

双函复合迭代下分形数集成形试验

杨冠平

中国人民武装警察部队河南训练基地, 郑州 451450

摘要 此前分形数集已经出现了动物形模样和三维自相似形态, 那还只是单个函数的运算结果。这里进行的是两个函数复合迭代运算共同确定一个数集的试验。这种双函数集的形体模样既不是两单函数集的集合交并, 也不是它们形体的几何合成, 更像是与生物现象类似的数集杂交。双函数集的形态会传承其两单函数集的某些特征, 又不同其单函数集而有自己的独特性。发现不仅两函数是而且两函数的复合迭代顺序也是双函数集形态的决定因素, 表明分形数集存在同函异序双生子。高级双函数集的函数还有配型条件, 对称双函数集的产生须要两函数的单函数集是同类对称数集, 自相似双函数集的产生须要两函数的单函数集是同类自相似数集。文中提供了 5 个具有代表性的迭代函数, 31 幅附图展示了 11 个数集及自相似子集的三维形象。通过比对发现双函数集成形与动物杂交现象在多方面都有惊人的一致。推测动物基因结合有类似的顺序原理, 生物基因信息不仅记录在基因中而且会记录在基因顺序中。

关键词 分形数集; 迭代函数系统; 复合迭代; 双函数集; 自相似; 基因顺序

中图分类号 O189.12, Q811.2

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2012.16.008

Experimental Study of the Shapes of Fractal Number Sets with Composite Function Iteration

YANG Guanping

Henan Training Base, Chinese Armed Police Force, Zhengzhou 451450, China

Abstract Some fractal number sets take some animal shape and 3D self-similar structures, as the result of the single function operation. This paper makes tests of a composite function iteration to determine a number set. These double-function number sets take shapes of neither a union or an intersection of two single-function sets, nor a form of geometry synthesis, but resemble a hybridization of number sets as in biological phenomena. The double-function number sets keep some characteristics of related single-function number sets, but with differences and take their own unique shapes. It is revealed that not only the functions but also the composite order of two iteration functions determine the shape of double-function number sets, which bring about the appearance of binate fractal number sets. And the iteration functions satisfy matching conditions for advanced double-function number sets. The symmetric double-function number set requires symmetric single-function number sets and the self-similar double-function number set requires self-similar single-function number sets. This paper presents 5 iteration functions and 31 pictures which show 3D images of 11 number sets and their self-similar sub-sets. Comparing the double-function number sets with the phenomena of animal hybridization, it is discovered that they are similar. It may be inferred that in the combination of animal genes, we have the order principle and the information of biological genes may be recorded not only in genes but also in orders of genes.

Keywords fractal numbers set; iterated function system; composite function iteration; double-function numbers set; self-similarity; order of genes

0 引言

迭代函数系统(IFS)模拟植物形态, 如文献[1]—[4]所述, 能够模拟出逼真的效果, 其方法模式已被业界认可^[5-6]。如果

说这还带点意向构造因素, 那么迭代函数生成的收敛数集出现动物模样^[7], 则完全是客观存在。耐人寻味的是动物形数集带有三维自相似子集, 竟然像动物幼仔那样跟在母体身边。

收稿日期: 2012-02-23; 修回日期: 2012-05-21

作者简介: 杨冠平, 教授, 研究方向为分形几何、数理逻辑、计算机图形学, 电子信箱: yangguanping@msn.com

数集这种成形现象有简明的生成过程和具体的运算形式,却有尚不明朗的成形原因,特别是有待弄清迭代函数与数集形态的关系细节。倘若能够把握准这个因果关系的规律,就能够构造函数,随意设计出带有各类自相似特性的数集;就能按指定形态逆向去找数集的迭代函数,发现各种生物形数集;甚至还有望找到生物形态背后的数学函数。

由函数生成数集,通过观察函数变化引起的数集形态变化,可以发现些因果联系。但是由于函数无穷多,细微的形式和参量变化都会导致数集形态显著的变化,加之每个数集都有巨大的运算量,使得这样试验难以很快找到根本。此前的研究无论是两维复数集还是三维三元数集,都还只是单个函数迭代运算所生成的数集。

动物形数集的出现使人悟出道理,这数集与动物看似无关的两事物间可能有某种联系。数集元素是迭代过程中能活动却不逃逸的数,动物基本单元是有活力却不疯长的细胞,两者在基础上就有共同性。数集由函数所决定,动物由基因所决定,两者的原理也有所类似。接着比对便会看出,动物形态一般是由两组基因共同决定,数集形态应该也可以由两个函数共同决定,而这方面还缺少研究。所以有必要进行双函数复合迭代生成数集的试验。

1 数集表示

复数等二元数仅是三元数的特例,其数集只有二维形。这里研究三维形体,直接以三元数集为对象。

三元数 $t=xi+yj+zk$ 经函数 $f(t)$ 迭代运算 n 次表为 $f(t,n)$, 其等价的三维迭代函数式表为

$$f(t,n): \begin{cases} x_n=f_x(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1},x,y,z) \\ y_n=f_y(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1},x,y,z) \\ z_n=f_z(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1},x,y,z) \end{cases} \quad (1)$$

对于多函数排序编号,第 m 号函数迭代 n 次记作 $f(t,n,\#m)$ 。 m 号函数迭代运算收敛数集记作 $T(f(t,n,\#m))$, 简记为 $T(\#m)$,则

$$T(\#m)=\{t|f(t,n,\#m) \rightarrow \infty (n \rightarrow +\infty)\} \quad (2)$$

依序进行 m 号函数与 l 号函数的复合迭代运算, n 次运算式为

$$f(t,n,m\#l)= \begin{cases} f(t,n,\#m) & n \in \text{奇数} \\ f(t,n,\#l) & n \in \text{偶数} \end{cases} \quad (3)$$

生成的收敛数集称为 m 号函数与 l 号函数的复合迭代数集,表为 $T(m\#l)$,则

$$T(m\#l)=\{t|f(t,n,m\#l) \rightarrow \infty (n \rightarrow +\infty)\} \quad (4)$$

称一个函数迭代运算生成的收敛数集为单函数集,两个函数复合迭代运算生成的数集为双函数集。

2 分形数集成形尝试

2.1 任选函数初步尝试

一般说,任取两函数对三元数作复合迭代,都可以获取

收敛数集。不妨先拿熟悉的函数试验。简约起见,以下函数迭代初值均取 $x_0=0,y_0=0,z_0=0$ 。

取 1 号迭代函数为

$$f(t,n,\#1): \begin{cases} x_n=x_{n-1}^2-y_{n-1}^2-z_{n-1}^2+x \\ y_n=2x_{n-1}y_{n-1}+y \\ z_n=2x_{n-1}z_{n-1}+z \end{cases} \quad (5)$$

其单函数集 $T(\#1)$ 是轴对称体,对称轴: $y=z=0$ 。若顺对称轴切开,则它每个剖面都是 Mandelbrot 集,所以 $T(\#1)$ 如同是 Mandelbrot 集绕对称轴旋转一周所成形体,被称为 M 旋集。 $T(\#1)$ 三维形象见图 1(a),典型特征是在头前直线段上含有无数自相似子集。

动物形三元数集的迭代函数编为 2 号,有

$$f(t,n,\#2): \begin{cases} x_n=x_{n-1}^2+2y_{n-1}z_{n-1}+x \\ y_n=y_{n-1}^2+2x_{n-1}z_{n-1}+y \\ z_n=z_{n-1}^2-2x_{n-1}y_{n-1}+z \end{cases} \quad (6)$$

单函数集 $T(\#2)$ 左右对称,对称面为 $x=y$ 。它形体奇妙,有头、尾、背、腹和四肢,从图 1(b) 的背部形象和图 1(c) 的腹部形象可见一斑。在鼻尖和两足尖指向上的近邻区域分布着 3 串自相似子集,当提高采样精度生成该区域高分辨图像,便能显现出与全集相似的三维子集。

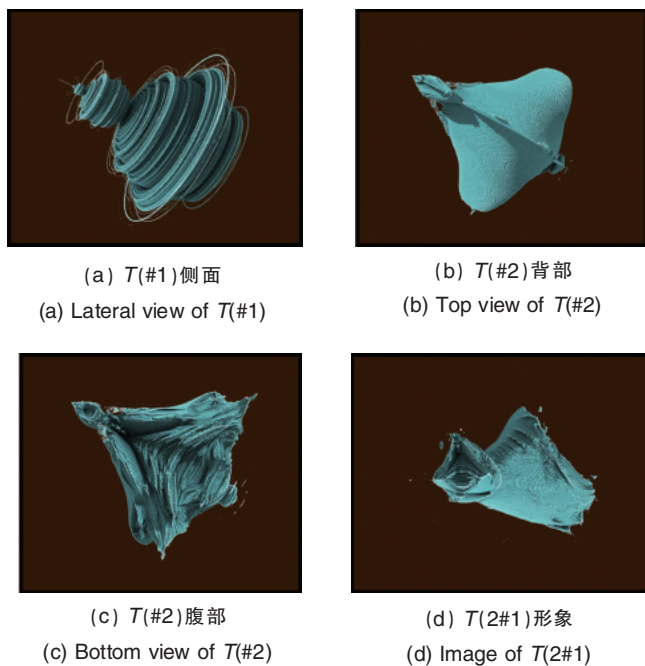


图 1 分形数集 $T(\#1)$ 、 $T(\#2)$ 和双函数集 $T(2\#1)$ 三维形象
Fig. 1 3D images of double-function numbers set $T(2\#1)$ and fractal numbers sets $T(\#1)$, $T(\#2)$

由函数 $f(t,n,\#1)$ 和 $f(t,n,\#2)$ 复合迭代生成双函数集 $T(2\#1)$, 形象见图 1(d)。与 $T(\#1)$ 、 $T(\#2)$ 比较, 显得大不相同, $T(2\#1)$ 形体不规则,不具有对称性,身上找不到自相似性迹象。不过仍能看出, $T(\#1)$ 、 $T(\#2)$ 的某些形体特征在 $T(2\#1)$ 上也有所表现, $T(\#2)$ 的腹部特征也出现在 $T(2\#1)$ 的局部,

$T(\#1)$ 头前直线段在 $T(2\#1)$ 上也有。

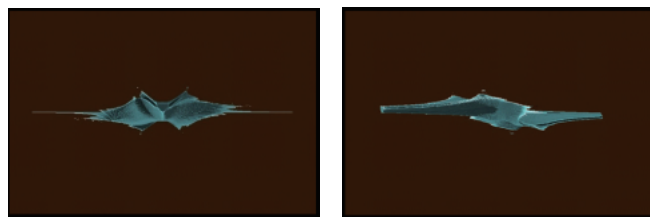
2.2 挑选函数传承特征

既然单函数集的形体特征能通过函数传承到双函数集上,那就可以选择成形特征鲜明的函数进行复合迭代,有意生出带有指定特征的数集。函数

$$f(t, n, \#3) : \begin{cases} x_n = x_{n-1}^2 z_{n-1} + x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1} + x \\ y_n = x_{n-1} z_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 z_{n-1} + y \\ z_n = z_{n-1}^3 + x_{n-1}^2 y_{n-1} + z \end{cases} \quad (7)$$

的单函数集 $T(\#3)$ 三维形态像只飞鸟,又像架飞机,见图 2(a) 的正面像和图 2(b) 的侧面像,一对展开的翅膀宛似羽毛构造,头尾尖长也带飞行架势(受样集空间约束,尖头尖尾在图上并未显全)。细看能够辨别出其左右翼不完全对称。

让 $T(\#3)$ 与 $T(\#1)$ 的函数复合迭代,期望生出带翅膀的数集。果然,双函数集 $T(1\#3)$ 真的长出了翅膀,三维形象如图 3。身体大致对称,可是细节却不对称。形体异化得比较明显,



(a) 正面 (a) Front view
(b) 侧面 (b) Lateral view

图 2 单函数集 $T(\#3)$ 三维形象

Fig. 2 3D images of single-function numbers set $T(\#3)$

已不具有自相似性,既没有 $T(\#1)$ 身上的圆环,也没有 $T(\#3)$ 样尖长首尾。但是,头前尾后各有条直线段,是从 $T(\#1)$ 继承来的;身体两侧长出宽展的两翼,这一点仿 $T(\#3)$,尽管翅形有差别。



(a) 侧下面 (a) Lateral-bottom view
(b) 正面 (b) Front view
(c) 侧上面 (c) Lateral-top view

图 3 双函数集 $T(1\#3)$ 三维形象

Fig. 3 3D images of double-function numbers set $T(1\#3)$

2.3 相近函数保持对称

前文双函数集都不是对称形, $T(2\#1)$ 是两个单函数集都对称而双函数集不对称, $T(1\#3)$ 是一个单函数集不对称导致双函数集不对称,也试验过一旦两单函数集都不对称那双函数集将更不规则。看来要获取对称双函数集,除要求两单函数集都对称外,还得寻求配型条件。

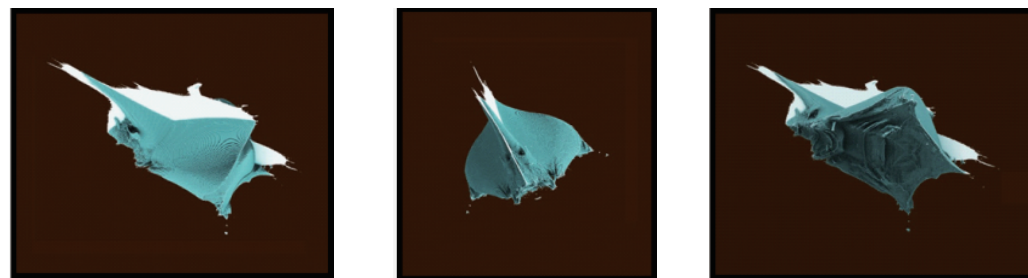
分函数集一个基本特性是函数形式细小变动必导致数集形态显著变化。所以应该选配两个相近函数作复合迭代。

将 $f(t, n, \#2)$ 函数式中 x 维和 y 维的交叉项系数由 2 改

为 1,则形成新函数

$$f(t, n, \#4) : \begin{cases} x_n = x_{n-1}^2 + y_{n-1} z_{n-1} + x \\ y_n = y_{n-1}^2 + x_{n-1} z_{n-1} + y \\ z_n = z_{n-1}^2 - 2x_{n-1} y_{n-1} + z \end{cases} \quad (8)$$

函数式中的这点变化并没有影响到单函数集的对称性, $T(\#4)$ 仍然是对称体,对称面仍是 $x=y$ 。但是数集形态已经与 $T(\#2)$ 大不一样,见图 4 所示三维形象,头前长出一只尖长的犄角,头两侧带有一对耷拉耳,腹部收回,尾巴尖出,背鳍和头冠连成一片。



(a) 侧上面 (a) Lateral-top view
(b) 正面 (b) Front view
(c) 侧下面 (c) Lateral-bottom view

图 4 单函数集 $T(\#4)$ 三维形象

Fig. 4 3D images of single-function numbers set $T(\#4)$

让 $f(t, n, \#2)$ 与 $f(t, n, \#4)$ 复合迭代, 生成双函数集 $T(2\#4)$, 有图 5 所示的三维形象。观察发现 $T(2\#4)$ 就是对称体, 左右对称, 对称面 $x=y$ 。它也有一个尖长犄角和一对耷拉

耳, 仿 $T(\#4)$ 。足尖鼻尖方向上有子集分布线段, 这一特征在 $T(\#2)$ 、 $T(\#4)$ 上都有。面部凹陷, 背鳍头冠已经退化, 这是自己的特点。

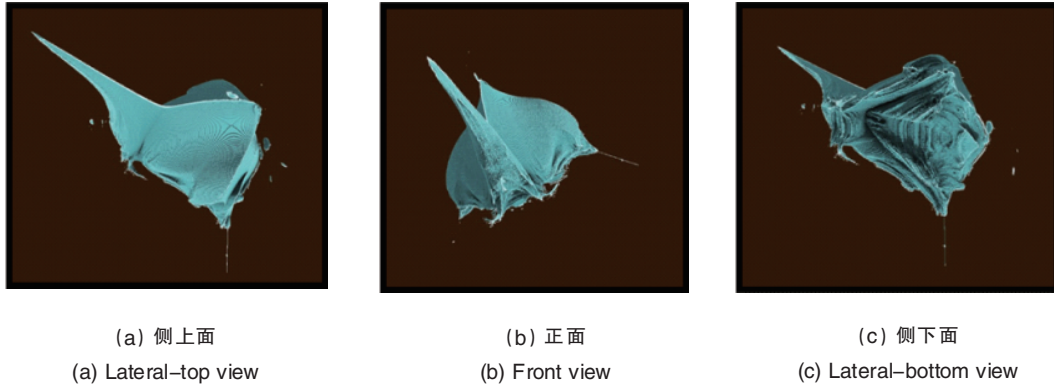


图 5 双函数集 $T(2\#4)$ 三维形象
Fig. 5 3D images of double-function numbers set $T(2\#4)$

2.4 调换顺序出现新形

单函数集形态仅决定于迭代函数, 可是双函数集却另有变数。之前并未意识到这个问题, 直到无意中遇到同两函数两次复合迭代成形成结果不一样的情况, 才发现仅仅是由于两次生成数集的函数复合顺序有变, 知道两函数对双函数集成形成所起作用是不均衡的, 函数顺序也是个变数。

还用 $f(t, n, \#2)$ 和 $f(t, n, \#4)$ 进行复合迭代, 不改变迭代初值、迭代次数和取集标准, 这次 $f(t, n, \#4)$ 在先, 生成双函数集 $T(4\#2)$ 。其三维形象见图 6, 面部长得外凸, 背鳍和头冠萌生。与 $T(2\#4)$ 相同的一点是都生一对耷拉耳, 与 $T(2\#4)$ 明显不一样的一点是头上长长的犄角消失。 $T(4\#2)$ 也是左右对称, 对称面仍是 $x=y$ 。

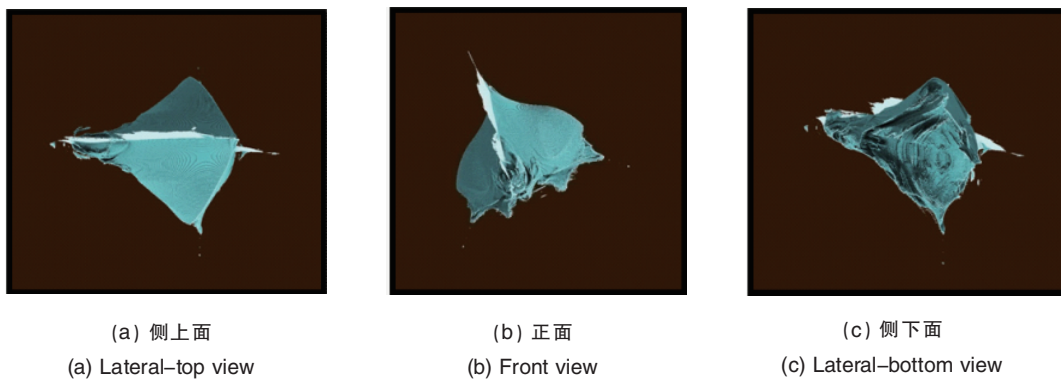


图 6 双函数集 $T(4\#2)$ 三维形象
Fig. 6 3D images of double-function numbers set $T(4\#2)$

同函异序的异形体存在, 更增添迭代收敛数集多样性。

2.5 适配类型产生自相似

单函数集自相似已有些例子, 双函数集自相似则相当难觅。两个自相似数集的函数复合迭代后, 双函数集却没有自相似, 如 $T(2\#1)$ 。一个自相似数集的函数稍作改动, 再与原函数复合迭代, 双函数集的自相似便急速退化, 如 $T(2\#4)$ 和 $T(4\#2)$ 。退化表现是在该出现自相似子集的相应位置上虽也存在小团块, 但已不与整体相似, 变形得不成样。

自相似双函数集毕竟是存在的, 这里有一例。函数

$$f(t, n, \#5): \begin{cases} x_n = x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 + x \\ y_n = 2x_{n-1}y_{n-1} - z_{n-1}^2 + y \\ z_n = 2x_{n-1}z_{n-1} + 2y_{n-1}z_{n-1} + z \end{cases} \quad (9)$$

的单函数集 $T(\#5)$ 也是左右对称, 对称面是 $z=0$ 。三维形象见图 7, $T(\#5)$ 有头有尾, 有背有腹, 也是个形似动物的分形数集。其可贵之处是自相似类型^[8]及自相似子集分布与 $T(\#1)$ 相同, 都是只在头前直线段上有子集与全集相似。

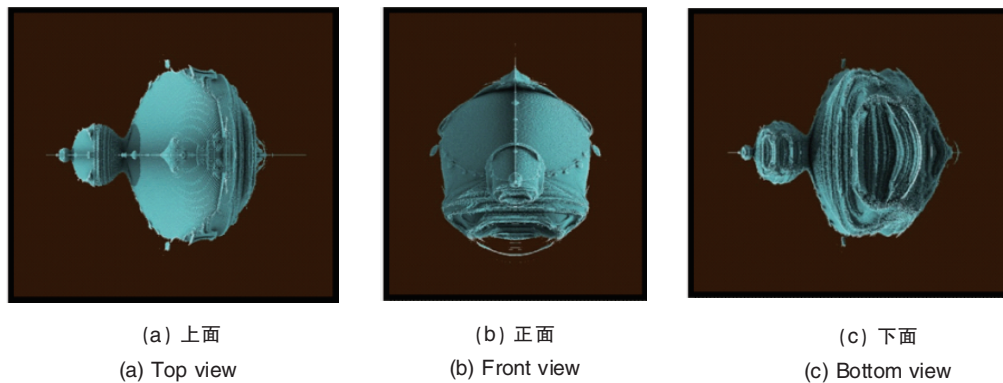


图 7 单函数集 $T(\#5)$ 三维形象

Fig. 7 3D images of single-function numbers set $T(\#5)$

使 $f(t, n, \#1)$ 和 $f(t, n, \#5)$ 进行复合迭代, 生成双函数集 $T(5\#1)$, 其三维形象见图 8。这就是一个自相似双函数集, 与 $T(\#1)$ 、 $T(\#5)$ 的自相似形式一样, 在头前直线段上分布着无数的自相似子集。对准直线段上那个可见点放大取样, 就会看清大小不一的几个自相似子集排列成串, 放大到 60 倍则有图 8(d) 样。大点的子集已看得较清, 与整体极相似。小子集

有的只显个点, 需要提高数集采样精度才能看清模样。放大线上任意位置, 都会有更小层次的自相似子集显现。图 8(d) 中 2 号子集还带有圆环, 这是从 $T(\#1)$ 继承来的特征。图 8(e) 是图 8(d) 中大号子集的正面像, 与图 8(b) 比较可见数集的自相似程度。

$f(t, n, \#1)$ 和 $f(t, n, \#5)$ 的差别不比 $f(t, n, \#2)$ 和 $f(t, n, \#4)$

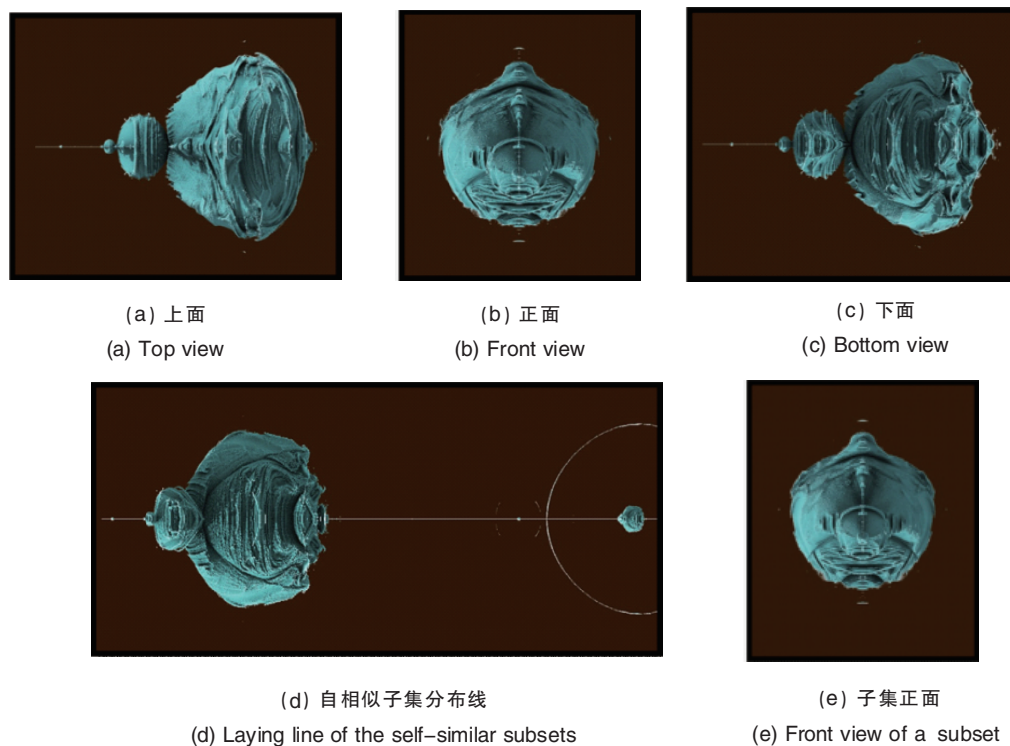


图 8 双函数集 $T(5\#1)$ 及子集三维形象

Fig. 8 3D images of double-function numbers set $T(5\#1)$ and its subsets

的差别小, 而生成的双函数集 $T(5\#1)$ 既是对称的又是自相似的, 表明两函数配型适当。

2.6 同函异序异形自相似

调换 $f(t, n, \#1)$ 和 $f(t, n, \#5)$ 的复合迭代顺序生成双函数集 $T(1\#5)$, 其三维形象见图 9。与 $T(\#1)$ 、 $T(\#5)$ 和 $T(5\#1)$ 都不一样, $T(1\#5)$ 自己的特征是脖子粗。单看数集头部, $T(1\#5)$

与 $T(\#1)$ 相像, 而 $T(5\#1)$ 与 $T(\#5)$ 相像。

$T(1\#5)$ 也是自相似的, 自相似与 $T(\#1)$ 、 $T(\#5)$ 和 $T(5\#1)$ 同类, 在头前那段直线段上排列着与全集相似的子集, 见图 9(d)。这里自相似子集是 $T(1\#5)$ 的, 仅与 $T(1\#5)$ 相似, 也是脖子粗, $T(\#1)$ 样的头。图 9(d) 所显二号子集空域并没有圆环, 表现出同函异序两双函数集的自相似也有差别。图 9(e) 是图

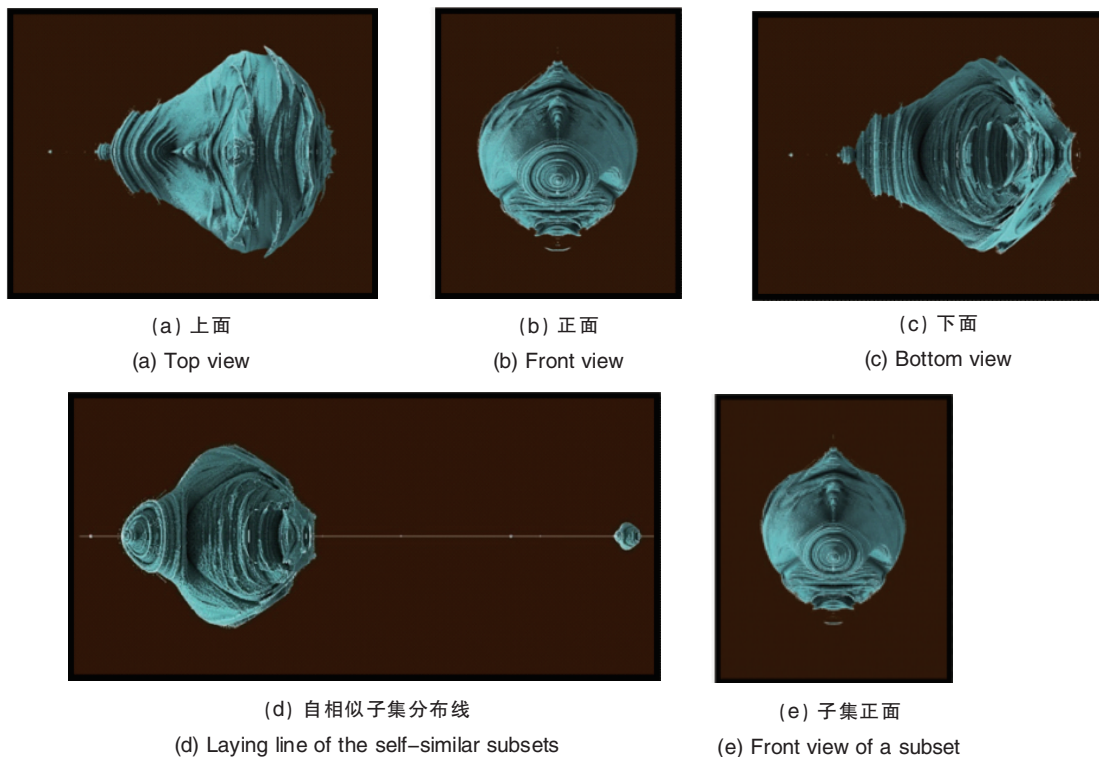


图9 双函数集 $T(1\#5)$ 及子集三维形象

Fig. 9 3D images of double-function numbers set $T(1\#5)$ and its subsets

9(d)中大号子集的正面像,若不仔细比量,难辨出它是子集还是全集。

因为 $f(t, n, \#1)$ 和 $f(t, n, \#5)$ 的两单函数集自相似类型及自相似子集分布相同,使得同函异序异形的两个双函数集也具有相同的自相似性,出现一对双生分形数集。

3 结论

以上实例中的函数及数集仅是从相应类型中挑出的代表。大量试验结果表明双函数集的成形有稳定一致的规律可循。归纳总结如下。

(1) 形体特征能够传承

函数决定数集形态,参与复合迭代的函数会把其单函数集的某些形态特征表现到双函数集上。如同函数本身带有成形信息,通过参与数集生成而传承表达。两函数共同作用生成双函数集,两函数的成形特征在双函数集上的表现形式是:这个部位或某方面可能像这个单函数集,那个部位或其它方面可能像那个单函数集。

(2) 数集形态另有特质

运算比对可证明,双函数集既不是两单函数集的集合交并,也不是两空间形体的几何合成。双函数集形态与单函数集比,已经发生异化,这是分形数集“函数细微变化必会导致数集形态显著变化”基本性质的延伸表现。一个函数的某成形特征在作用到双函数集时要受到另一函数的影响,可能被保留或者被遗弃,可能被增强或者被掩盖。即如保留下来也会有走样和变形,与单函数集的纯种特征已经有所区别。两

函数的差异必导致双函数集的变异,差异越大变异就越大。两函数对双函数集的成形既是依照又是矛盾,使得双函数集形态有别于其两函数的单函数集,也不同于其他双函数集,有自己的独特性。

(3) 顺序也是成形因素

两函数的先序与后序对双函数集形态影响程度是不同的,使得两函数调换复合顺序就能改变双函数集形态,结果函数顺序也是双函数集成形的决定因素之一。其道理可逻辑推证,如果两函数对双函数集影响程度均衡,那么交换复合迭代顺序就不会改变双函数集形态,而事实是形态随顺序改变而改变,那就反证两函数在交换顺序的两次双函数集生成过程中所起作用大小不一样。这一发现颇为重要,不仅证实分形数集有同函异序双生子的存在,而且表明数集成形信息既记录在函数中又可以记录在函数的顺序中。

(4) 同类对称产生对称数集

对称双函数集具有函数配型条件,其两单函数集必须是对称数集且对称类型相容、对称基元共同。两单函数集的对称性是基本条件,有一方不对称,双函数集就不对称。即如两单函数集都对称,双函数集也不一定就对称,还要看两单函数集的对称类型和对称基元情况,不满足条件也不行。虽然 $T(\#1)$ 是轴对称而 $T(\#5)$ 是面对称,可是 $T(\#5)$ 的对称面也是 $T(\#1)$ 的对称面, $T(1\#5)$ 和 $T(5\#1)$ 就对称。 $T(\#2)$ 和 $T(\#4)$ 的对称面重合, $T(2\#4)$ 和 $T(4\#2)$ 也对称。 $T(\#1)$ 和 $T(\#2)$ 对称面不重合, $T(2\#1)$ 就不对称。 $T(\#2)$ 和 $T(\#5)$ 对称面不重合, $T(2\#5)$ 也不会对称。 $T(\#3)$ 稍有点不对称, $T(1\#3)$ 就更不对称。

(5) 同类自相似产生自相似数集

自相似双函数集也具有函数配型条件,其两单函数集必须都有自相似性且自相似类型相同、自相似子集分布共同。两单函数集都有自相似性是基本要求,一方没有自相似性,双函数集就会失去自相似性。即如两单函数集都有自相似性,还要看自相似类型和自相似子集分布,不同也不行。例如, $T(\#1)$ 和 $T(\#5)$ 都是自相似数集,子集与全集相似且都排列在头前直线段上,所以 $T(1\#5)$ 和 $T(5\#1)$ 都是自相似双函数集。 $T(\#2)$ 身边三方向有自相似子集分布,但都不与 $T(\#1)$

的直线段方向一致,所以 $T(2\#1)$ 和 $T(2\#5)$ 就不是自相似的。 $T(\#3)$ 没有自相似, $T(1\#3)$ 就没有自相似。 $T(\#4)$ 自相似退化, $T(2\#4)$ 和 $T(4\#2)$ 也随之失去自相似。

$T(1\#5)$ 和 $T(5\#1)$ 既是对称数集也是自相似数集, $T(2\#4)$ 和 $T(4\#2)$ 是对称数集但不是自相似数集,现还没有发现不对称的自相似数集。表明自相似双函数集比对称双函数集更难得。

(6) 可类比动物杂交现象。

试验结果发现双函数集现象与动物杂交现象有许多共同之处,现罗列于表 1 进行对比。

表 1 双函数集现象与动物杂交现象对比

Table 1 Phenomenon comparing of doble-function numbers sets with animal hybridization

双函数集		动物杂交
成形主因	函数	基因
关键过程	函数复合迭代	基因杂交
基本单元	迭代过程中能活动而不逃逸的数	生命过程中有活力而不疯长的细胞
属性	对称的 自相似的	能存活的 能孕育的
现象	简明的函数决定着数集复杂形态 函数小差别导致数集形态大差别 自相似数集的局部子集与全集相似 双函数集与其单函数集形态有差异 双函数集总会传承其单函数集的某些特征 两函数差异越大,双函数集越不规则 同类对称数集的函数复合迭代才能生成对称数集 同类自相似数集的函数复合迭代才能生成自相似数集 存在对称但非自相似双函数集 两函数以不同顺序复合迭代,会产生不同形态的双函数集	明确的基因组决定着动物复杂形体 基因小差别导致物种大差别 动物孕育的子代与其亲本相似 动物子代与其亲本不完全一样 动物总会继承其亲本的某些特征 物种差异越大,杂交越难成功 同类动物杂交才能正常生产后代 同类且能孕育的动物杂交才能生产出有孕育能力的动物后代 存在不能生育的杂交动物,如骡 两物种以不同雌雄顺序杂交,会生产不同特征的杂交后代,例如狮虎兽与虎狮兽

由表 1 对比可见,双函数集现象与动物杂交现象在多方面都有惊人的一致,双函数集现象更像是数集杂交。虽然动物杂交现象还要复杂得多,但是有理由认为双函数集现象与动物杂交现象有所类同,数集的函数成形与生物的基因遗传有所类同。进而,推测动物基因结合隐含有顺序原理,推测狮虎兽与虎狮兽等现象应归因于基因结合的顺序调换,推测生物基因信息不仅记录在基因中而且会记录在基因顺序中。

参考文献 (References)

[1] Demko S, Hodges L, Naylor B. Construction of fractal objects with iterated function systems [C]//Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, San Francisco, California, USA, July 22-26, 1985: 271-278.
 [2] Bamsley M F, Massopust P, Strickland H, et al. Fractal modeling of biological structures [J]. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1987, 504: 179-194.
 [3] 刘向东, 廖欣, 于海, 等. 迭代函数系 IFS 吸引子的参数控制与树木的模拟[J]. *计算机工程与应用*. 2000(5): 28-29.

Liu Xiangdong, Liao Xin, Yu Hai, et al. *Computer Engineering and Applications*, 2000(5): 28-29.
 [4] 仲兰芬, 王琰, 程磊. 三维分形树木 IFS 生成算法[J]. *沈阳理工大学学报*, 2005, 24(1): 28-31.
 Zhong Lanfen, Wang Yan, Cheng Lei. *Transactions of Shenyang Ligong University*, 2005, 24(1): 28-31.
 [5] 李火根, 黄敏仁. 分形及其在植物研究中的应用 [J]. *植物学报*, 2001, 18(6): 684-690.
 Li Huogen, Huang Minren. *Chinese Bulletin of Botany*, 2001, 18 (6): 684-690.
 [6] 曹宏鑫, 石春林, 金之庆. 植物形态结构模拟与可视化研究进展[J]. *中国农业科学*, 2008, 41(3): 669-677.
 Cao Hongxin, Shi Chunlin, Jin Zhiqing. *Scientia Agriculture Sinica*, 2008, 41(3): 669-677.
 [7] 杨冠平. 发现一种动物形三元数集[J]. *科技导报*, 2010, 28(3): 19-23.
 Yang Guanping. *Science & Technology Review*, 2010, 28(3): 19-23.
 [8] 杨冠平. 分形数集自相似新异类型[J]. *科技导报*, 2011, 29(2): 74-79.
 Yang Guanping. *Science & Technology Review*, 2011, 29(2): 74-79.
 (责任编辑 胡少卿, 朱宇)