和抗干扰性而引起广泛的重视。国内外很多研究机构对变结构滑模控制理论进行探讨和研究, 取得了较好的控制效果^[1-7]。在实际控制中, 微处理器实时控制均为离散系统, 所以离散系统滑模变结构控制的研究与设计是滑模变结构控制理论与应用的一个重要组成部分。20世纪80年代后期, 离散滑模变结构控制迅速发展起来, 并在工程领域得到了一系列应用。

离散系统存在有限采样周期, 控制作用在一个采样周期内保持不变, 这样就造成了系统难以在切换面上作理想滑动模态运动, 只能在切换面的某一个邻域内作准滑动模态运动, 同时伴有控制抖振和稳态抖振产生^[8-9]。1987年, Sarpiturk等^[10]对离散滑模面 $|s(k)|$ 的存在性给出了一个充分条件

$|s(k+1)| < |s(k)|$ 。离散滑模面存在条件确定后, 学者们给出了各种不同的到达条件。Gao等^[8]提出了一种等式形式的到达条件, 即离散指数趋近律, 该趋近律的切换带宽度为 $2\varepsilon T$, 当系统在切换带中运动时, 最后无法趋近于原点, 而是在原点附近产生一个抖振; 稳态时, 滑模函数在两个值之间反复切换, 会产生较大的稳态抖振。翟长连等^[11]提出了一种自适应趋近律, 随着系统运动点到切换面的距离调整运动速度, 但是此趋近律需要对系统不确定性有良好的估计。张益波等^[12]提出一种改进的指数趋近律, 但是针对不确定性系统其鲁棒性难以保证。刘涛等^[13]提出了一种基于死区离散趋近律的准滑模控制, 可以将准滑动模态带缩窄到任意阶小, 提高系统鲁棒性, 但是其适用范围很小。

针对上述问题, 本文提出了一种离散非线性指数趋近律, 趋近律中的切换项从大到小非线性变化, 确保系统在趋

收稿日期: 2012-04-18; 修回日期: 2012-05-15

作者简介: 吕强, 教授, 研究方向为智能控制、机器人控制以及小型飞行器控制, 电子信箱: qianglv@189.cn

近阶段能够以更快的速度趋近切换面;接近切换面时,切换项减小,使运动点到达切换面时速度逐步减慢,有效地降低了系统的抖振。该趋近律使系统获得了更好的动态品质和瞬态性能,对确定性和不确定性系统都有良好的控制效果。仿真结果证明了该方法的有效性。

1 问题的提出

考虑离散系统

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k) \quad (1)$$

其中 $x(k)$ 为 n 维状态向量, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times 1}$, 矩阵 A 、 B 满足可控性, $u(k)$ 为标量。定义滑模面 $s(k)=Cx(k)$, 其中 C 为滑模面系数矩阵。

传统指数趋近律定义为

$$s(k+1)=-\varepsilon T \operatorname{sgn}(s(k))+(1-qT)s(k) \quad (2)$$

其中 $\varepsilon > 0, 0 < 1-qT < 1$ 。 ε 为切换项系数, 决定系统运动点到达切换面时的速度; q 为指数趋近项系数, 决定系统运动点向切换面的趋近速度。适当减小 ε 并增大 q 可以保证系统运动点快速趋近切换面同时减小抖振。由于受执行机构限制, q 有一个上限, 增大 ε 可以提高系统运动点的趋近速度, 但会增大抖振; 而减小 ε 可以减小抖振, 但系统运动点到达切换面的时间没有保证。

2 离散非线性指数趋近律设计

针对传统趋近律趋近速度不高、抖振大的缺点, 考虑在传统趋近律切换项中加入非线性函数 $\beta\psi(s(k))$, 称之为变速趋近项, 使切换项系数随运动点到滑模面的距离从 1 到 0 非线性变化, 在保证 ε 较小的条件下提高趋近速度而不增大系统抖振。基于这种思想, 针对离散系统式(1)提出非线性指数趋近律

$$\begin{cases} s(k+1)=-(\varepsilon+\beta\psi(s(k)))T \operatorname{sgn}(s(k))+(1-qT)s(k) \\ \psi(s(k))=\frac{1-e^{-\left(\frac{|s(k)|-|s_0|}{|s_0|}\right)^{-1}}}{1-e^{-1}} \end{cases} \quad (3)$$

其中 $0 < 1-qT < 1, q > 0, \beta > 0, \varepsilon > 0, 0 \leq \psi(s(k)) \leq 1, s_0$ 为滑模初始值。

利用趋近律式(3)进行变结构设计可以求得控制律为

$$u(k)=(CB)^{-1}[-(\varepsilon+\beta\psi(s(k)))T \operatorname{sgn}(s(k))+(1-qT)s(k)-CAx(k)] \quad (4)$$

定理 1 趋近律式(3)满足存在性和可达性条件, 滑模轨迹 $s(k)$ 最终将收敛到滑模面的一个邻域内。

证明 当 $q > 0, \beta > 0$ 时,

$$(s(k+1)-s(k)) \operatorname{sgn}(s(k))=-(\varepsilon+\beta\psi(s(k)))T-qT|s(k)| < 0 \quad (5)$$

设该趋近律的切换带为

$$\{x \in R^n | -\sigma < s(k) < \sigma\}, \varepsilon \leq \sigma = \varepsilon + \beta\psi(s(k)) \leq \varepsilon + \beta \quad (6)$$

由 $0 < 1-qT < 1$ 可知 $2-qT > 0$, 所以当 $|s(k)| > \frac{\sigma T}{2-qT}$ 时, 有

$$\begin{aligned} (s(k+1)+s(k)) \operatorname{sgn}(s(k)) &= (-\varepsilon+\beta\psi(s(k)))T \operatorname{sgn}(s(k)) + \\ & (2-qT)s(k) \operatorname{sgn}(s(k)) = -(\varepsilon+\beta\psi(s(k)))T + \\ & (2-qT)|s(k)| > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

综上所述, 该趋近律满足存在性和可达性条件, 滑模轨迹 $s(k)$ 将收敛到滑模面的一个邻域内。证毕。

3 离散非线性指数趋近律抖振分析

对于离散系统, 滑模变结构控制不能产生理想的滑动模态, 只能产生准滑模控制, 因此, 系统稳态振荡振幅是衡量离散变结构控制的重要指标。下面分析非线性指数趋近律的趋近过程。注意到

$$\begin{aligned} s(k+1) &= -(\varepsilon+\beta\psi(s(k)))T \operatorname{sgn}(s(k)) + (1-qT)s(k) \\ &= s(k) \left(1-qT - \frac{(\varepsilon+\beta\psi(s(k)))T}{|s(k)|} \right) \\ &= ps(k) \end{aligned} \quad (8)$$

由式(8)可知

$$|p| = \frac{|s(k+1)|}{|s(k)|}, p = 1-qT - \frac{(\varepsilon+\beta\psi(s(k)))T}{|s(k)|} \quad (9)$$

显然 $p < 1$ 。

针对式(9), 分以下 3 种情况进行讨论。

(1) 当 $|s(k)| > \frac{\sigma T}{2-qT}$ 时, 有

$$p > 1-qT - \frac{\sigma T}{|s(k)|} > -1 \quad (10)$$

所以 $|p| < 1, |s(k+1)| < |s(k)|$, 即 $|s(k)|$ 是递减的。

(2) 当 $|s(k)| < \frac{\sigma T}{2-qT}$ 时, 有

$$p < 1-qT - \frac{\sigma T}{|s(k)|} < -1 \quad (11)$$

所以 $|p| > 1, |s(k+1)| > |s(k)|$, 即 $|s(k)|$ 是递增的。

(3) 当 $|s(k)| = \frac{\sigma T}{2-qT}$ 时, 有

$$p = 1-qT - \frac{\sigma T}{|s(k)|} = -1 \quad (12)$$

此时 $|p| = 1, |s(k+1)| = |s(k)|$, 所以 $s(k)$ 进入振荡状态。

由上述分析知, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 滑模运动的稳态振荡振幅为

$$h = \frac{\sigma T}{2-qT} \quad (13)$$

$s(k)=h$ 将切换带分成两个区域

$$\text{区域 1: } \left\{ k \in n \mid \frac{\sigma T}{2-qT} < |s(k)| < \sigma T \right\};$$

$$\text{区域 2: } \left\{ k \in n \mid |s(k)| < \frac{\sigma T}{2-qT} \right\}.$$

在区域 1 内, $s(k+1)s(k) > 0$, 此时运动点单调向滑模面趋近; 在区域 2 内, $s(k+1)s(k) < 0$, 此时运动点将反复穿越滑模面形成准滑动模态。可通过调整参数 ε, β 和 q 改变切换带变化范围及区域 1 和区域 2 的宽度, 从而兼顾系统抖振和鲁棒性。

4 鲁棒性分析

考虑如下不确定性系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{B}d(k) \quad (14)$$

其中 $d(k)$ 包含了系统参数不确定性和外部扰动,且满足匹配条件。系统(14)在控制律(6)作用下,其闭环准滑模运动方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(CB)^{-1}(-(\varepsilon + \beta\psi(s(k)))T\text{sgn}(s(k)) + (1-qT)s(k) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(k)) + \mathbf{B}d(k) \quad (15)$$

切换函数为

$$s(k+1) = -(\varepsilon + \beta\psi(s(k)))T\text{sgn}(s(k)) + (1-qT)s(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}d(k) \quad (16)$$

定理 2 针对不确定性系统(14),切换函数(16)稳定收敛于 $s(k)$ 的一个邻域内当且仅当 $qT^2\sigma - \sigma T < \mathbf{C}\mathbf{B}d(k) < qT^2\sigma + \sigma T$ 。

证明 当 $s(k) > \sigma T$ 时,有

$$\mathbf{A}(s(k)) = -(\varepsilon + \beta\psi(s(k)))T\text{sgn}(s(k)) - qTs(k) \quad (17)$$

$$\mathbf{B}(s(k)) = -(\varepsilon + \beta\psi(s(k)))T\text{sgn}(s(k)) + (2-qT)s(k) \quad (18)$$

分别关于 $s(k)$ 求导,有

$$\frac{d\mathbf{A}(s(k))}{ds(k)} = \frac{2T}{1-e^{-1}} e^{\frac{(s(k)-|s_0|)^2}{|s_0|}} - 1 \frac{s(k)-|s_0|}{s_0^2} - qT \quad (19)$$

$$\frac{d\mathbf{B}(s(k))}{ds(k)} = \frac{2T}{1-e^{-1}} e^{\frac{(s(k)-|s_0|)^2}{|s_0|}} - 1 \frac{s(k)-|s_0|}{s_0^2} + (2-qT) \quad (20)$$

显然 $\frac{d\mathbf{A}(s(k))}{ds(k)} > 0$, 当采样周期很小时可以保证 $\frac{d\mathbf{B}(s(k))}{ds(k)} > 0$ 。

因为

$$\mathbf{A}(s(k)) + \mathbf{C}\mathbf{B}d(k) < \mathbf{A}(\sigma T) + \mathbf{C}\mathbf{B}d(k) < \mathbf{A}(\sigma T) + qT^2 + \sigma T < 0 \quad (21)$$

$$\mathbf{B}(s(k)) + \mathbf{C}\mathbf{B}d(k) > \mathbf{A}(\sigma T) + \mathbf{C}\mathbf{B}d(k) > \mathbf{A}(\sigma T) + qT^2 - \sigma T > 0 \quad (22)$$

所以当 $s(k) > \sigma T$ 时,有 $|s(k+1)| < |s(k)|$ 。当 $s(k) < -\sigma T$ 时同理可证 $|s(k+1)| < |s(k)|$ 。

当 $s(k) \leq \sigma T$ 时,有

$$|s(k+1)| = |-(\varepsilon + \beta\psi(s(k)))T\text{sgn}(s(k)) + (1-qT)s(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}d(k)| \leq |(\varepsilon + \beta\psi(s(k)))T\text{sgn}(s(k))| + |(1-qT)s(k)| + |\mathbf{C}\mathbf{B}d(k)| < 3\sigma T \quad (23)$$

综上所述,有

$$\begin{cases} |s(k+1)| < |s(k)|, |s(k)| > \sigma T \\ |s(k+1)| < 3\sigma T, |s(k)| < \sigma T \end{cases} \quad (24)$$

所以切换函数稳定收敛于 $s(k)$ 的一个邻域内。证毕。

5 数值仿真

针对确定性系统,考虑如下二阶离散系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k)$$

其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 \\ 0 & 0.9753 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.1314 \end{bmatrix}$ 。

采样周期为 1ms,初始状态为 $\mathbf{x}(0) = [0.8, 0.8]^T$,取滑模面矩阵 $\mathbf{C} = [10, 1]$ 。为准确比较各趋近律,仿真中选取同一组参数,将非线性指数趋近律和自适应趋近律进行对比, $q=30, \varepsilon=$

$8, \beta=25$, 仿真结果如图 1—图 4 所示。

针对不确定性系统保持初始条件和系统参数不变,对系统(16)进行仿真,其中 $d(k) = 0.01\sin(20\pi k)$, 仿真结果如图 5—图 6 所示。

从图 1、图 2 可以看出,当采用相同参数时,非线性指数趋近律加快系统响应速度,缩短了趋近过程的时间,间接地增强了系统鲁棒性,且无明显的抖振,改善了系统的动态品质。从图 3、图 4 可以看出,非线性指数趋近律控制信号收敛速度更快,系统响应也更快。图 5、图 6 显示,对于不确定系

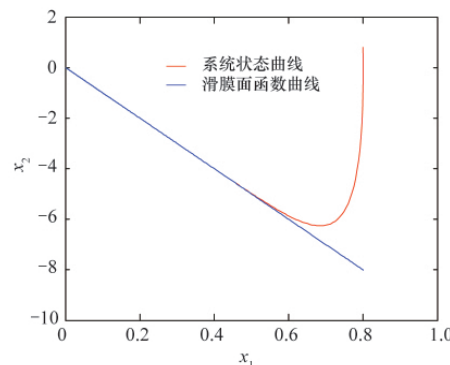


图 1 自适应趋近律相轨迹

Fig. 1 Phase trajectory of adaptive approaching law

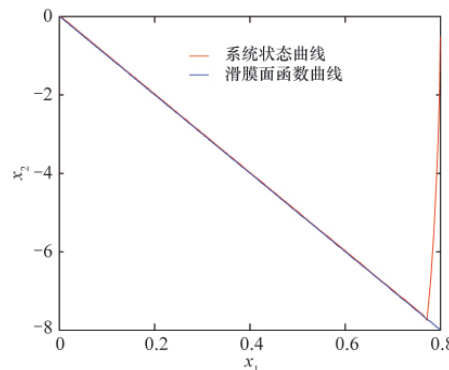


图 2 非线性指数趋近律相轨迹

Fig. 2 Phase trajectory of nonlinear exponentially approaching law

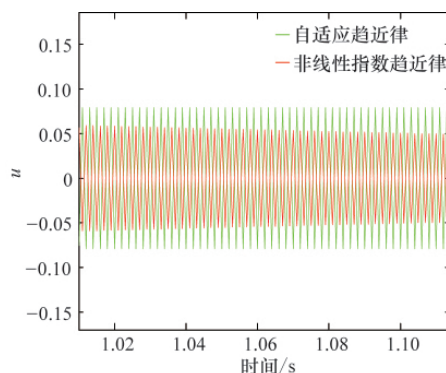


图 3 控制器输出抖振对比

Fig. 3 A comparison of output chattering for controller

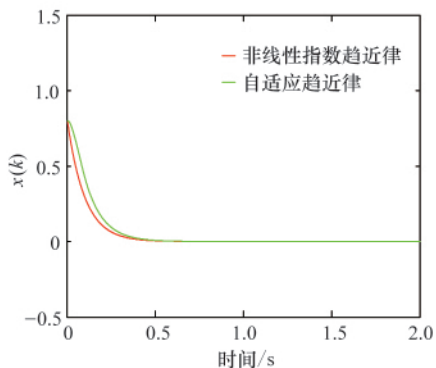


图 4 系统状态响应曲线

Fig. 4 Response curve of the system states

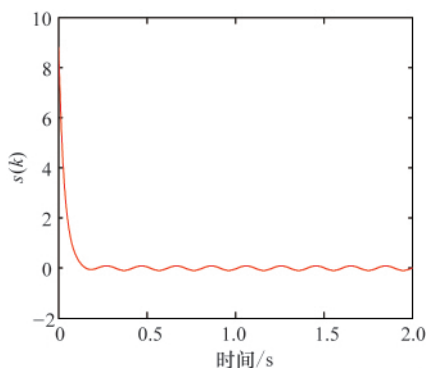


图 5 不确定系统滑模面函数曲线

Fig. 5 Function curve of the sliding mode for non-deterministic systems

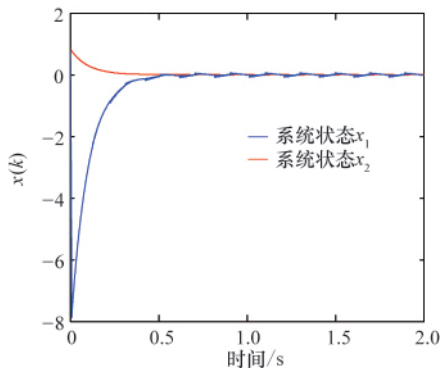


图 6 不确定系统状态响应曲线

Fig. 6 Response curve of the non-deterministic systems states

统,非线性指数趋近律依然具有良好的控制效果,验证了其鲁棒性。

6 结论

提出一种新的非线性指数趋近律,在切换项系数中加入非线性函数,使系统运动点初速较快,随着距离切换面越来越近,速度呈非线性变化,从总体上加快了系统运动点从初始状态一直到达切换面过程的平均速度,缩短了系统运动点到达时间,间接提高了系统的鲁棒性。同时,非线性指数趋近律使运动点在到达切换面时的速度得到了有效控制,进一步改善了趋近运动的动态品质,降低了系统抖振。

参考文献 (References)

- [1] 翟长连, 吴智铭. 不确定离散时间系统的变结构控制设计 [J]. 自动化学报, 2000, 26(2): 184-191.
Zhai Changlian, Wu Zhiming. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(2): 184-191.
- [2] 张益波, 张井岗, 陈志梅. 一种不确定离散时间系统的变结构控制方法[J]. 控制与决策, 2002, 17(S): 791-794.
Zhang Yibo, Zhang Jinggang, Chen Zhimei. *Control and Decision*, 2002, 17(S): 791-794.
- [3] 刘涛, 刘贺平. 一种基于死区离散趋近律的准滑模控制[J]. 自动化学报, 2011, 37(6): 760-766.
Liu Tao, Liu Heping. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(6): 760-766.
- [4] Önder E M. Robust low altitude behavior control of a quadrotor rotorcraft through sliding modes [C]/Proceedings of the 15th Mediterranean Conference of Control and Automation, Athens, Greece, 2007.
- [5] Kim D, Kim Y. Robust variable structure controller design for fault tolerant flight control [J]. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamic*, 2000, 23(3): 430-437.
- [6] Furuta K. Sliding mode control of a discrete system [J]. *Syst Contr Lett*, 1990, 14(2): 145-1022.
- [7] Bartoszewicz A. Remarks on discrete-time variable structure control system[J]. *IEEE Trans Ind Electron*, 1996, 43(1): 235-238.
- [8] Gao W B, Wang Y F, Abdollah H. Discrete-time variable structure control systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1995, 42(2): 117-122.
- [9] Gao W B. Variable structure control of discrete-time systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1995, 21(2): 154-161.
- [10] Sarpturk S Z, Istefanopulos Y, Kaynak O. The stability of discrete-time sliding mode control systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, 32: 930-932.

(责任编辑 马宇红,代丽)