经典力学的历史贡献与启示

梅凤翔,吴惠彬

北京理工大学力学系,北京 100081

摘要　将经典力学的发展分成5个阶段,即牛顿力学、拉格朗日力学、哈密顿力学、非完整力学以及伯克霍夫力学。概述各个阶段的历史贡献,从贡献中发现问题并得到启示。

关键词　经典力学;贡献;启示

中图分类号　O316　　**文献标识码**　A　　**doi**　10.3981/j.issn.1000-7857.2012.11.009

Historical Contributions and Inspirations of Classical Mechanics

MEI Fengxiang, WU Huibin

Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract　The development of classical mechanics could be divided into five stages, i.e. Newton mechanics, Lagrange mechanics, Hamilton mechanics, nonholonomic mechanics, and Birkhoff mechanics. The historical contributions of each stage are summarized, then from which the problems are found and inspirations are obtained.

Keywords　classical mechanics; contribution; inspiration

0　引言

自1687年牛顿发表名著《自然哲学的数学原理》,300多年来,经典力学在科学技术的推动下按照自身逻辑不断发展深化。经典力学的发展,大致可以分为5个阶段,即牛顿力学、拉格朗日力学、哈密顿力学、非完整力学以及伯克霍夫力学。在经典力学发展的各个阶段,代表人物的代表工作至关重要。本文试图在这些大学问家的历史贡献中找到问题并得到启示。

1　牛顿力学

1.1　贡献

牛顿(I. Newton,1642—1727)在1686年5月8日为他的《自然哲学的数学原理》(Philosophia Naturalis Principia Mathematica)(以下简称《原理》)写了序言,在哈雷(E. Halley,1656—1742)的推动下,1687年《原理》正式发表。300多年来,人们对《原理》见仁见智,无可争辩的是,它对自然科学的发展,乃至整个人类文明,起着重大的历史作用。正如波普(A. Pope,1688—1744)所称:“Nature and Nature's laws lay hid in night; God said,‘Let Newton be’,and all was light”,意思是说:道法自然,久藏玄冥;天降牛顿,万物生明[1]。

牛顿在力学方面的贡献是,总结出了物体运动的3个基本定律并发现了万有引力定律。牛顿将地球上物体的力学和天体力学统一到一个基本的力学体系中,创立了经典力学理论体系,正确地反映了宏观物体低速运动的宏观运动规律,实现了自然科学的第一次大统一。这是人类对自然界认识的一次飞跃[2]。

牛顿力学以牛顿运动定律和万有引力定律为基础,研究速度远小于光速的宏观物体的运动规律[2]。牛顿主要研究自由质点的运动。利用牛顿力学能够解像有心力场的运动、较少自由度保守系统的运动、以及动量守恒、动量矩守恒、机械能守恒等问题。牛顿力学是经典力学发展的第1阶段。

1.2　问题

牛顿没有研究受约束物体的运动。例如,一质量为m的质点在重力作用下在铅垂面内一固定曲线$f(x,y)=0$上运动,用牛顿第二定律列写微分方程,有

$$m\ddot{x}=F_{Nx}\qquad m\ddot{y}=F_{Ny}-mg$$

其中F_{Nx},F_{Ny}为约束力。这时方程有3个,而未知量有4个:x,y,F_{Nx},F_{Ny},这可以叫做牛顿力学的待定性。为解决这个问题,

收稿日期:2012-02-28;修回日期:2012-04-01

基金项目:国家自然科学基金项目(10932002,10972031);北京市重点学科基金项目

作者简介:梅凤翔(中国科协所属全国学会个人会员登记号:S030106014M),教授,研究方向为分析力学,电子信箱:meifx@bit.edu.cn

必须给出约束力的实现:曲线是光滑的,还是有摩擦的。如果是有摩擦的,还需给出摩擦定律。

1.3 启示

牛顿根据行星运动的开普勒三定律导出了他的万有引力定律,即根据运动求力的问题。已知力求运动叫动力学正问题;反之,已知运动求力,称为动力学逆问题。牛顿以及后来的 Bertrand[3],Суслов[4],Мещерский[5],Чаплыгин[4],Poincaré[4]等的工作,为 20 世纪 60—70 年代出现的力学新分支“动力学逆问题”奠定了基础。目前,动力学逆问题已扩充到分析力学、运动控制理论、刚体动力学、转子动力学、结构动力学、弹性动力学等领域[4,6]。

凡有正问题的地方,必有逆问题。逆问题总是与正问题相关。这是所有学科的共性,也是任何一个科学问题的共性。这是牛顿力学对后人的启示。

2 拉格朗日力学

2.1 贡献

18 世纪以来,大工业的发展需要人们去研究具有约束的复杂系统静力学和动力学问题。这是经典力学发展到第二个阶段的时代背景,或技术背景。同时,科学的发展也有自身的逻辑。第三,还需要有代表人物的代表工作。

达朗贝尔(Jean le Rond d'Alembert,1717—1783)于 1743 年出版《动力学》(Traité de Dynamique),1990 年由 Jacques Gabay 出版社重新印刷[7]。达朗贝尔在他的书中将运动分成两部分,后人理解他将力分成两部分:一部分使质点产生加速度,叫发动力,余下部分叫损失力,损失力为约束力所平衡[8]。文献[9]指出,达朗贝尔原理在质点系动力学问题中,约束力的总体可以不予考虑。因为达朗贝尔在其书中没有给出公式,只给出一段文字,后人对他的原理便有各种理解,甚至有人认为达朗贝尔原理只是牛顿第二定律的简单移项。文献[8]—[10]的理解是正确的,能够反映达朗贝尔的原意。对质点系,达朗贝尔原理应表示为

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}_{Ni}\quad i=1,2,\cdots,N \tag{1}$$

其中,m_i 为第 i 个质点的质量,$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 为其加速度,$\boldsymbol{F}_i$ 为主动力,$\boldsymbol{F}_{Ni}$ 为约束力。达朗贝尔原理实际上是给出了有关约束力的公理,需将约束力写在方程的一边,将主动力和惯性力写在方程的另一边。正是有了达朗贝尔原理,后来拉格朗日才提出了动力学普遍方程(或达朗贝尔-拉格朗日原理),奠定了分析动力学的基础。

拉格朗日 (Joseph-Louis Lagrange,1736—1813) 于 1788 年出版《分析力学》(Mécanique Analytique),1990 年由 Jacques Gabay 出版社出第 4 版, 共两卷, 并带有 J. Bertrand 和 G. Darboux 给出的注记[11]。在第一卷的注记 6 中,出现了第一类拉格朗日方程和第二类拉格朗日方程的近代表示。拉格朗日是分析力学的奠基人,在其著作中提出分析静力学的一般原理,即虚位移原理或虚功原理,并与达朗贝尔原理结合而得到动力学普遍方程。对于具有约束的力学系统,他采用广义坐标,得到第一类拉格朗日方程和第二类拉格朗日方程。

虚位移原理表述为: 对具有双面理想约束的质点系,其平衡的充分必要条件是,主动力在虚位移上所做元功之和等于零,即

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{2}$$

动力学普遍方程,即达朗贝尔-拉格朗日原理,表示为

$$\sum_i(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{3}$$

在拉格朗日著作第一卷注记 6 中给出第一类拉格朗日方程:

$$\begin{aligned}
m_i\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}&=X_i+\lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_i}+\lambda_2\frac{\partial\Pi_2}{\partial x_i}+\cdots+\lambda_{3n-k}\frac{\partial\Pi_{3n-k}}{\partial x_i}\\
m_i\frac{\mathrm{d}^2y_i}{\mathrm{d}t^2}&=Y_i+\lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i}+\lambda_2\frac{\partial\Pi_2}{\partial y_i}+\cdots+\lambda_{3n-k}\frac{\partial\Pi_{3n-k}}{\partial y_i}\\
m_i\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\mathrm{d}t^2}&=Z_i+\lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial z_i}+\lambda_2\frac{\partial\Pi_2}{\partial z_i}+\cdots+\lambda_{3n-k}\frac{\partial\Pi_{3n-k}}{\partial z_i}
\end{aligned} \tag{4}$$

其中,$\Pi_1=0,\Pi_2=0,\cdots,\Pi_{3n-k}=0$ 为约束方程,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{3n-k}$ 为待定乘子,以及第二类拉格朗日方程:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial q'_1}-\frac{\partial T}{\partial q_1}&=Q_1\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial q'_2}-\frac{\partial T}{\partial q_2}&=Q_2\\
&\vdots\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial q'_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}&=Q_k
\end{aligned} \tag{5}$$

式(4),式(5)由 J. Bertrand 给出,将拉格朗日方程表示得更清楚了。

拉格朗日力学能够解决牛顿力学所能解决的问题,拉格朗日力学也能解决牛顿力学不能解决的问题。例如,对完整系统的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0\quad s=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

如果某个坐标,例如 q_1,不出现在 L 中,则有积分

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}=\beta$$

它代表广义动量守恒,可以是动量守恒、动量矩守恒或别的什么。这个“别的什么”是牛顿力学找不到的。由方程(6)还可以找到积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s-L=h$$

它可以是机械能守恒,也可以是别的什么。拉格朗日力学发展了牛顿力学。拉格朗日力学可以解决一系列重要的力学问题,包括小振动理论、刚体动力学等[12]。中国发射的嫦娥二号卫星于 2011 年 6 月 9 日开始飞离月球奔向第二拉格朗日点。

2.2 问题

(1) 关于虚位移原理的证明

虚位移原理的必要性证明很容易,充分性的证明需要用

到实位移是虚位移之一的条件，这限制了原理的适用范围。目前尚未有一个完备的证明。其实,原理可当作公理,而公理是不需要证明的。

(2) 关于平衡稳定性

拉格朗日关于平衡稳定性的结论,有如下一段文字:“刚刚看到,当系统的位置是平衡位置时,函数 Π 取极小或极大;现在证明,如果这个函数是极小,则平衡是稳定的。……反之,在这个函数是极大的情形,平衡将是不稳定的”[11]。上面所指函数 Π 就是势能函数,它与力函数符号相反。

李亚普诺夫提出如下问题:“如果力函数在平衡位置上不是极大,平衡位置是不稳定的吗?”换成势能的提法是:“如果势能在平衡位置上不是极小,平衡位置是不稳定的吗?”答案是不一定。但在一定限制下,可以是不稳定的。李亚普诺夫给出 2 个定理,回答了上述问题,见文献[13]。

(3) 关于旋转对称刚体在完全粗糙水平面上的纯滚动

1895 年芬兰著名数学家 E. Lindelöf 在解上述问题时,将约束方程嵌入到动能中,用第二类拉格朗日方程,得到[14]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_\sigma}=0$$

并给出解。Lindelöf 表面精美但不正确的解如此地令 Appell 高兴,以致他将其作为第二类拉格朗日方程的应用例子写进《理性力学》第 1 版中[15]。在拉格朗日时代,人们还不知道非完整约束是什么,还不知道他的方程仅适合完整约束系统。

2.3 启示

(1) 拉格朗日力学逆问题

对于完整保守系统,只用一个函数,即动能减势能,就可列写系统的运动微分方程。对具有 n 个自由度系统，给出 n 个二阶微分方程(6)。反过来,人们去想,对给定的 n 个二阶方程,能否构造出函数 L,使得可以表为式(6)。这就是所谓拉格朗日力学逆问题。当然,一般说来,构造出来的函数 L 已不再是动能减势能了。这个问题从 Jacobi 1837 年的工作到 Santilli 1978 年的著作《理论力学基础 Ⅰ》[16],算告一段落,但是,还没有终结。

(2) 几何动力学

拉格朗日的著作重分析而轻几何。20 世纪 60—70 年代兴起几何动力学,将微分几何与拉格朗日力学结合起来[12,17-19],使拉格朗日力学焕然一新。在几何动力学中出现拉格朗日流形、拉格朗日映射、拉格朗日等价性、拉格朗日奇点等提法。

(3) 拉格朗日对称性

专著[20]中有一例子,指出下面的拉格朗日函数

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}^2-q^2),L_1^*=\frac{1}{6}\dot{q}^3\cos t+\frac{1}{2}q\dot{q}^2\sin t-q^2\dot{q}\cos t$$

$$L_2^*=2\frac{\dot{q}}{q}\arctan\frac{\dot{q}}{q}-\ln(\dot{q}^2+q^2)$$

都表示一维谐振子

$$\ddot{q}+q=0$$

函数 L 有直接解析表达

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=(\ddot{q}+q)_{SA}$$

其余 2 个有间接解析表达

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L^*}{\partial q}=[I(t,q,\dot{q})(\ddot{q}+q)_{SA}]_{SA}$$

此时 I 是积分

$$I_1=\dot{q}\cos t+q\sin t=C_1$$

$$I_2=(\dot{q}^2+q^2)^{-1}=C_2$$

这样,就说 L_1^* 与 L,L_2^* 与 L 具有拉格朗日对称性,并由这种对称性得到了守恒量 I_1,I_2。

1966 年 Currie 和 Saletan 研究了单自由度系统的等价拉格朗日函数问题[21]。1981 年 Hojman 和 Harleston 将此结果推广到多自由度系统[22]。专著[23]给出完整非保守系统拉格朗日对称性的定义,判据以及导致的守恒量形式。文献[24]研究了非完整系统的拉格朗日对称性并导出了守恒量。

3 哈密顿力学

3.1 贡献

哈密顿(William Rowan Hamilton,1805—1865)发展了拉格朗日的分析力学,1834 年建立了著名的哈密顿原理，使各种动力学定律可由一个变分式导出。这个原理不仅适用于力学,还可适用于光学、电磁学等。他将广义坐标和广义动量作为独立变量,建立了正则方程。

拉格朗日方程(6)是 n 个二阶微分方程,怎样化成 $2n$ 个一阶方程?当然,可简单地取广义坐标和广义速度为变量,但并未带来好处。哈密顿想到用广义坐标和广义动量为变量,这对变量称为正则变量;用他提出的函数替代拉格朗日函数。广义动量为

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}$$

哈密顿函数为

$$H=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-L$$

正则方程为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\quad s=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

哈密顿的另一重要贡献是建立了一个积分变分原理,即哈密顿原理,表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\mathrm{d}t=0 \tag{8}$$

$$\delta q_s\big|_{t=t_0}=\delta q_s\big|_{t=t_1}=0,\mathrm{d}\delta=\delta\mathrm{d}$$

雅可比(Carl Gustar Jacob Jacobi,1804—1851)改进和发展了哈密顿的工作,提出了求解正则方程的哈密顿-雅可比方法。

哈密顿的观点使人们能完全解用其他方法不能解决的一系列力学问题,例如,两个恒定中心的吸引问题;又如,三

轴椭球上的测地线问题。对于天体力学摄动理论的近似方法,以及了解复杂力学系统运动的一般性质,以及与其他数学物理领域(光学、量子力学等)的联系上,哈密顿的观点有更大的价值[12]。

哈密顿力学是经典力学发展的第 3 阶段。

3.2 问题

(1) 哈密顿力学适用于完整保守系统,一般说来不适用于非保守系统和非完整系统。

(2) 对某些非保守系统,其运动微分方程能否表为正则形式? 或者说,对一般的一阶方程组在怎样的条件下可哈密顿化? 专著[16]给出一种构造哈密顿函数的方法。

(3) 正则方程(7)可以表示为更方便的形式

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial H}{\partial a^{\mu}}=0 \quad \mu=1,2,\cdots,2n \tag{9}$$

其中

$$\omega^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & 1_{n\times n}\\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix},\ \sum_{\rho=1}^{2n}\omega_{\mu\rho}\omega^{\rho\nu}=\delta_{\mu}^{\nu},$$

$$a^{\mu}=\begin{cases}q_{\mu} & \mu=1,2,\cdots,n\\ p_{\mu-n} & \mu=n+1,n+2,\cdots,2n\end{cases}$$

以及

$$\dot{a}^{\mu}-\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}=0 \tag{10}$$

式(9)称为相空间中解析方程的协变标准形式,式(10)称为逆变标准形式[20]。这些形式便于进行代数讨论与几何讨论。

3.3 启示

(1) 哈密顿原理的推广与应用

哈密顿原理的前提是具有完整、有势的力学系统。这个原理可以推广到完整、非势力系统,有形式

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s\mathrm{d}t=0 \tag{11}$$

其中 Q_s 为非势广义力。哈密顿原理是一个极值原理,或称为稳定作用量原理,因此,它特别适用于近似计算。

(2) 对称性与守恒量

德国数学家诺特 (Amalie Emmi Noether,1882—1935)于 1918 年发表论文《不变变分问题》[25]。在这篇著名论文中,诺特研究了哈密顿作用量 $\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t$ 在群的无限小变换下的不变性。这种不变性,后人称为诺特对称性。由诺特对称性导致的守恒量,称为诺特守恒量。20 世纪 70 年代以来诺特对称性的研究取得重要进展,如文献[26]—[30]。

(3) KAM 定理

20 世纪 60 年代,KAM 定理对近乎可积哈密顿系统的解性质给出一些重要的结论。这个定理与 Lorenz 方程一起标志着混沌理论的开端。Lorenz 根据 Lorenz 方程并借助计算机模拟在耗散系统中首先发现了混沌运动, 而 KAM 定理则是在哈密顿系统数学理论方面揭示了不可积系统的混沌运动的发生机制并被国际混沌学界公认为这一新学科的第一开端。KAM 定理是定性性质的,它没有说明“近乎可积”中近到什么程度才成立。Arnold 扩散的速度定量估计是什么?目前这些还都只能借助数值实验确定。然而这个定理指明了可能的结果使人不致在一大堆数字结果中迷失方向[31]。

(4) 辛几何

哈密顿力学促进了辛几何的形成和发展。反之,用辛几何描述分析力学也取得重要进展。专著[12],[17]—[19],[32]—[33]将辛几何的成果充分应用于描述分析力学。

(5) 广义哈密顿系统

广义哈密顿系统的基本思想是, 构造一个哈密顿系统,在这个系统中,正则的共轭变量被非正则变量替代,而这些非正则变量通常是系统的物理变量[34]。20 世纪 50 年代以来,广义哈密顿力学取得了重要进展,如文献[35]—[37]。哈密顿系统理论是在偶数维相空间上定义的,这种结构有很好的性质,为使哈密顿观点能够应用于奇数维常微分方程组及无穷维系统,可采用广义泊松括号来定义广义哈密顿系统[37]。

在经典力学作出重要贡献的除拉格朗日、达朗贝尔、哈密顿、雅可比之外,还应提到庞加莱(Henri Poincaré,1854—1912) 和李亚普诺夫 (Александр Михаилович Ляпунов,1857—1918)。庞加莱是法国科学家,运动稳定性理论的奠基人之一和非线性动力学的先驱。李亚普诺夫是俄国力学家、数学家,运动稳定性理论的奠基人之一。

拉格朗日、哈密顿、雅可比、庞加莱、李亚普诺夫等的工作如此完美以致众多后人认为再没有什么本质的东西可以补充到有限自由度动力系统中。就像德国数学家克莱因(Felix Klein,1849—1925)在《十九世纪数学发展史讲义》所描述的分析动力学 “……一个物理学家想要解决自己的问题,从这些理论中所得无几,而工程师将一无所得”。但之后的科学发展否定了这个评论[12]。

4 非完整力学

4.1 贡献

赫兹(Heinrich Hertz,1857—1894)于 1894 年首次将约束和系统分成完整的和非完整的两大类。1894 年被认为是非完整力学研究的开端。当然,在此前也有学者导出了带乘子的拉格朗日方程。

至少有一个不可积分的微分约束系统称为非完整系统。对非完整系统,第二类拉格朗日方程已经不再适用。在非完整力学作出重要贡献的有恰普雷金 (Сергей Алексеевич Чаплыгин,1869—1942),沃尔泰拉(V. Volterra,1860—1940),阿佩尔(Paul Appell,1855—1930),哈茂尔(Georg Hamel,1877—1954), 沃洛涅茨 (Петр Васильевич Воронец,1871—1923)等。专著[15],[38]—[41]较全面论述了非完整力学。

非完整力学可用来研究滚轮系统,如自行车、汽车、飞机起落架等;可用来研究电机;也可用来研究线路稳定性问题[38]。

非完整力学是经典力学发展的第4阶段。

4.2 问题

(1) 关于非完整约束的物理实现问题

线性非完整约束一般借助接触和摩擦来实现，如冰刀不允许横滑、滚球、滚盘等。非线性非完整约束的物理实现是个问题。阿佩尔–哈茂尔椅子轮问题是用取极限来实现非线性非完整约束的[40]，但文献[38]指出了极限过程的不正确性。

(2) 关于虚位移的阿佩尔–切塔耶夫定义

对于一般双面理想非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad \beta=1,2,\cdots,g \tag{12}$$

它对虚位移 δq_s 的限制表为阿佩尔–切塔耶夫定义

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \tag{13}$$

将动力学普遍方程(3)写成广义坐标形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s+\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s=0 \tag{14}$$

由式(13)，式(14)可导出非完整系统的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad s=1,2,\cdots,n \tag{15}$$

非完整约束对虚位移 δq_s 的限制条件(13)曾遭到怀疑，并引起争议[42-43]。

(3) 运动稳定性

非完整系统稳定性研究长时间发生很大困难。Bettema在1949年首次正确地解释了系统的非完整性对稳定性的影响。文献[44]—[45]介绍了非完整系统运动稳定性的研究进展。近代微分几何工具的应用、滚轮系统的线路稳定性、随机稳定性等都是重要问题。

4.3 启示

(1) 哈密顿原理

对完整保守系统建立的哈密顿原理(8)能否应用与怎样应用于非完整系统，是一个颇有争议的问题。将有势力情形的动力学普遍方程

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s=0$$

从 t_0 至 t_1 积分并利用端点条件

$$\delta q_s\big|_{t=t_0}=\delta q_s\big|_{t=t_1}=0$$

得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta L+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)-\delta\dot{q}_s\right]\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{16}$$

设非完整约束方程表为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t) \qquad s=1,2,\cdots,n;\ \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon;\ \varepsilon=n-g;\ \beta=1,2,\cdots,g \tag{17}$$

对d，δ运算交换关系的Suslov观点

$$\delta\dot{q}_\sigma=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_\sigma$$

$$\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta})-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma$$

$$T_\sigma^{\varepsilon+\beta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\dot{q}_\sigma}$$

式(16)给出

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta L)_S+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{18}$$

而Hölder观点给出

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta L)_H\mathrm{d}t=0$$

$$\delta\dot{q}_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_s \tag{19}$$

非完整系统哈密顿原理的两种形式(18)和(19)是等价的，一般说都不是稳定作用量原理[46-47]。

(2) 积分方法

完整保守系统的一整套积分方法，如降阶法、Poisson方法、哈密顿–雅可比方法、对称性方法等，能否应用与怎样应用于非完整系统，是一个困难问题。例如，R. V. Dooren提出的积分非完整系统的广义哈密顿–雅可比方法，仅对个别的非完整系统才适用[48]。

(3) 非完整系统的分叉与混沌

非完整系统一般都是高维的，高维系统的分叉与混沌问题本身就很难研究。文献[49]对滚盘、滚球、Celt石头等不太复杂的非完整问题给出了一些结果。计算机实验用来研究这类问题被认为是一个新动向。

(4) 非完整系统的分数维动力学

分数维动力学已在理论物理、力学和应用数学诸多领域中开展研究。专著[50]研究了分数维非完整约束以及分数维运动微分方程。这些研究的物理实质和力学意义有待进一步深入探讨。

5 伯克霍夫力学

5.1 贡献

伯克霍夫(George D Birkhoff，1884—1944)被认为是庞加莱的继承人。在他的著作《动力系统》中提出一类新型积分变分原理和一类新型运动微分方程[51]。美国强子物理学家散提黎(R. M. Santilli)将伯克霍夫的结果推广到包含时间的情形，并于1983年提出伯克霍夫力学一词[20]。伯克霍夫力学是在量子力学出现以后发展起来的新力学。

伯克霍夫力学的基础是普法夫–伯克霍夫(Pfaff–Birkhoff)原理和伯克霍夫方程。普法夫–伯克霍夫原理表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu(t,\boldsymbol{a})\dot{a}^\mu-B(t,\boldsymbol{a})\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{20}$$

$$\delta a^\mu\big|_{t=t_0}=\delta a^\mu\big|_{t=t_1}=0,\ \mathrm{d}\delta=\delta\mathrm{d}$$

其中函数 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 称为伯克霍夫函数，$2n$ 个函数 $R_\mu=R_\mu(t,\boldsymbol{a})$ 称为伯克霍夫函数组。由原理(20)可导出伯克霍夫方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0 \quad \mu,\nu=1,2,\cdots,2n \tag{21}$$

当取

$$a^\mu=\begin{cases}q_\mu & \mu=1,2,\cdots,n\\ p_{\mu-n} & \mu=n+1,n+2,\cdots,2n\end{cases}$$

$$B=H$$

则原理(20)成为哈密顿原理

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-H\right)\mathrm{d}t=0$$

而方程(21)成为哈密顿正则方程

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

因此,伯克霍夫力学是哈密顿力学的自然推广。

文献[20]研究了伯克霍夫方程、变换理论、伽利略相对论的推广,并证明伯克霍夫方程是由正则方程经过非正则变换来得到的。

伯克霍夫方程有一系列很好的性质,如自治和半自治伯克霍夫系统具有李代数结构,恰当辛形式;伯克霍夫方程具有自伴随性质等。伯克霍夫力学可应用于强子物理、统计力学、工程、空间力学、生物物理等领域[20]。

伯克霍夫力学是经典力学发展的第5阶段。

5.2 问题

(1) 奇数维系统

专著[20]指出,所有局部、解析、规则、有限维、无约束或有完整约束,保守或非保守,自伴随或非自伴随一阶方程组总有伯克霍夫表示,即总可以化成伯克霍夫方程。但是,对奇数维微分方程就有困难。

(2) 非完整系统

怎样将非完整系统的方程化成伯克霍夫方程,是一个困难问题。一般地,将非完整系统化成相应的完整系统,再研究相应完整系统的伯克霍夫表示,最后施加非完整约束对初始条件的限制来研究非完整系统的运动[52]。

(3) 运动稳定性

李亚普诺夫一次近似理论和李亚普诺夫直接法都可用来研究伯克霍夫系统的运动稳定性[52]。与此相关可研究伯克霍夫系统的分岔与混沌[53]。

(4) 对称性与守恒量

伯克霍夫系统的对称性与守恒量研究,包括诺特对称性[20,53-55],李对称性[53-55],形式不变性[53,55],共形不变性[54],以及等价伯克霍夫函数问题[56]。

(5) 与广义哈密顿系统的关系

伯克霍夫系统的方程是偶数维的,广义哈密顿系统的方程可以是奇数维的。在什么情况下两个系统一样,在什么情况下两个系统不一样,是个值得研究的问题。

5.3 启示

(1) 算法

哈密顿系统具有自然辛结构,因此,有辛算法。伯克霍夫系统是哈密顿系统的自然推广,因此,可以研究系统的算法。文献[57]—[58]给出了一些结果。

(2) 几何动力学

哈密顿力学的微分几何方法已取得重要进展,如文献[12],[17]—[19],[59] 对伯克霍夫系统的微分几何方法也有一定进展,如文献[20],[60]。

(3) 广义伯克霍夫系统

对所有局部、解析、规则、有限维、无约束或有完整约束,保守或非保守,自伴随或非自伴随偶数维一阶方程组,理论上总有伯克霍夫表示,但在技术上确有困难。如果在伯克霍夫方程(21)右端添加一个补充项,则构造起来就变得很容易。文献[61]从普法夫作用量在无限小变换的广义准对称性研究方面生成了这个补充项,并称之为广义伯克霍夫方程。文献[62]从广义普法夫—伯克霍夫原理方面也生成了这个补充项。文献[63]—[65]分别研究了广义伯克霍夫系统的动力学逆问题、共形不变性、时间积分定理等。

6 展望

经典力学发展的5个阶段中,许多大学问家做出了光辉的历史贡献。从这些历史贡献中看到科学思想的发现与发展,更重要的是能够发现问题并从中得到启示。经典力学并没有终结,还会发展。

参考文献(References)

[1] 朱照宣. 牛顿《原理》三百年祭[J]. 力学与实践, 1987, 9(5): 1-2.
Zhu Zhaoxuan. *Mechanics in Engineering*, 1987, 9(5): 1-2.

[2] 中国大百科全书编委会. 中国大百科全书·力学[M]. 北京: 中国大百科全书出版社, 1985.
The Committee for the Encyclopedia of China. Encyclopedia of China·Mechanics[M]. Beijing: Encyclopedia of China Publishing House, 1985.

[3] Appell P. Traité de mécanique rationnelle tome 1 [M]. Paris: Gautier-Villars et C^ie, 1953.

[4] Галиуллин А С. Методы решения обрадных задач динамики[M]. Москва: Наука, 1986.

[5] Мещерский ИВ. Работы по механике тел переменной массы[M]. Москва: Гостехиздат, 1950.

[6] 梅凤翔. 动力学逆问题[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.
Mei Fengxiang. Inverse problems of dynamics [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2009.

[7] D'Alembert J. Traité de dynamique [M]. Paris: Éditions Jacques Gabay, 1990.

[8] 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学: 下册 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1982.
Zhu Zhaoxuan, Zhou Qizhao, Yin Jinsheng. Theoretical mechanics: The last of two volumes[M]. Beijing: Peking University Press, 1982.

[9] Rosenberg R M. Analytical dynamics of discrete systems [M]. New York: Plenum Press, 1977.

[10] Hamel G. Theoretische mechanik[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1949.

[11] Lagrange J L. Mécanique analytique I, II [M]. Quatrième Édition. Paris: Éditions Jacques Gabay, 1990.

[12] Arnold V I. Mathematical methods of classical mechanics [M]. New

York: Springer-Verlag, 1978.
[13] 高为炳. 运动稳定性基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.
Gao Weibing. Foundations of stability of motion [M]. Beijing: Higher Education Press, 1987.
[14] Lindelöf E. Sur le mouvement d´un corps de revolution roulant sur un plan horizontal[J]. *Acta Soc Sci Fennicae*, 1895, 20(10): 1-18.
[15] 杰格日达 C A, 索尔塔哈诺夫 ШХ, 尤士科夫 МП. 非完整系统的运动方程和力学的变分原理. 新一类控制问题 [M]. 梅凤翔, 译. 北京: 北京理工大学出版社, 2007.
Зегжда С А, Солтаханов ШХ, Юшков МП. Equations of motion of nonholonomic systems and variational principles of mechanics. A new control problem [M]. Mei Fengxiang, trans. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2007.
[16] Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅰ [M]. New York: Springer-Verlag, 1978.
[17] Abraham R, Marsden J E. Foundations of mechanics[M]. MA: Benjamin/Cummings, 1978.
[18] Godbillon C. Géometrie différentielle et mécanique analytique[M]. Paris: Hermann, 1969.
[19] 郭永新, 罗绍凯, 梅凤翔. 非完整约束系统几何动力学研究进展: Lagrange 理论及其它[J]. 力学进展, 2004, 34(4): 477-492.
Guo Yongxin, Luo Shaokai, Mei Fengxiang. *Advances in Mechanics*, 2004, 34(4): 477-492.
[20] Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅱ [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
[21] Currie D F, Saletan E J. Q-equivalent particle Hamiltonians. The classical one-dimensional case[J]. *J Math Phys*, 1966, 7(6): 967-974.
[22] Hojman S, Harteston H. Equivalent Lagrangians: Multidimensional case [J]. *J Math Phys*, 1981, 22(7): 1414-1419.
[23] 赵跃宇, 梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
Zhao Yueyu, Mei Fengxiang. Symmetries and invariances of mechanical systems [M]. Beijing: Science Press, 1999.
[24] Mei F X, Wu H B. Symmetry of Lagrangians of nonholonomic systems [J]. *Phys Lett A*, 2008, 372(13): 2141-2147.
[25] Noether E. Invariante variationsprobleme [J]. *Nachr Kön Ges Wiss Göttingen, Math Phys*, 1918, 1(2): 235-257.
[26] Djukić Dj S, Vajanović B D. Noether´s theory in classical nonconservative mechanics[J]. *Acta Mech*, 1975, 23(1-2): 17-27.
[27] 罗勇, 赵跃宇. 非线性非完整约束系统的广义 Noether 定理 [J]. 北京工业学院学报, 1986, 6(3): 41-47.
Luo Yong, Zhao Yueyu. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 1986, 6(3): 41 -47.
[28] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质 [M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1993.
Li Ziping. Classical and quantum constrained systems and their symmetrical properties [M]. Beijing: Beijing University of Technology Press, 1993.
[29] Liu D. Noether´s theorem and its inverse of nonholonomic nonconservative dynamical systems [J]. *Science in China, Series A*, 1991, 34(4): 419-429.
[30] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.
Mei Fengxiang. Applications of Lie groups and Lie algebras to constrained mechanical systems[M]. Beijing: Science Press, 1999.
[31] 朱照宣. 浑沌[M]. 北京: 北京大学力学系, 1984.
Zhu Zhaoxuan. Chaos [M]. Beijing: Department of Mechanics, Peking University, 1984.
[32] Libermann P, Marle C M. Symplectic geometry and analytical mechanics[M]. New York: Kluwer Academic, 1987.
[33] Marsden J E, Ratiu T S. Introduction to mechanics and symmetry[M]. New York: Springer-Verlag, 1994.
[34] 刘端, 梅凤翔, 陈滨. 分析力学的数学方法[C]//陈滨. 现代数学理论与方法在动力学、振动与控制中的应用. 北京: 科学出版社, 1992.
Liu Duan, Mei Fengxiang, Chen Bin. Mathematical methods of analytical mechanics[C]//Chen Bin. Applications of Modern Mathematical Theories and Methods in Dynamics, Vibration and Control. Beijing: Science Press, 1992.
[35] Pauli W. On the Hamiltonian structure of non-local field theories [J]. *Il Nuovo Cimento*, 1953, 10: 648-667.
[36] Martin J L. Generalized classical dynamics and the "classical analogue" of a Fermi oscillation[J]. *Proc Roy Soc London*, 1959, A251: 536.
[37] 李继彬, 赵晓华, 刘正荣. 广义哈密顿系统理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1994.
Li Jibin, Zhao Xiaohua, Liu Zhengrong. Theory of generalized Hamilton system and its applications[M]. Beijing: Science Press, 1994.
[38] Неймарк ЮИ, Фуфаев Н А. Динамика неголономных сиетем[M]. Москва: Наука, 1967.
[39] Добронравов В В. Основы механики неголономных систем. [M] Москва: Высшая Школа, 1970.
[40] 梅凤翔. 非完整系统力学基础[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1985.
Mei Fengxiang. Foundations of mechanics of nonholonomic systems[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1985.
[41] Papastavridis J G. Analytical mechanics [M]. New York: Oxford Univ Press, 2002.
[42] 郭仲衡, 高普云. 关于经典非完整力学 [J]. 力学学报, 1990, 22(2): 185-190.
Guo Zhongheng, Gao Puyun. *Acta Mechanica Sinica*, 1990, 22(2): 185-190.
[43]陈滨. 关于非完整力学的一个争议[J]. 力学学报, 1991, 23(3): 379-384.
Chen Bin. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, 23(3): 379-384.
[44] Румянцев В В, Карапетян А В. Устойчивостъ движений неголономных систем. Итоги науки и Техники. Общая механика. Т3[M]. Москва: ВИНИТИ, 1976, c5-42.
[45] 朱海平, 梅凤翔. 非完整系统稳定性的若干进展 [J]. 力学进展, 1998, 28(1): 17-29.
Zhu Haiping, Mei Fengxiang. *Advances in Mechanics*, 1998, 28(1): 17-29.
[46] Новосёлов В С. Вариационные методы в механике[M]. Ленинград: Изд-во Ленингр, ун-та, 1966.
[47] 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1991.
Mei Fengxiang, Liu Duan, Luo Yong. Advanced analytical mechanics [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991.
[48] Rumyantsev V V, Sumbatov A S. On the problem of a generalization of the Hamilton-Jacobi method for nonholonomic systems [J]. *ZAMM*, 1978, 58: 477-481.
[49] Брисов А В, Мамаев ИС. Неголономные динамические системы. Интегрируемость. Хаос. Странные аттракторы [M]. Москва: ИКИ, 2002.
[50] Tarasov E V. Fractional dynamics [M]. Beijing: Higher Education Press,

2010.

[51] Birkhoff B D. Dynamical systems[M]. Providence RI: AMS College Publ, 1927.

[52] 梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 等. Birkhoff 系统动力学 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1996.
Mei Fengxiang, Shi Rongchang, Zhang Yongfa, *et al*. Dynamics of birkhoffian system [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996.

[53] 陈向炜. Birkhoff 系统的全局分析[M]. 开封: 河南大学出版社, 2002.
Chen Xiangwei. Global analysis for Birkhoff system[M]. Kaifeng: Henan University Press, 2002.

[54] Галиуллин А С, Гафаров Г Г, Малайшка РП, *et al*. Аналитическая динамика систем гельмгольца, биркгофа намбу [M]. Москва: РЖУФН, 1997.

[55] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京:北京理工大学出版社, 2004.
Mei Fengxiang. Symmetries and conserved quantities of constrained mechanical systems [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2004.

[56] Mei F X, Gang T Q, Xie J F. A symmetry and a conserved quantity for the Birkhoff system[J]. *Chin Phys*, 2005, 15(8): 1678–1681.

[57] 朱海平. 自治 Birkhoff 系统的计算方法[C]//陈滨. 动力学、振动与控制研究. 长沙: 湖南大学出版社, 1998: 30–33.
Zhu Haiping. Numerical methods for autonomous Birkhoff system[C]// Chen Bin. Researches on Dynamics, Vibration and Control [C]. Changsha: Hunan University Press, 1998: 30–33.

[58] Su H L, Qin M Z. Symplectic schemes for Birkhoffian system [J]. *Commun Theor Phys*, 2004, 41(3): 329–334.

[59] de León M, Rodrigues P R. Methods of differential geometry in analytical mechanics[M]. Amsterdam: North–Holland, 1989.

[60] Guo Y X, Luo S K Shang M, *et al*. Birkhoffian formulation of nonholonomic constrained systems[J]. *Rep Math Phys*, 2001, 47(3): 313–322.

[61] Mei F X. The Noether′s theory of Birkhoffian systems [J]. *Science in China, Series A*, 1993, 36(12): 1456–1467.

[62] 梅凤翔, 张永发, 何光, 等. 广义 Birkhoff 系统动力学的基本框架[J]. 北京理工大学学报, 2007, 27(12): 1035–1038.
Mei Fengxiang, Zhang Yongfa, He Guang, *et al*. *Trans of Beijing Institute of Technology*, 2007, 27(12): 1035–1038.

[63] 梅凤翔, 解加芳, 江铁强. 广义 Birkhoff 系统动力学的一类逆问题[J]. 物理学报, 2008, 57(8): 4649–4651.
Mei Fengxiang, Xie Jiafang, Gang Tieqiang. *Acta Phys Sin*, 2008, 57(8): 4649–4651.

[64] Mei F X, Xie J F, Gang T Q. A conformal invariance for generalized Birkhoff equations[J]. *Acta Mech Sin*, 2008, 24: 583–585.

[65] 葛伟宽. 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统的时间积分定理 [J]. 物理学报, 2009, 58(2): 699–702.
Ge Weikuan, Mei Fengxiang. *Acta Phys Sin*, 2009, 58(2): 699–702.

(责任编辑 代丽)

·学术动态·

"中医药慢性病防控暨中医药防治高血压、高血脂、高血糖学术交流会"征文

为加强中医药防治高血压、高血脂、高血糖"三高"类疾病的学术交流,促进中医药治疗"三高"类疾病药物的研发,由中华中医药学会主办,《世界中西医结合》杂志社承办的中医药慢性病防控暨中医药防治高血压、高血脂、高血糖学术交流会拟于 2012 年上半年召开。

征文范围:"三高"类心脑血管疾病发病相关理论、临床及药物应用研究;中医药防治"三高"的理论、实验、临床研究;中医药防治"三高"的药物研究与开发;名老中医经验总结;中医治未病、养生保健经验研究等。

联系人:鲍燕,郭文芳,莫晓飞

电话(传真):010–64822253

通信地址:北京市朝阳区北四环东路 115 号院 6 号楼 109 室(100101)