

随机局部凸模上 $\bar{L}^0$ -值函数次微分和近似次微分性质

杨玉洁

北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191

摘要 研究了随机凸分析中的次微分与近似次微分问题。在层次结构分析以及最近建立的随机局部凸模上的分离定理基础上, 本文得到了关于随机局部凸模上 $\bar{L}^0$ 值函数的次微分和近似次微分的一些良好基本性质。首先由随机局部凸模上点与集合的分离定理, 证明了: 对于具有可数连结性质的随机局部凸模上真的、 T_c -下半连续的、 $L^0(F)$ -凸函数, 它的近似次微分非空; 再者, 由随机局部凸模上两个集合的分离定理, 证明了对于具有可数连结性质的随机局部凸模上两个真的、 T_c -下半连续的、 $L^0(F)$ -凸函数, 及其次微分公式。其中, $L^0(F)$ 表示定义在概率空间上的广义实值随机变量等价类全体形成的集合。本文推广了经典凸分析中的相应结果。

关键词 随机局部凸模; 随机共轭空间; 局部 $\bar{L}^0$ -凸拓扑; 次微分

中图分类号 O177.3

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2012.12.007

Properties of Subdifferentials and Approximate Subdifferentials of $\bar{L}^0$ -Valued Functions on Random Locally Convex Modules

YANG Yujie

School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract The random convex analysis of subdifferentials and approximate subdifferentials is carried out in this paper. Based on the analysis of the stratification structure and the recently developed separation theorems in random locally convex modules, some nice basic properties about subdifferentials and approximate subdifferentials of a $\bar{L}^0$ -valued function on random locally convex modules are obtained. The main results are as follows. First, for a proper and T_c -lower semicontinuous $\bar{L}^0$ -valued $L^0(F)$ -convex function f defined on a random locally convex module (E, Λ) where both E and Λ have the countable concatenation property, it is proven that the approximate subdifferential of f is nonempty. Second, for two proper and T_c -lower semicontinuous $\bar{L}^0$ -valued $L^0(F)$ -convex functions, denoted by f and g , which are defined on a random locally convex module (E, Λ) where both E and Λ have the countable concatenation property, the formula about the subdifferentials of $f+g$ is given.

Keywords random locally convex module; random conjugate space; locally $\bar{L}^0$ -convex topology; subdifferential

0 引言

局部凸空间的深刻理论受益于它漂亮的经典共轭空间理论。但是经典的共轭空间理论对随机局部凸模理论的研究却普遍失效, 这启发了郭铁信^[1]在 $(\mathcal{E}, \Lambda)$ -拓扑下系统地深入地发展了随机局部凸模的随机共轭空间理论。建立在局部凸空间及其共轭空间理论上的经典凸分析是研究凸风险度量的一个恰当的数学工具, 但是它却不再适用于定义在无界金融头寸上的条件凸风险度量研究。因为条件凸风险度量是一种定义在随机局部凸模上的真的、下半连续的、

$L^0(F)$ -凸的 $\bar{L}^0$ -值函数, 故有必要为这种映射建立一种凸分析, 不妨称之为随机凸分析。随机凸分析是 Filipović 等^[2]首次提出的, 郭铁信^[3]深入发展了它。次微分和近似次微分是凸分析、非光滑分析及优化理论的有力工具, 类似地, 这些重要概念也应该在随机凸分析的框架下得到发展。相比较经典局部凸空间而言, 随机局部凸模不但有着更复杂的层次结构且有着更复杂的拓扑结构^[3], 因此随机凸分析是经典凸分析的非平凡的随机推广。故本文的结果推广了经典凸分析中的相应结果。

收稿日期: 2012-02-21; 修回日期: 2012-04-10

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11171015)

作者简介: 杨玉洁, 博士研究生, 研究方向为泛函分析与随机分析, 电子邮箱: yangyujie007@163.com

本文中, (Ω, F, P) 恒表示一给定概率空间, K 为实数域 R 或复数域 C , N 为正整数, $\bar{L}^0(F)$ 为 Ω 上广义实值随机变量的等价类全体所构成的集合, $L^0(F, K)$ 为 Ω 上 K -值随机变量的等价类全体在通常等价类的加法与数乘和乘法运算下所成的代数, 当 $K=R$ 时, $L^0(F, K)$ 简记为 $L^0(F)$ 。

由文献[4]可知, 在偏序 $\leq$: $\xi \leq \eta$ 当且仅当 $\xi^0(\omega) \leq \eta^0(\omega)$, a.s.-下, $\bar{L}^0(F)$ 成一完备格(即有上界的集合有上确界), 其中 ξ^0 与 η^0 分别为 ξ 与 η 的任意选取的代表元。通常, 对于任意 $\xi, \eta \in \bar{L}^0(F)$, $\xi > \eta$ 表示 $\xi \geq \eta$ 但 $\xi \neq \eta$; 而“在 $A \in F$ 上 $\xi > \eta$ ”是指: 在 A 上 $\xi^0(\omega) > \eta^0(\omega)$, a.s., 这里 ξ^0 与 η^0 分别为 ξ, η 的任意选取代表元。

特别地, 记 $L_+^0(F) = \{\xi \in L^0(F) \mid \xi \geq 0\}$, $L_{++}^0(F) = \{\xi \in L^0(F) \mid \text{在 } \Omega \text{ 上 } \xi > 0\}$ 。对于任意 $A \in F$, I_A 表示 A 的特征函数, $\tilde{I}_A$ 表示 I_A 的等价类。

定义 1^[5] 称有序对 (E, Λ) 为数域 K 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模, 若 E 为代数 $L^0(F, K)$ 上的左模, Λ 为从 E 到 $L_+^0(F)$ 的一族映射且满足:

- (1) $\bigvee \{\|x\| \mid \|x\| \in \Lambda\} = 0$ 当且仅当 $x=0$ (E 中的零点);
- (2) $\|\xi \cdot x\| = \|\xi\| \cdot \|x\|$, $\forall \xi \in L^0(F, K), x \in E$ 以及 $\|\cdot\| \in \Lambda$;
- (3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$ 以及 $\|\cdot\| \in \Lambda$ 。

Filipovic 等^[2]在随机局部凸模引进了一种新的拓扑如下。

定义 2^[2] 设有序对 (E, Λ) 为数域 K 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模, 对于 Λ 的任意有限子集 Q 以及 $\varepsilon \in L_{++}^0(F)$, 令 $B_Q(\varepsilon) = \{y \in E \mid \|y\|_Q \leq \varepsilon\}$ 。则 E 中的一个子集 G 称为 T_c -开集, 若 $\forall x \in G$ 都存在某个 $B_Q(\varepsilon)$ 使得 $x+B_Q(\varepsilon) \subset G$ 。 T_c 表示 E 的所有 T_c -开集所构成的集族。则 T_c 称为由 Λ 诱导的 E 上的局部 L^0 -凸拓扑。

定义 3^[6] 设 (E, Λ) 为数域 K 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模。则称 $E_c^* = \{f: E \rightarrow L^0(F, K) \mid f \text{ 为 } (E, T_c) \text{ 到 } (L^0(F, K), T_c) \text{ 的连续模同态}\}$ 为 (E, Λ) 在 T_c 下的随机共轭空间。

对于随机局部凸模 (E, Λ) , 存在下面两种重要的可数连结性质。

定义 4^[2] 设 (E, Λ) 为数域 K 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模。称 Λ 具有可数连结性质, 若对于 Ω 的任意可数 F -可测分划 $\{A_n \mid n \in N\}$ 和 Λ 中的任意有限子集序列 $\{Q_n \mid n \in N\}$ 都有

$$\sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} \cdot \|\cdot\|_{Q_n} \text{ 仍然属于 } \Lambda。$$

定义 5^[6] 设 E 为代数 $L^0(F, K)$ 上的左模, $\{x_n \mid n \in N\}$ 为 E 中一个序列, $\{A_n \mid n \in N\}$ 为 Ω 的任意可数 F -可测分划, 则称这样的形式和 $\sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n$ 为 $\{x_n \mid n \in N\}$ 关于 $\{A_n \mid n \in N\}$ 的可数连结。

进一步, 若存在 $x \in E$ 使得 $\tilde{I}_{A_n} x = \tilde{I}_{A_n} x_n, \forall n \in N$, 则称 $\sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n$ 为

良定义的或 $\sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n \in E$ 。称 E 的子集 G 具有可数连结性质,

若对于 G 中任意序列 $\{x_n \mid n \in N\}$ 都有 $\sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n \in G$, 即 $\sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n$

是良定义的并且存在 $x \in G$ 使得 $x = \sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n$ 。设 $G \subset E$, 则可数

连结 $\sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n$ 所成集合被称为 G 的可数连结包, 简记为 $H_{cc}(G)$,

其中 $x_n \in G, \forall n \in N$ 。对于 $L^0(F, K)$ -模 E 的子集 G 来说, 显然有 $H_{cc}(G) \supset G$, 且 G 具有可数连结性质当且仅当 $H_{cc}(G) = G$ 。

设 E 为代数 $L^0(F)$ 上的左模, 函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 。则称:

- (1) $\text{dom}(f) := \{x \in E \mid \text{在 } \Omega \text{ 上 } f(x) < +\infty\}$ 为 f 的有效域;
- (2) $\text{epi}(f) := \{(x, y) \in E \times L^0(F) \mid f(x) \leq y\}$ 为 f 的上方凸;
- (3) f 为“真的”, 若在 Ω 上 $f(x) > -\infty, \forall x \in X$ 且 $\text{dom}(f) \neq \Phi$ 。

定义 6^[2] 设 E 为代数 $L^0(F)$ 上的左模, 函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 。则: (1) 称 f 为 $L^0(F)$ -凸的, 若对于 $\forall x, y \in E$ 都有 $f(\xi x + (1-\xi)y) \leq \xi f(x) + (1-\xi)f(y)$ 成立, 其中 $\xi \in L_+^0(F)$ 且 $0 \leq \xi \leq 1$ (这里规定 $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ 且 $+\infty + (-\infty) = +\infty$); (2) 称 f 具有局部性质, 若

$\tilde{I}_A f(x) = \tilde{I}_A f(\tilde{I}_A x), \forall x \in E, A \in F$ 。可以验证, f 为 $L^0(F)$ -凸的当且仅当 f 具有局部性质且 $\text{epi}(f)$ 为 $L^0(F)$ -凸的。

定义 7^[6] 设 (E, Λ) 为数域 R 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模。称函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 为 T_c -下半连续的, 若 $\text{epi}(f)$ 为 $(E, T_c) \times (L^0(F, K), T_c)$ 中的闭子集。

下面回顾局部 $L^0(F)$ -凸拓扑下共轭函数的概念^[1]: 设 (E, Λ) 为数域 R 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模, 函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 。则定义 f 的 T_c -共轭函数 $f_c^*: E_c^* \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 为 $f_c^*(u) = \bigvee \{u(x) - f(x) \mid x \in E\}, \forall u \in E_c^*$; 定义 f 的 T_c -双共轭函数 $f_c^{**}: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 为 $f_c^{**}(x) = \bigvee \{u(x) - f_c^*(u) \mid u \in E_c^*\}, \forall x \in E$ 。

1 主要结果

对于数域 R 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模 (E, Λ) 来说, 下文中 $\langle u, x \rangle$ 总表示 $u(x), \forall u \in E_c^*, x \in E$ 。

定义 8^[2] 设 (E, Λ) 为数域 R 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模, 函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 。称 $u \in E_c^*$ 为 f 在 $x_0 \in \text{dom}(f)$ 点的次梯度, 若 $\langle u, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \forall x \in E$; 称 f 在 x_0 点的所有次梯度所组成的集合, 简记为 $\partial f(x_0)$, 为 f 在 x_0 点的次微分; 若 $\partial f(x_0) \neq \Phi$, 则称 f 在 x_0 点为 T_c -次可微的。类似地, 对于 $\varepsilon \in L_+^0(F)$, 称 $u \in E_c^*$ 为 f 在 $x_0 \in \text{dom}(f)$ 点的 ε -次梯度, 若 $\langle u, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) + \varepsilon, \forall x \in E$; 称 f 在 x_0 点的所有 ε -次梯度所组成的集合, 简记为 $\partial_\varepsilon f(x_0)$, 为 f 在 x_0 点的 ε -次微分。

当 (Ω, F, P) 为平凡的概率空间时, 即随机局部凸模 (E, Λ) 退化为一个局部凸空间时, 下面的命题 1 显然成立; 但当 (Ω, F, P) 为任意的概率空间时, 需要给出如下的证明。事实上, 随机局部凸模上这种层次结构处理正是本工作的难点。

命题 1 设 (E, Λ) 为数域 R 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模, $x_0 \in \text{dom}(f), \varepsilon \in L_+^0(F), f: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 为真的、具有局部性质的函数。则

$$x^* \in \partial_e f(x_0) \Leftrightarrow \langle x^*, x-x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) + \varepsilon \quad \forall x \in \text{dom}(f)$$

证明 必然性显然,故略。

对于任意的 $y \in \text{dom}(f)$, 取 $A := [f(y) < +\infty]$ 且 $z = I_A y + I_{A^c} x_0$ 。由 $I_A f(y) = +\infty$ 可得 $I_A \cdot \langle x^*, y-x_0 \rangle \leq I_A \cdot f(y) - I_A \cdot f(x_0) + I_A \cdot \varepsilon$ 。故只需证明 $I_A \cdot \langle x^*, y-x_0 \rangle \leq I_A \cdot f(y) - I_A \cdot f(x_0) + I_A \cdot \varepsilon$ 。由 f 的局部性质可得, 在 Ω 上有 $f(z) = f(I_A y + I_{A^c} x_0) = (I_A + I_{A^c}) \cdot f(I_A y + I_{A^c} x_0) = I_A f(I_A y) + I_{A^c} f(I_{A^c} x_0) = I_A f(y) + I_{A^c} f(x_0) < +\infty$ 成立, 故 $z \in \text{dom}(f)$ 。从而可得 $\langle x^*, z-x_0 \rangle \leq f(z) - f(x_0) + \varepsilon$ 。

故有

$$I_A \langle x^*, I_A y + I_{A^c} x_0 - x_0 \rangle \leq I_A f(z) - I_A f(x_0) + I_A \varepsilon$$

$$\text{即 } I_A \langle x^*, y-x_0 \rangle \leq I_A f(y) - I_A f(x_0) + I_A \varepsilon。$$

下面命题 2 及定理 1—定理 4, 证明由定义可得, 故略。

命题 2 设 $(E, \Lambda), f, \varepsilon$ 以及 x_0 与定义 8 中的假设相同, 则 $x^* \in E_c^*$ 属于 $\partial f(x_0)$ 当且仅当 $f(x_0) + f_c^*(x^*) - \langle x^*, x_0 \rangle \leq \varepsilon$ 。

定理 1 设 (E, Λ) 为数域 R 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模, 函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 。则 $u^* \in \partial f(u) \Leftrightarrow f(u) + f_c^*(u^*) = \langle u, u^* \rangle, \forall u \in \text{dom}(f)$ 。

定理 2 设 (E, Λ) 为数域 R 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模, 函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 。则对于任意的 $u \in \text{dom}(f)$, $\partial f(u)$ 为 $L^0(F)$ -凸的且为 $\sigma_c(E^*, E)$ -闭的, 其中 $\sigma_c(E^*, E) := \sigma_c(E_c^*, E)$ 表示随机弱*-拓扑, 详见文献[3]。

定理 3 设 (E, Λ) 为数域 R 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模, 函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 。则对于任意的 $\lambda \in L_{++}^0(F)$, $\partial(\lambda f)(u) = \lambda \cdot \partial f(u), \forall u \in \text{dom}(f)$ 。

定理 4 设 (E, Λ) 为数域 R 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模, 函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 。则对于任意的 $u \in \text{dom}(f)$, 有 $u^* \in \partial f(u) \Leftrightarrow u \in \partial f_c^*(u^*)$ 。

进一步, 若 E 和 Λ 都具有可数连结性质且 f 为真的、 T_c -下半连续的、 $L^0(F)$ -凸的, 则 $u^* \in \partial f(u) \Leftrightarrow u \in \partial f_c^*(u^*)$ 。

为证明定理 5, 需要下面命题 3、4 及引理 1 (易证, 故略)。

命题 3^[6] 设 E 为代数 $L^0(F, K)$ 上的左模, M, G 为 E 的两个非空子集且满足 $\tilde{I}_A M + \tilde{I}_{A^c} M \subset M$ 和 $\tilde{I}_A G + \tilde{I}_{A^c} G \subset G$, 若 $H_\infty(M) \cap H_\infty(G) = \Phi$, 则存在 $H(M, G) \in F$, 使得:

$$(1) P(H(M, G)) > 0;$$

$$(2) \text{ 对于 } \forall A \in F, A \subset H(M, G) \text{ 且 } P(A) > 0 \text{ 都有 } \tilde{I}_A M \cap \tilde{I}_{A^c} G = \Phi;$$

$$(3) \text{ 对于 } \forall A \in F, A \subset \Omega \setminus H(M, G) \text{ 且 } P(A) > 0 \text{ 都有 } \tilde{I}_A M \cap \tilde{I}_{A^c} G \neq \Phi, \text{ 其中称 } H(M, G) \text{ 为 } M, G \text{ 的互不相交层次且它在等价类意义下是唯一的。}$$

命题 4^[6] 设 (E, Λ) 为数域 K 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模且 Λ 具有可数连结性质, $x \in E, G$ 为 E 的非空 T_c -闭 $L^0(F)$ -凸子集, $x \in G$ 且 G 具有可数连结性质。则存在 $f \in E_c^*$ 使得 $(\text{Ref})(x) \geq \bigvee \{(\text{Ref})(y) \mid y \in G\}$, 且在 $H(\{x\}, G)$ 上 $(\text{Ref})(x) > \bigvee \{(\text{Ref})(y) \mid y \in G\}$, 其中 $(\text{Ref})(x) = \text{Re}(f(x)), \forall x \in E$ 。

引理 1 设 (E, Λ) 为数域 R 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局

部凸模且 E 具有可数连结性质, 函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 具有局部性质。则 $\text{epi}(f)$ 具有可数连结性质。

定理 5 设 (E, Λ) 为数域 R 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模且 E 和 Λ 都具有可数连结性质, $f: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 为真的、 T_c -下半连续的、 $L^0(F)$ -凸函数。则 $\partial f(x_0) \neq \Phi, \forall x_0 \in \text{dom}(f), \varepsilon \in L_{++}^0(F)$ 。

证明 因 $\varepsilon \in L_{++}^0(F)$, 故对于任意的 $A \in F$ 且 $P(A) > 0$, 都有 $\tilde{I}_A \cdot \{(x_0, f(x_0) - \varepsilon)\} \cap \tilde{I}_{A^c} \cdot \text{epi}(f) = \Phi$ 。

因 f 为 $L^0(F)$ -凸的, 故 f 具有局部性质, 从而由引理 1 知, $\text{epi}(f)$ 具有可数连结性质。又 f 为 T_c -下半连续的且为 $L^0(F)$ -凸的, 故 $\text{epi}(f)$ 为 $(E, T_c) \times (L^0(F), T_c)$ 中的闭子集且为 $L^0(F)$ -凸的。

注意到 $L^0(F)_c^* = L^0(F)$, 故可得 $(E \times L^0(F))_c^* = E_c^* \times L^0(F)_c^* = E_c^* \times L^0(F)$ 。将 $H(\{(x_0, f(x_0) - \varepsilon)\}, \text{epi}(f)) = \Omega$ 代入命题 4, 则存在 $(y^*, r^*) \in E_c^* \times L^0(F)$, 使得在 Ω 上,

$$\begin{aligned} \langle y^*, x_0 \rangle + r^* \cdot [f(x_0) - \varepsilon] &< \langle y^*, x \rangle + r^* \cdot r \\ \forall x \in \text{dom}(f), r &\geq f(x) \end{aligned} \quad (1)$$

式(1)中取 $x = x_0, r = f(x_0)$, 可得在 Ω 上 $r^* > 0$ 。故不失一般性, 假设 $r^* = 1$, 在式(1)中取 $r = f(x)$, 可得在 Ω 上 $\langle y^*, x_0 \rangle + \langle f(x_0) - \varepsilon, x \rangle < \langle y^*, x \rangle + f(x), \forall x \in \text{dom}(f)$ 。故由命题 1 得 $-y^* \in \partial f(x_0)$ 。从而 $\partial f(x_0) \neq \Phi$ 。

为了证明定理 6, 需要下面的命题 5 和命题 6。

命题 5^[7] 设 (E, Λ) 为数域 K 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模且 Λ 具有可数连结性质。若 $G \subset E$ 具有可数连结性质, 则 G 的 T_c -内部 G^0 也具有可数连结性质。

命题 6^[7] 设 (E, Λ) 为数域 K 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模, G 和 M 为 E 的两个非空 $L^0(F)$ -凸子集, G 的 T_c -内部 G^0 非空, 且 $H_\infty(G^0) \cap H_\infty(M) = \Phi$, 则存在 $f \in E_c^*$, 使得 $(\text{Ref})(x) \leq (\text{Ref})(y), \forall x \in G, y \in M$ 。且在 $H(G^0, M)$ 上 $(\text{Ref})(x) < (\text{Ref})(y), \forall x \in G^0, y \in M$ 。

定理 6 设 (E, Λ) 为数域 R 上以 (Ω, F, P) 为基的随机局部凸模且 E 和 Λ 都具有可数连结性质, 函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 与 $g: E \rightarrow \bar{L}^0(F)$ 都为真的、 T_c -下半连续的、 $L^0(F)$ -凸的。进一步, 若存在 $x_0 \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ 使得 f 在 x_0 点为 T_c -连续的, 则 $\partial f(x) + \partial g(x) = \partial(f+g)(x), \forall x \in \text{dom}(f+g)$ 。

证明 因 $\partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)(x)$ 显然成立, 故只需证明 $\partial f(x) + \partial g(x) \supset \partial(f+g)(x)$ 。对于任意的 $x^* \in \partial(f+g)(x)$, 不失一般性, 假设 $x^* = 0, x = 0$ 且 $f(0) = g(0) = 0$, 否则考虑用函数 $f_1(z) = f(x+z) - f(x) - \langle x^*, z \rangle$ 和 $g_1(z) = g(x+z) - g(x)$ 分别替换 f 和 g , 故只需证明 $0 \in \partial(f+g)(0) \Rightarrow 0 \in \partial f(0) + \partial g(0)$ 。

因 $0 \in \partial(f+g)(0)$, 故 $\langle 0, y-0 \rangle \leq (f+g)(y) - (f+g)(0), \forall y \in E$, 从而 $\bigwedge_{y \in E} [f(y) + g(y)] = f(0) + g(0) = 0$ 。

令 $G := \{(x, y) \in E \times L^0(F) \mid -f(x) \geq y\}$ 。下面证明 $\text{epi}(f)$ 和 G 满足命题 6 中的假设条件。

(1) 因 $(0, 0) \in \text{epi}(f) \cap G$, 故 $\text{epi}(f)$ 和 G 都为非空的。由 f 和 g 为 $L^0(F)$ -凸的, 可以验证 $\text{epi}(f)$ 和 G 都为 $L^0(F)$ -凸的。因

f 在 $x_0 \in \text{dom}(f)$ 点连续, 故 x_0 一定为 $\text{dom}(f)$ 的 T_c -内点, 从而存在 x_0 的 T_c -开邻域 U 使得在 Ω 上 $f(x) < f(x_0) + 1, \forall x \in U$ 成立。从而可得 $U \times \{r \in L^0(F) : \text{在 } \Omega \text{ 上 } r > f(x_0) + 1\} \subset \text{epi}(f)$, 故有 $\text{epi}(f)^0 \neq \Phi$ 。

(2) 因 E 具有可数连结性质和 f 具有局部性质, 由引理 1 知, $\text{epi}(f)$ 具有可数连结性质, 从而由命题 5 知, $\text{epi}(f)^0$ 具有可数连结性质。类似地, 可验 G 具有可数连结性质。

(3) 下面证明: 对于任意 $A \in F$ 且 $P(A) > 0$, 都有 $\tilde{I}_A \cdot \text{epi}(f)^0 \cap \tilde{I}_A \cdot G = \Phi$ 。否则, 存在 $B \in F, P(B) > 0$ 和 $(\hat{x}, \hat{r}) \in E \times L^0(F)$, 使得 $\tilde{I}_B \cdot (\hat{x}, \hat{r}) \in \tilde{I}_B \cdot \text{epi}(f)^0 \cap \tilde{I}_B \cdot G$ 。从而, 在 B 上 $f(\hat{x}) < \hat{r}$ 成立且在 B 上 $g(\hat{x}) \leq -\hat{r}$ 成立, 故在 B 上 $\tilde{I}_B \cdot (f+g)(\hat{x}) < 0$ 。由 f 和 g 为 $L^0(F)$ -凸的, 故 f 和 g 具有局部性质, 又由 $f(0)=g(0)=0$, 可得 $f(\tilde{I}_B \cdot \hat{x}) = \tilde{I}_B \cdot f(\hat{x})$ 和 $g(\tilde{I}_B \cdot \hat{x}) = \tilde{I}_B \cdot g(\hat{x})$ 。从而可得, 在 B 上 $\bigwedge_{y \in B} [f(y) + g(y)] \leq f(\tilde{I}_B \cdot \hat{x}) + g(\tilde{I}_B \cdot \hat{x}) = \tilde{I}_B \cdot f(\hat{x}) + \tilde{I}_B \cdot g(\hat{x}) < 0$ 与 $\bigwedge_{y \in E} [f(y) + g(y)] = f(0) + g(0) = 0$ 矛盾。

综上, $\text{epi}(f)$ 和 G 满足命题 6 中的假设条件且 $H(\text{epi}(f)^0, G) = \Omega$, 故存在 $(x^*, r^*) \in E_c^* \times L^0(F)$, 使得

$$\begin{aligned} \langle x^*, x_1 \rangle + r^* \cdot r_1 &\leq \langle x^*, x_2 \rangle + r^* \cdot r_2 \\ \forall (x_1, r_1) \in \text{epi}(f), (x_2, r_2) \in G \end{aligned} \quad (2)$$

且在 Ω 上,

$$\begin{aligned} \langle x^*, x_1 \rangle + r^* \cdot r_1 &< \langle x^*, x_2 \rangle + r^* \cdot r_2 \\ \forall (x_1, r_1) \in \text{epi}(f)^0, (x_2, r_2) \in G \end{aligned} \quad (3)$$

因 $(0, 1) \in \text{epi}(f)^0, (0, 0) \in G$, 故由式(3)可知, 在 Ω 上 $r^* < 0$ 。不失一般性, 假设 $r^* = -1$ 。

再在式(2)中取 $r_1 = f(x_1), r_2 = -g(x_2)$, 可得

$$(4)$$

在式(4)中取 $x_2 = 0$, 可得出 $\langle x^*, x_1 \rangle \leq f(x_1) - f(0), \forall x_1 \in \text{dom}(f)$, 故由命题 1 知 $x^* \in \partial f(0)$ 。在式(4)中取 $x_1 = 0$, 可得 $-x^* \in \partial g(0)$ 。故 $0 = x^* + (-x^*) \in \partial f(0) + \partial g(0)$ 。

2 结论

本文通过对随机局部凸模的层次结构加以分析, 并结合最近建立的随机局部凸模上的分离定理, 得到了关于随机局部凸模上 L^0 -值函数的次微分的一些基本性质, 本文结果推广了经典凸分析中的相应结果。

参考文献 (References)

- [1] Guo T. Some basic theories of random normed linear spaces and random inner product spaces[J]. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 1999, 1(2): 160-184.
- [2] Filipović D, Kupper M, Vogelpoth N. Separation and duality in locally L^0 -convex modules [J]. *Journal of Functional Analysis*, 2009, 256(12): 3996-4029.
- [3] Guo T. Recent progress in random metric theory and its applications to conditional risk measures [J]. *Science China, Ser A*, 2011, 54 (4): 633-660.
- [4] Dunford N, Schwartz J T. Linear operators, Part I [M]. New York: Interscience, 1957: 4-8.
- [5] Guo T. Survey of recent developments of random metric theory and its applications in China (II)[J]. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 2001, 3 (3): 208-230.
- [6] Guo T. Relations between some basic results derived from two kinds of topologies for a random locally convex module [J]. *Journal of Functional Analysis*, 2010, 258(9): 3024-3047.
- [7] Guo T, Shi G. The algebraic structure of finitely generated $L^0(F, K)$ -modules and the Helly theorem in random normed modules[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, 381(2): 833-842.

(责任编辑 朱宇)

·学术动态·

“2012 年全国弹道学术研讨会”征文



由中国兵工学会主办的“2012 年全国弹道学术研讨会”拟于 2012 年 10 月 1 日在北京市召开。

征文范围: 内弹道(含新概念发射原理、点传火技术、火工品技术、发射药及装药技术等); 外弹道(飞行控制、制导、弹箭气动力、姿态探测等); 战斗部机理; 终点弹道及高效毁伤; 发射动力学(火炮、多体动力学); 创伤弹道; 信息化弹药; 弹道测试技术; 弹道数值模拟与仿真等。

全文截稿日期: 2012 年 6 月 30 日。

联系电话: 025-84303167。

电子信箱: ballistics@163.com。

大会网站: <http://www.cos.org.cn>。