连续归纳法的新证明及其应用举例

李 涛[1],张景中[2]

1. 广州大学数学与信息科学学院,广州 510006
2. 广州大学计算机教育软件研究所,广州 510006

摘要 关于实数的连续归纳法类似于数学归纳法,它与 Dedekind 公理等价。基于现有的研究成果,本文给出了连续归纳法的一个新的较为简单的证明方法;举例说明了连续归纳法的广泛应用,同时也为分析推理的机械化作了一些准备。

关键词 连续归纳法;新证明;数学机械化

中图分类号 O14　**文献标识码** A　**doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2012.17.008

New Proof for Continual Induction and Its Application

LI Tao[1], ZHANG Jingzhong[2]

1. *College of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China*
2. *Institute of Educational Software, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China*

Abstract The continual induction for the real number is very similar to the mathematical induction for the natural number, the induction is equivalent to the Dedekind axiom, and could be widely used in the calculus research. Firstly, a novel proof for the continual induction is presented; the proof is more acceptable than the former. And then, some discussions on its applications are made, it gives some meaningful advices to the higher mathematics teaching. The continual induction could also be used in the mechanization research on analytical reasoning.

Keywords continual induction; new proof; mathematical mechanization

0 引言

在微积分学习过程中,关于实数理论的一系列命题常使初学者望而生畏,比如确界存在定理、区间套定理、有限覆盖定理等。为了避开教学上的困难,在非数学专业的微积分教材中,很多重要的定理(如连续函数的介值定理)不再给出证明,而在数学专业的教材中,则需要用相当大的篇幅来证明这些定理,学生在学习这些定理的过程中倍感困难。为解决这一问题,1986 年张景中创造性地提出了关于实数理论的“连续归纳法”,并证明了连续归纳法与戴德金公理的等价性。这是一个相当简单、便于应用和掌握的方法。从连续归纳法出发,可以用统一模式推出已知的一系列关于实数的定理,也可以用统一模式证明微积分中涉及连续性的各个命题[1]。这是微积分教学中的一项重要成果。本文在上述研究成果的基础上,给出了一个较为简单的连续归纳法的新的证明方法,并举例说明了连续归纳法的广泛应用。

1 关于自然数的数学归纳法与关于实数的连续归纳法的比较

连续归纳法已被越来越多的人接受和使用,其正确性可见文献[2]、[3]。关于实数的连续归纳法与关于自然数的数学归纳法联系紧密,二者的比较见表 1。

2 关于“连续归纳法”的新证明

在相关文献的基础上,得到了“连续归纳法”的一个新的证明方法。

定理 设 $p(x)$是定义在(a,b)内的命题函数,如果

(1) 存在某个实数 $x_0\in(a,b)$,对一切实数 x:$a<x<x_0$,有 $p(x)$成立。

收稿日期:2012-04-28;修回日期:2012-05-22

作者简介:李涛,博士研究生,研究方向为数学机械化与应用,电子信箱:litaoshuxue@126.com;张景中(通信作者),中国科学院院士,研究方向为数学机械化与教育数学,电子信箱:zjz101@yahoo.com.cn

表 1 连续归纳法与数学归纳法比较

Table 1 Comparison between continual induction and mathematical induction

关于自然数的数学归纳法	关于实数的连续归纳法
设 P_n 是一个涉及自然数 n 的命题,如果: (1) 有某个自然数 n_0,使对一切自然数 $n<n_0$,有 P_n 成立。 (2) 若对一切自然数 $n<m$ 有 P_n 成立,则 P_n 对一切 $n<m+1$ 也成立。 那么对一切自然数 n,有 P_n 成立。	设 P_x 是一个涉及实数 x 的命题,如果: (1) 有某个实数 x_0,使对一切实数 $x<x_0$,有 P_x 成立。 (2) 若对一切实数 $x<y$ 有 P_x 成立,则有 $\delta_y>0$,使 P_x 对一切实数 $x<y+\delta_y$ 也成立。 那么对一切实数 x,有 P_x 成立。

(2) 对一切实数 x:$a<x<y<b$ 有 $p(x)$成立,则存在 $\delta_y>0$,使得 $p(x)$对一切实数 x:$a<x<y+\delta_y<b$ 成立。

那么,对一切实数 $x\in(a,b)$,有 $p(x)$成立。

证明 若命题 $p(x)$在开区间上(a,x_i),$i=0,1,2,\cdots,x_i\leqslant b$ 成立,设 X 为所有开区间(a,x_i)的并,即 $X=\bigcup\limits_{i=0}(a,x_i)$,则有$(a,x_0)\subseteq X\subseteq(a,b)$。

下面说明:$X=(a,b)$。

如若不然,设 $\sup X=y$,则 $y<b$。由式(2)知,存在 $\delta_y>0$,使得 $p(x)$对一切实数 x:$a<x<y+\delta_y<b$ 成立。而$(a,y+\delta_y)\subseteq(a,b)$,故$(a,y+\delta_y)\subseteq X$,这与 $\sup X=y$ 矛盾。因此,$X=(a,b)$。

注:该定理中的 a 可为有限实数或$-\infty$,b 可为有限实数或$+\infty$。此外,若 $p(x)$是定义在某闭区间上的命题函数,可将本定理表述为:设 P_x 是一个涉及实数 x 的命题,$a<b$ 是任意两个实数,如果:(1) 有不小于 a 的实数 x_0,使对一切实数 $a\leqslant x\leqslant x_0$,有 P_x 成立。(2) 对实数 $y\leqslant b$,若对实数 $x<y$ 有 P_x 成立,则有 $\delta_y>0$,$y+\delta_y\leqslant b$,使 P_x 对一切实数 $x<y+\delta_y$ 也成立。那么,对一切实数 $x\in[a,b]$,P_x 成立。证明方法类似。

3 连续归纳法的应用举例

张景中[2]已用连续归纳法简洁而有效地证明了连续函数的确界存在定理、区间套定理、有限覆盖定理、魏尔斯特拉斯定理、有界性定理、介值定理、最大值定理、康托定理等。下面再举例说明连续归纳法的广泛应用。

例 1 若 $f(x)$在(a,b)内可导,且对任意的 $x\in(a,b)$,有 $f'(x)>0$,则 $f(x)$在(a,b)内严格递增。

证明 假设命题不成立,则存在 $m,n\in(a,b)$,$m<n$,使 $f(m)\geqslant f(n)$。

下面证明命题 $p(x)$:对于 $m<x<b$,有 $f(x)>f(m)$。

(1)由于 $f'(m)=\lim\limits_{x\to m}\dfrac{f(x)-f(m)}{x-m}>0$,故存在 $\delta_0>0$,使得当 $x\in(m,m+\delta_0)$时,有 $\dfrac{f(x)-f(m)}{x-m}>0$,即 $f(x)>f(m)$。取 $x_0=m+\delta_0$,则当 $m<x<x_0$ 时,$p(x)$成立。

(2)若 $p(x)$对一切实数 x:$m<x<y<b$ 成立,则由 $f'(y)=\lim\limits_{x\to y}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$ 知,存在常数 δ_1:$y-m>\delta_1>0$,使得当 $x\in(y-\delta_1,y)$时,有 $f(m)<f(x)<f(y)$;当 $x\in(y,y+\delta_1)$时,$f(m)<f(y)<f(x)$。因此,对于一切 $m<x<y+\delta_1<b$,$p(x)$成立。

从而,对于一切 $m<x<b$,命题 $p(x)$成立。

特别地,取 $x=n$,则得 $f(n)>f(m)$,与假设矛盾。

"导数正则函数增",这是微积分的一条基本而应用广泛的定理。在传统的微积分教程中,这一事实的证明要用到拉格朗日中值定理,而拉格朗日中值定理的证明用到罗尔定理,罗尔定理的证明用到连续函数在闭区间上取到最大值的定理,等等。一个简单的事实的证明如此复杂繁琐,所以一般高等数学对此就不要求学生掌握其原理,会用就可以了。而此处的证明仅仅用到导数定义和基本性质,不涉及函数连续性等,既简单又严谨,可说是对高等数学教学的一点有意义的改革。

4 结论

本文在总结连续归纳法已有研究成果的基础上,从一个全新的角度,给出了连续归纳法的一个新的更为简单的证明,并举例说明了连续归纳法的广泛应用。从本文中不难看出,将数学分析中的定理分类,如果对某类实现了连续归纳法第(2)步证明的机械化,那么这一类的整个证明也就实现了机械化。因此有理由相信,连续归纳法将表现出广泛的数学机械化应用前景。

参考文献(References)

[1] 张景中. 数学与哲学[M]. 长沙: 湖南教育出版社, 1990.
Zhang Jingzhong. Mathematics and philosophy[M]. Changsha: Hunan Educational Press, 1990.

[2] 张景中. 从数学教育到教育数学 [M]. 北京: 中国少年儿童出版社, 2005.
Zhang Jingzhong. From mathematical education to educational mathematics[M]. Beijing: China Children Publishing House, 2005.

[3] 张景中, 冯勇. 有序集的一般归纳原理和连续归纳法 [J]. 科技导报, 2008, 26(6): 24–27.
Zhang Jingzhong, Feng Yong. *Science & Technology Review*, 2008, 26(6): 24–27.

[4] 李振龙, 张国才. 连续归纳法及其应用 [J]. 齐齐哈尔师范学院学报, 1997, 17(1): 18–20.
Li Zhenlong, Zhang Guocai. *Journal of Qiqihar Normal University*, 1997, 17(1): 18–20.

[5] 赵文静. 关于第二连续归纳法原理 [J]. 南京师范大学学报: 自然科学版, 2002, 25(3): 116–117.
Zhao Wenjing. *Journal of Nanjing Normal University: Natural Science Edition*, 2002, 25(3): 116–117.

(责任编辑 马宇红,代丽)