项链的若干染色问题

卢建立,任凤霞,马美琳

河南师范大学数学与信息科学学院,河南新乡 453007

摘要 图的染色问题是图论研究的经典领域,在网络结构和实际生活中都有着广泛的应用。染色问题是近年来图论研究的热点,全染色,特别是邻点可区别全染色又是染色问题中的难点。本文研究了当 $h\geqslant 3$ (h 能确定项链的顶点个数,N_h 中的 h 表示项链有 $2h+2$ 个顶点)时,项链的邻点可区别全染色、点边邻点可区别全染色和关联邻点可区别全染色。通过在项链的点边集合与色集合之间构造一种一一对应关系,得到它们的色数分别是 5、3、4,同时给出了具体的染色方案。

关键词 项链;邻点可区别全染色;点边邻点可区别全染色;关联邻点可区别全染色

中图分类号 O157.5 **文献标识码** A **doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2012.07.007

Several Coloring Problems Involving the Necklace

LU Jianli, REN Fengxia, MA Meilin

College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan Province, China

Abstract The coloring problem of graph is the classical field of graph theory which is widely used in the network structure and practical life. The coloring problem is becoming a hot topic in recent years. However, the total coloring, especially adjacent vertex-distinguishing total coloring is a difficult point of the coloring problem. For a necklace, the adjacent vertex-distinguishing total coloring, the adjacent vertex-distinguishing vertex edge total coloring, and the incidence adjacent vertex-distinguishing total coloring are discussed when $h\geqslant 3$ (h is able to determine the number of vertices of necklace, h means that the necklace has $2h+2$ vertices in the N_h). Through setting up a corresponding relation between the set of vertices and edges and the set of color, the corresponding chromatic numbers of the adjacent vertex-distinguishing total coloring, the adjacent vertex-distinguishing vertex edge total coloring, and the incidence adjacent vertex-distinguishing total coloring are obtained, the chromatic numbers for a necklace are five, three, and four, respectively. At the same time, the corresponding coloring schemes are given.

Keywords necklace; adjacent vertex-distinguishing total coloring; adjacent vertex-distinguishing vertex edge total coloring; incidence adjacent vertex-distinguishing total coloring

0 引言

图论在自然科学与应用科学中都起着重要作用,染色问题是图论研究的主要内容之一,也是图论研究中的一个非常活跃的课题。随着计算机和通讯、电力网络的日益发展,图的染色问题成为近年来图论研究的热点,众多国内外学者对该问题做了大量的工作,各类染色问题被相继提出并加以发展和应用。

全染色问题特别是邻点可区别全染色是染色问题中的难点。2004 年,张忠辅等[1]提出了邻点可区别全染色的概念,此后又提出了点边邻点可区别全染色和关联邻点可区别全染色的概念[2];近来,田宝玉等[3]研究了项链的强色数与点强全色数。本文研究项链的邻点可区别全染色、点边邻点可区别全染色和关联邻点可区别全染色,得到了它们的色数分别是 5、3 和 4,并给出了具体的染色方案。

本文所考虑的图都是有限无向的简单图,用 $V(G)$,$E(G)$ 分别表示图 G 的点、边的集合,$\Delta(G)$表示图 G 的顶点的最大度。本文未加述及的术语及记号可参见文献[4]。

1 定义和引理

定义 1[5] 设 P 是一条长为 $h+1$ 的路,沿着路 P 顶点依次

收稿日期:2011-12-27;修回日期:2012-02-29

基金项目:河南省杰出青年计划项目(084100510013);河南省高校科技创新人才支持计划项目(2008HASTITO23)

作者简介:卢建立,副教授,研究方向为图论及其应用,电子信箱:lujianli@henannu.edu.cn

标号为 $v_0,v_1,v_2,\cdots,v_h,v_{h+1}$,在标号 $v_1,v_2,\cdots,v_h$ 下方依次给出标号为 $v_1',v_2',\cdots,v_h'$ 的点。称由路 P 和边 $\{v_1,v_1'\},\{v_2,v_2'\},\{v_3,v_3'\},\cdots,\{v_h,v_h'\}$ 所构成的图称为梳子,记为 C_h。

定义 2[5] 称梳子 C_h 添加边 $\{v_0,v_1'\},\{v_1',v_2'\},\cdots,\{v_h',v_{h+1}\},\{v_0,v_{h+1}\}$ 所形成的新图为项链,记为 N_h。

定义 3 顶点 u 的色集合 $C(u)=\{f(u)\}\cup\{f(uv)|uv\in E(G)\}$,$C(u)$ 在色集合 $\{1,2,3,\cdots,k\}$ 中的补集记为 $\overline{C}(u)=C\backslash C(u)$。

定义 4[2] 设 $G(V,E)$ 是阶数不小于 2 的简单连通图,k 是自然数,f 是从 $V(G)\cup E(G)$ 到 $\{1,2,3,\cdots,k\}$ 的映射,假定

(1) 对任意的边 $uv\in E(G)$,$f(u)\neq f(v)$,$f(u)\neq f(uv)$,$f(v)\neq f(uv)$;

(2) 对任意的两相邻边 $uv,uw\in E(G)(v\neq w)$,$f(uv)\neq f(uw)$;

(3) 对任意的边 $uv\in E(G)$,其端点的色集合满足 $C(u)\neq C(v)$。

如果映射 f 满足(1)和(2),则称 f 为图 G 的 k-正常全染色。如果映射 f 满足(1)—(3),则称 f 是图 G 的一个邻点可区别全染色(简记作 k-AVDTC),且称数 $\chi_{at}(G)=\min\{k|k$ 为 G 中的所有 k-AVDTC$\}$ 为图 G 的邻点可区别全染色数。

定义 5[2] 设 $G(V,E)$ 是阶数不小于 2 的简单连通图,k 是自然数,f 是从 $V(G)\cup E(G)$ 到 $\{1,2,3,\cdots,k\}$ 的映射,如果 f 满足以下两条:

(1) 对任意的边 $uv\in E(G)$,$f(u)\neq f(uv)$,$f(v)\neq f(uv)$;

(2) 对任意的边 $uv\in E(G)$,$C(u)\neq C(v)$。

则称映射 f 是图 G 的点边邻点可区别全染色(简记作 k-AVD-VETC),且称数 $\chi_{at}^{ve}(G)=\min\{k|k$ 为 G 中的所有 k-AVD-VETC$\}$ 为图 G 的点边邻点可区别全染色数。

定义 6[2] 设 $G(V,E)$ 是阶数不小于 2 的简单连通图,k 是自然数,f 是从 $V(G)\cup E(G)$ 到 $\{1,2,3,\cdots,k\}$ 的映射,如果 f 满足以下 3 条:

(1) 对任意的边 $uv\in E(G)$,$f(u)\neq f(v)$;

(2) 对任意的两相邻边 $uv,uw\in E(G)(v\neq w)$,$f(uv)\neq f(uw)$;

(3) 对任意的边 $uv\in E(G)$,$C(u)\neq C(v)$。

则称映射 f 是图 G 的关联邻点可区别全染色(简记作 k-I-AVDTC),且称数 $\chi_{at}^{i}(G)=\min\{k|k$ 为 G 中的所有 k-I-AVDTC$\}$ 为图 G 的关联邻点可区别全染色数。

引理 1[6] 设图 G 是阶数不小于 3 的简单连通图,若 G 中至少有两个最大度点相邻,则 $\chi_{at}(G)\geqslant\Delta(G)+2$。

引理 2[6] 设图 G 是简单连通图,则 $\chi_{at}^{ve}(G)\geqslant 3$。

猜想[2] 设图 G 是阶数不小于 3 的简单连通图,则有 $\chi_{at}^{i}(G)\leqslant\Delta(G)+2$。

2 主要结果及证明

定理 1 当 $h\geqslant 3$ 时 $\chi_{at}(N_h)=5$。

证明 由 N_h 的定义知,$\Delta(N_h)=3$,并且两个最大度点相邻;由引理 1 可知 $\chi_{at}(N_h)\geqslant 5$,要想证明 $\chi_{at}(N_h)=5$,只需证明 N_h 存在 5-AVDTC 即可。

如下定义从 $V(G)\cup E(G)$ 到 $\{1,2,3,4,5\}$ 的映射 f:

情形 1 当 $h\equiv 0(\mathrm{mod}2)$ 时,

$f(v_0)=1$,

$$f(v_i)=\begin{cases}3 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 2 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},\ f(v_i')=\begin{cases}2 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 3 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},\quad 1\leqslant i\leqslant h-2,$$

$f(v_{h-1})=4,f(v_{h-1}')=5,f(v_h)=5,f(v_h')=1,f(v_{h+1})=4$,

$f(v_0v_1)=2,f(v_0v_1')=3,f(v_iv_i')=4(1\leqslant i\leqslant h-2)$,

$$f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}1 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 5 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},\ f(v_i'v_{i+1}')=\begin{cases}5 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 1 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},\quad 1\leqslant i\leqslant h-2,$$

$f(v_{h-1}v_h)=3,f(v_{h-1}'v_h')=4,f(v_{h-1}v_{h-1}')=2,f(v_hv_h')=2,f(v_hv_{h+1})=1$,

$f(v_h'v_{h+1})=3,f(v_0v_{h+1})=5$。

显然 f 是 N_h 的正常全染色,要证 f 是 N_h 的邻点可区别全染色,只需证明相邻点的色集合不同即可。由于每点的色集合都是四元集,$\overline{C}(v_0),\overline{C}(v_i),\overline{C}(v_i')(1\leqslant i\leqslant h+1)$ 都是一元集,所以下面只需证明相邻点的色集合的补集合是不同的。

$\overline{C}(v_0)=\{4\}$,

当 $2\leqslant i\leqslant h-2$ 时,

$$\overline{C}(v_i)=\begin{cases}\{3\} & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\\ \{2\} & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\end{cases},\ \overline{C}(v_i')=\begin{cases}\{2\} & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\\ \{3\} & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\end{cases},$$

$\overline{C}(v_1)=\{5\},\overline{C}(v_1')=\{1\},\overline{C}(v_{h-1})=\{1\},\overline{C}(v_{h-1}')=\{3\},\overline{C}(v_h)=\{4\}$,

$\overline{C}(v_h')=\{5\},\overline{C}(v_{h+1})=\{2\}$。

v_0 的邻接点为 v_1,v_1',v_{h+1},即 v_0 与它的邻接点的色集合不同。同理可证 v_1,v_1',v_{h+1} 与他们的邻接点的色集合也不同。

$v_i(2\leqslant i\leqslant h)$ 的邻接点为 v_{i-1},v_i',v_{i+1},由色集合的补集可知 $\overline{C}(v_i)\neq\overline{C}(v_{i-1}),\overline{C}(v_i)\neq\overline{C}(v_i'),\overline{C}(v_i)\neq\overline{C}(v_{i+1})$,即 v_i 与它的邻接点的色集合不同。同理可证 $v_i'(2\leqslant i\leqslant h)$ 与它的邻接点的色集合也不同。

显然 f 是 N_h 的邻点可区别全染色。

情形 2 当 $h\equiv 1(\mathrm{mod}2)$ 时,

$f(v_0)=1$,

$$f(v_i)=\begin{cases}3 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 2 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},\ f(v_i')=\begin{cases}2 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 3 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},\quad 1\leqslant i\leqslant h-2,$$

$f(v_{h-1})=5,f(v_{h-1}')=4,f(v_h)=1,f(v_h')=5,f(v_{h+1})=4$,

$f(v_0v_1)=2,f(v_0v_1')=3,f(v_iv_i')=4(1\leqslant i\leqslant h-2)$,

$$f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}1 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 5 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},\ f(v_i'v_{i+1}')=\begin{cases}5 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 1 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},\quad 1\leqslant i\leqslant h-2,$$

$f(v_{h-1}v_h)=4,f(v_{h-1}'v_h')=3,f(v_{h-1}v_{h-1}')=2,f(v_hv_h')=2,f(v_hv_{h+1})=3$,

$f(v_h'v_{h+1})=1,f(v_0v_{h+1})=5$。

证明方法如同情形 1。

定理 2 当 $h\geqslant 2$ 时 $\chi_{at}^{ve}(N_h)=3$。

证明 由引理 2 可知,$\chi_{at}^{ve}(N_h)\geqslant 3$,为证明$\chi_{at}^{ve}(N_h)=3$,只需证明 N_h 存在 3-AVD-VETC 即可。

如下定义从 $V(G)\cup E(G)$到$\{1,2,3\}$的映射 f:

$f(v_0)=1,f(v_h)=1,f(v_h')=1,f(v_{h+1})=3$,

$$f(v_i)=\begin{cases}2 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 1 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},\ f(v_i')=\begin{cases}1 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 2 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},$$

$1\leqslant i\leqslant h-1$,

$f(v_0v_1)=3,f(v_0v_1')=3,f(v_0v_{h+1})=2,f(v_hv_{h+1})=2,f(v_h'v_{h+1})=2$,

$f(v_{h-1}v_h)=2,f(v_hv_h')=2,f(v_iv_{i+1})=3(1\leqslant i\leqslant h-1)$,

$f(v_i'v_{i+1}')=3(1\leqslant i\leqslant h-1),f(v_iv_i')=3(1\leqslant i\leqslant h-1)$,

$$C(v_0)=\{1,2,3\},C(v_{h-1})=\begin{cases}\{1,2,3\} & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ \{2,3\} & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},$$

$C(v_h)=\{1,2\},C(v_h')=\{1,2,3\},C(v_{h+1})=\{2,3\}$,

$$C(v_i)=\begin{cases}\{2,3\} & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ \{1,3\} & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},\ 1\leqslant i\leqslant h-2,$$

$$C(v_i')=\begin{cases}\{1,3\} & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ \{2,3\} & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},1\leqslant i\leqslant h-1。$$

显然 f 是 N_h 的一个 3-AVD-VETC。

定理 3 当 $h\geqslant 3$ 时,$\chi_{at}^{i}(N_h)=4$。

证明 从关联邻点可区别全染色定义可知$\chi_{at}^{i}(N_h)\geqslant 4$,要想证明$\chi_{at}^{i}(N_h)=4$,只需证明 N_h 存在 4-I-AVDTC 即可。

如下定义从 $V(G)\cup E(G)$到$\{1,2,3,4\}$的映射 f:

情形 1 当 $h\equiv 2(\mathrm{mod}3)$时,

$f(v_0)=1,f(v_{h+1})=4$,

$$f(v_i)=\begin{cases}2 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 3 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},1\leqslant i\leqslant h,$$

$$f(v_i')=\begin{cases}3 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 2 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},1\leqslant i\leqslant h,$$

$f(v_0v_1)=1,f(v_0v_1')=2,f(v_1v_1')=3$,

$$f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}4 & i\equiv 1(\mathrm{mod}3)\\ 3 & i\equiv 2(\mathrm{mod}3)\\ 1 & i\equiv 0(\mathrm{mod}3)\end{cases},\ f(v_i'v_{i+1}')=\begin{cases}4 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 1 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},$$

$1\leqslant i\leqslant h-1$,

$f(v_iv_i')=2(2\leqslant i\leqslant h),f(v_hv_{h+1})=1,f(v_h'v_{h+1})=3,f(v_0v_{h+1})=4$,

$C(v_0)=\{1,2,4\},C(v_1)=\{1,2,3,4\},C(v_1')=\{2,3,4\}$,

$$C(v_h)=\begin{cases}\{1,2,3,4\} & h=5+3k,k\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ \{1,2,4\} & h=5+3k,k\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},$$

$$C(v_h')=\begin{cases}\{2,3,4\} & h=5+3k,k\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ \{1,2,3\} & h=5+3k,k\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},$$

$C(v_{h+1})=\{1,3,4\}$,

$$C(v_i)=\begin{cases}\{2,3,4\} & i\equiv 2(\mathrm{mod}3)\\ \{1,2,3\} & i\equiv 0(\mathrm{mod}3)\\ \{1,2,3,4\} & i=3k+1,k\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ \{1,2,4\} & i=3k+1,k\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},2\leqslant i\leqslant h-1,$$

$$C(v_i')=\begin{cases}\{1,2,4\} & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\\ \{1,2,3,4\} & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\end{cases},2\leqslant i\leqslant h-1。$$

情形 2 当 $h\equiv 0(\mathrm{mod}3)$时,

当 $h>3$ 时,

$f(v_0)=1,f(v_h)=1,f(v_{h+1})=4$,

$$f(v_i)=\begin{cases}2 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 3 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},1\leqslant i\leqslant h-1,$$

$$f(v_i')=\begin{cases}3 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 2 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},1\leqslant i\leqslant h,$$

$f(v_0v_1)=1,f(v_0v_1')=2,f(v_1v_1')=3$,

$$f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}4 & i\equiv 1(\mathrm{mod}3)\\ 3 & i\equiv 2(\mathrm{mod}3),1\leqslant i\leqslant h-1,\\ 1 & i\equiv 0(\mathrm{mod}3)\end{cases}$$

$$f(v_hv_{h+1})=\begin{cases}1 & h\equiv 0(\mathrm{mod}2)\\ 2 & h\equiv 1(\mathrm{mod}2)\end{cases},$$

$$f(v_i'v_{i+1}')=\begin{cases}4 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 1 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},1\leqslant i\leqslant h-1,$$

$$f(v_hv_h')=\begin{cases}2 & h\equiv 0(\mathrm{mod}2)\\ 4 & h\equiv 1(\mathrm{mod}2)\end{cases},$$

$f(v_iv_i')=2(2\leqslant i\leqslant h-1),f(v_h'v_{h+1})=3,f(v_0v_{h+1})=4$。

当 $h=3$ 时,

$f(v_0)=1,f(v_1)=2,f(v_2)=3,f(v_3)=2,f(v_1')=3,f(v_2')=2$,

$f(v_3')=3,f(v_4)=4$,

$f(v_0v_1)=1,f(v_0v_1')=2,f(v_1v_1')=3$,

$f(v_1v_2)=4,f(v_2v_3)=3,f(v_3v_4)=1$,

$f(v_1'v_2')=1,f(v_2'v_3')=4,f(v_3'v_4)=3$,

$f(v_2v_2')=2,f(v_3v_3')=2,f(v_0v_4)=4$。

情形 3 当 $h\equiv 1(\mathrm{mod}3)$时,

$f(v_0)=1,f(v_h')=1,f(v_{h+1})=4$,

$$f(v_i)=\begin{cases}2 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 3 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},1\leqslant i\leqslant h,$$

$$f(v_i')=\begin{cases}3 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 2 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},1\leqslant i\leqslant h-1,$$

$f(v_0v_1)=1,f(v_0v_1')=2,f(v_1v_1')=3$,

$$f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}4 & i\equiv 1(\mathrm{mod}3)\\ 3 & i\equiv 2(\mathrm{mod}3),1\leqslant i\leqslant h-1,\\ 1 & i\equiv 0(\mathrm{mod}3)\end{cases}$$

$$f(v_i'v_{i+1}')=\begin{cases}4 & i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 1 & i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},1\leqslant i\leqslant h-2,$$

$f(v_iv_i')=2,2\leqslant i\leqslant h-2$,

$$f(v_{h-1}v_{h-1}')=\begin{cases}4 & h=3k+1,k\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 2 & h=3k+1,k\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},f(v_hv_h')=4,$$

$$f(v_{h-1}'v_h')=\begin{cases}3 & h=3k+1,k\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 1 & h=3k+1,k\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},$$

$$f(v_hv_{h+1})=\begin{cases}3 & h=3k+1,k\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 2 & h=3k+1,k\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},$$

$$f(v_h'v_{h+1})=\begin{cases}2 & h=3k+1,k\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ 3 & h=3k+1,k\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases},f(v_0v_{h+1})=4。$$

显然 f 是 N_h 的一个关联邻点可区别全染色。

推论 1　在项链中 $\chi_{at}^{i}(N_h)<\Delta(N_h)+2$。

由此可知,文献[2]中的猜想在项链中成立。

3　结论

本文得到当 $h\geqslant3$ 时项链的邻点可区别全染色数是 5,点边邻点可区别全染色数是 3,关联邻点可区别全染色数是 4,其中 h 能确定项链的顶点个数,N_h 中的 h 表示项链有 $2h+2$ 个顶点。

参考文献(References)

[1] 张忠辅, 陈祥恩, 李敬文, 等. 关于图的邻点可区别全染色 [J]. 中国科学: A 辑数学, 2004, 34(5): 574–583.
Zhang Zhongfu, Chen Xiangen, Li Jingwen, *et al*. *Science in China: Ser A Mathematics*, 2004, 34(5): 574–583.

[2] Zhang Z F, Douglas R W, Li J, *et al*. Incidence adjacent vertex-distinguishing total coloring of graphs [R]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2008: 1–8.

[3] 田宝玉, 闫喜红. 项链的强色数与点强全色数[J]. 中北大学学报: 自然科学版, 2011, 32(2): 119–122.
Tian Baoyu, Yan Xihong. *Journal of North University of China: Natural Science Edition*, 2011, 32(2): 119–122.

[4] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications [M]. New York: The Macmillan Press Ltd, 1976.

[5] Stadler P F. Minimum cycle bases of Halin graphs [J]. *Graph Theory*, 2003, 43: 150–155.

[6] Zhang Z, Qiu P, Xu B, *et al*. Vertex-distinguishing total coloring of graphs[J]. *Ars Comb*, 2008, 87: 33–45.

(责任编辑　马宇红,代丽)