

河网演化的一个方格模型

郝睿,冯国林,霍杰,王旭明

宁夏大学物理电气信息学院,银川 750021

摘要 河网演化过程与地貌特征、水流侵蚀等因素密切相关。结合水流侵蚀作用和原始地貌特征,本文提出了一种河网演化模型。模型将代表侵蚀点的规则点阵分布于高度无规起伏的“坡面”之上,由连接点阵的“四方格子”边作为可供选择的流路,从而对地表网格化。当网格中侵蚀点上的所有“湖点”消失时,河网演化过程达到稳态。稳态河网形态的统计结果显示了与自然河网相一致的诸多标度规律,如流域面积及河流长度的累积概率符合幂律分布,河网某级别支流的平均长度与该级别之间符合指数标度等。从模型的主要思想看,这些标度规律的动力学根源在于河网演化过程中同时存在的确定性(侵蚀)和随机性(地表起伏)。

关键词 河网演化;流路选择;侵蚀;标度规律

中图分类号 O415.6,N941.3

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2012.07.002

A Lattice Model for the Evolution of River Networks

HAO Rui, FENG Guolin, HUO Jie, WANG Xuming

School of Physics and Electrical Information Science, Ningxia University, Yinchuan 750021, China

Abstract Usually, river patterns are greatly related to the natural factors, such as water erosion, landform, etc. Based on water erosion mechanism and original landform, a lattice model for river networks is proposed in order to simulate the growth process and to understand the selection of the nature, namely, fractal structure and scaling behaviors. The lattice is located at an inclined plane with fluctuant surface. The edges of the lattice are the possible water route. The selection of water route is dominated by the order of nature, that is, water flows downwards. A lattice point might be a "lake point", since its altitude is less than that of all the nearest neighbors. A steady river network might be set up as soon as all of the lake points disappear. Meanwhile, the scaling relationships dominating the fractal structure might be established. The statistical results on the landscape of the surface and the network connected by the water routes which actually mimic the river channels follow the Horton's laws. The laws suggest that the ratio of the average stream lengths of rank $\omega+1$ to those of rank ω has a fixed value that is independent of ω . The same statements also hold for the ratios of average stream numbers and basin areas. The results show that the cumulative probabilities for the both stream lengths and basin areas conform to the power law distributions. These are in accord with those observed in the real river networks. These power laws indicate that there is no any characteristic scale in a river network. The spirit of the model shows that the dynamical origin of the scaling behavior might lie in both determinacy (erosion) and chance (fluctuations on the surface of the earth).

Keywords river network evolution; water route selection; erosion; scaling law

0 引言

近十几年来,复杂网络的研究越来越多地渗透到其他学科领域并得到了令人耳目一新的结果^[1-2]。河网作为复杂网络的一个重要分支,开创性的研究源于20世纪50年代,研究者们揭示了自然河网上诸多参数之间的标度关系^[3-4]。伴随着复杂网络科学的研究进程,河网的研究目前主要集中在以下4个方面:一是成型河网上的标度规律统计^[5-9];二是基于侵蚀

过程的河网演化模型的建立,合理演化模型的提出有助于更好地理解河网的诸多统计性质^[7-9];三是探究河网中各种标度关系的起因^[10-14];四是河网泥沙输移动力学^[15-16]。

自然河网上一些地理参数的统计规律符合Horton定律^[7-8]。作为对河网分布规律进行定量描述的重要定律,Horton定律通常被研究者采用,以便检验河流侵蚀模型的合理性。该定律的主要内容为:河网中相邻级别支流的条数比、平均长度

收稿日期:2011-11-28;修回日期:2012-02-26

基金项目:国家自然科学基金项目(10965004)

作者简介:郝睿,副教授,研究方向为复杂系统理论及应用,电子信箱:hr601@163.com;王旭明(通信作者),教授,研究方向为复杂性科学与非线性科学,电子信箱:wmxwang@nxu.edu.cn

比及平均流域面积比与支流的级别无关。早期研究中最著名的模型是 Leopold 和 Langbein 提出的自我回避-随机游走模型^[3],模型结果给出了河网的分形结构,但这一时期的模型主要存在两方面问题:一是受计算条件所限,网络规模较小;二是模型中没有体现水流侵蚀的动态过程。1993 年,Inaoka 和 Takayasu^[4]提出了一种能够反映动态侵蚀过程的河网演化模型,用正三角格子将地表网格化,模拟结果很好地展示了 Horton 定律,但其解析讨论与模拟计算在流路选择上并不一致。基于最初地势变化及水流侵蚀过程,本文提出一种更为简化的河网演化模型,该模型用正方形格子将初始地表网格化,使得每一格点的流路选择更加简化,仅为二选一。模拟结果能够展示 Horton 定律、流域面积以及河长分布所遵从的幂律等。

1 河网演化模型的建立

水往低处流的自然属性是模型研究最基础的考虑,水流侵蚀形成河道的过程,实际是水流路径选择的过程。为此,本文建立一个正方形网格模型,在图 1(表示河网中某一局部流域)所示的上高下低、并有随机起伏的初始地表上布规则点阵作为侵蚀点,用对角线严格沿上下向和水平向的正方格子对地表进行网格化。如此,流经任意一格点的水流有两个由正方形边所代表的可能流路,其中黑点代表格点,虚线代表水流的可能流向,带箭头实线代表侵蚀过程中水流的实际流向。格点的状态由高度 $h(x,y,t)$ 和流经的水流量 $q(x,y,t)$ 决定。初始地表由坡度(高度梯度)均匀的斜坡对应的基础地形和加在其上的随机起伏构成。

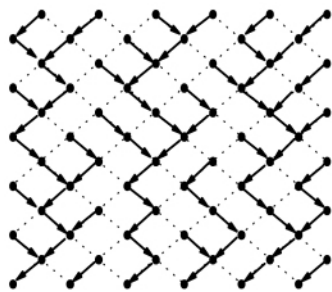


图 1 河网模型
Fig. 1 Model of river network

为突出水流侵蚀作用,模型仅考虑降雨过程对流量的贡献(忽略渗漏、蒸发等因素),并假设:(1) 降雨过程是均匀和持续的;(2) 地形构造不变且忽略侵蚀之外其他因素导致的地表变化;(3) 侵蚀过程中产生的泥沙全部被水流带走并最终汇入大海,不产生泥沙沉积。为了用一般法则判断所有格点(包括边界格点)的流路,令网格左右满足周期边界条件。模型演化规则如下。

- (1) 均匀降雨。所有格点在同一时刻接受的降雨量相等。
- (2) 水流方向的确定。某一时刻点 (x,y) 的水流流向由其

自身和下游最近邻两个格点的相对高度差决定。为此,首先找到点 (x,y) 最近邻两个格点中的最低点 (x',y') ,如果 $h(x,y,t) > h(x',y',t)$,则点 (x,y) 处的水流向最低点 (x',y') ;如果 $h(x,y,t) < h(x',y',t)$,则点 (x,y) 处将出现一个小湖泊,同时,该点的高度将因水流的汇入而抬升。当某时刻湖点的高度超过其最近邻格点中最低点的高度时,湖点消失。当网络中的所有湖点都消失时,即可判断河网演化成型。

(3) 水流侵蚀和回流对高度的影响。在水流侵蚀作用下,任一被冲刷格点的高度是持续下降的,相应的变化方程为

$$\frac{\partial h(x,y,t)}{\partial t} \propto -f(h(x,y,t)-h_m) \times q(x,y,t)^\alpha \quad (1)$$

其中 h_m 为相邻格点中最低点的高度, $q(x,y,t)$ 为格点的流量, $f(\cdot)$ 是高度差 $h(x,y,t)-h_m$ 的某一函数。在演化初期,格点上由于回流形成湖点,造成地表高度上升,相应的变化方程为

$$\frac{\partial h(x,y,t)}{\partial t} \propto +f(h(x,y,t)-h_m) \times q(x,y,t)^\alpha \quad (2)$$

这里 $f(\cdot)$ 采用一种非常简单的形式: $k_h \times |h(x,y,t)-h_m| / (1+|h(x,y,t)-h_m|)$, 其中 k_h 用以表示高度差函数 $f(h(x,y,t)-h_m)$ 对格点高度变化率的影响程度。考虑数值计算的实际情况将时间离散化,即得格点高度的演化方程

$$h(x,y,t+1) = h(x,y,t) \pm k_h \times \frac{|h(x,y,t)-h_m|}{1+|h(x,y,t)-h_m|} \times q(x,y,t)^\alpha \quad (3)$$

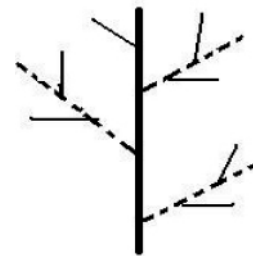
(4) 水流量的确定。 t 时刻 (x,y) 点最近邻格点中最低点 (x',y') 的流量等于该时刻流入该点的流量 $q(x,y,t)$ 及相应的降雨量 $R(x',y',t)$ 之和,即

$$q(x',y',t) = q(x,y,t) + R(x',y',t) \quad (4)$$

(5) 重复以上 4 个步骤。需要注意的是步骤(1)——(4)必须在同一时步内完成。

2 支流分级法

研究河网,首先需要对其支流进行分级。经典的分级方法有 Horton 分级和 Strahler 分级两种^[9]。图 2 为 Horton 分级。将所有支流的起始端定义为 1 级 ($\omega=1$),从每一起始端开始向下跟踪,遇汇流点(节点)进行一次判断,若汇入的两支流级别不等,找出最大入流级别 ω_{max} ,则该点出流级别被定义为 ω_{max} ;若汇入的两支流级别均为 ω ,即 $\omega_{max}=\omega$,则出流支流级别为 $\omega_{max}+1$ 。同时,认为较长的入流属于主河道,即将较长入流



细实线—第 1 级支流,虚线—第 2 级支流,粗实线—第 3 级支流

图 2 Horton 分级示意图

Fig. 2 Stream orders defined by Horton

支流级别重新定义为最高级别。在本模型中,Strahler 分级与 Horton 分级无实质差别,但由于 Strahler 分级无法找到主河道,这里不予讨论。

3 模拟结果

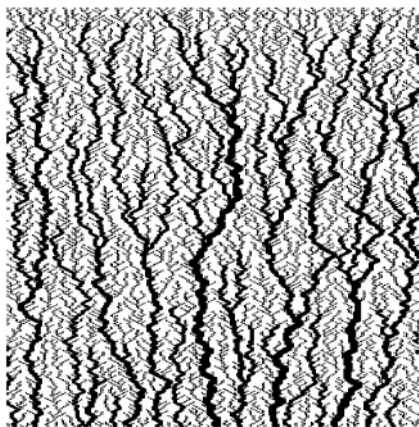
对“原始”地表(设其为低端连接“海洋”,坡度均匀的一斜面)进行格点数为 500×500 的网格化。每时步每格点的平均降雨量为 $R=0.001$,方程(3)中 $\alpha=0.05, k_h=0.01$ 。为了模拟原始地表随机起伏的情形,初始地表高度取为

$$\{h(x,y,t=0) \mid h(x,y)=h_0+\Delta h y+\xi(x,y)\} \quad (5)$$

其中 h_0 为斜面底端各格点的高度, $h_0+\Delta h y$ 给每个格点赋予斜面方向(y 方向)的一个均匀坡度 Δh ,在这个背景之上叠加一个由随机数 $\xi(x,y)$ (范围在 0—1 之间)代表的随机起伏,即构成模型的初始地表。这里取 $\Delta h=1.5$ 。图 3(a)、(b)分别给出演化至 $t=150$ 和 $t=20000$ 的河网形态结构图。为显示细节,图中只给出 500×125 的局部。需要指出的是:图 3(b)实际上已是稳态情形,此后各格点只改变其高度,而网络结构基本不变。因此,本文给出的统计都是对应于图 3(b)的结果。



(a) 瞬态
(a) Transient state



(b) 稳态
(b) Steady state

图 3 河网局部形态结构

Fig. 3 Local river network patterns

3.1 分支比

自然河网参数分布符合 Horton 法则,即在 Horton 分级下,存在以下 3 个与支流级别无关的比例关系

$$B_N = \frac{N_\omega}{N_{\omega+1}} \quad B_L = \frac{L_{\omega+1}}{L_\omega} \quad B_A = \frac{A_{\omega+1}}{A_\omega} \quad (6)$$

其中, B_N, B_L 和 B_A 分别为两相邻级别的支流条数 N_ω 之比,河道的平均长度 L_ω 之比和平均流域面积 A_ω 之比。

图 4 显示 N_ω 与 $N_{\omega+1}$ 之间的平均比例系数。半对数坐标平面上,拟合所得的直线(斜率 $k_N=-1.76$)意味着存在着关系 $\ln(N_\omega)=a+k_N\omega$ ($k_N<0$),即知第 ω 级支流的平均条数为

$$N_\omega = e^a \cdot e^{k_N \omega} = c e^{k_N \omega} \quad c = e^a \quad (7)$$

代入 B_N 的定义式即得

$$B_N = \frac{N_\omega}{N_{\omega+1}} = \frac{c e^{k_N \omega}}{c e^{k_N (\omega+1)}} = e^{-k_N} = e^{1.76} \doteq 5.81 \quad (8)$$

这个比例在实际统计的数据范围内。

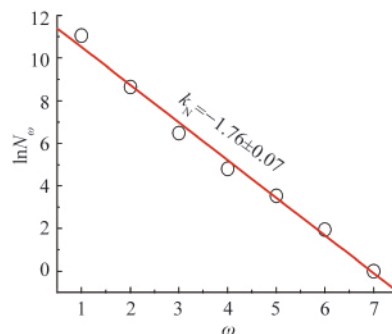


图 4 支流级别 ω 与该支流条数 N_ω 在半对数坐标下的关系

Fig. 4 Relation between stream order ω and the number of stream branches N_ω with semi-log scale

图 5 给出 $L_{\omega+1}$ 与 L_ω 之间的平均比例关系。同样由半对数坐标平面上的拟合直线(斜率 $k_L=1.27$)给出:

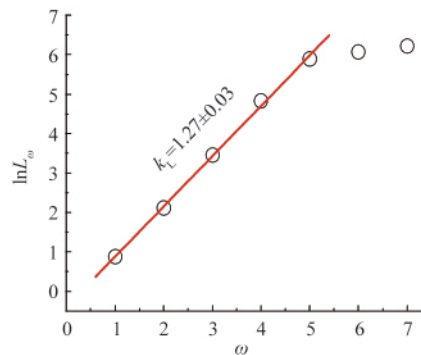


图 5 支流级别 ω 与该支流平均长度 L_ω 在半对数坐标下的关系

Fig. 5 Relation between stream order ω and the averaged stream length L_ω with semi-log scale

$$L_{\omega} = c'e^{k_l \omega} \quad (9)$$

进而得到

$$B_l = \frac{L_{\omega+1}}{L_{\omega}} = \frac{c'e^{k_l(\omega+1)}}{c'e^{k_l \omega}} = e^{k_l} = e^{1.27} \approx 3.56 \quad (10)$$

这个比例也在实际统计的数据范围之内。

在获得式(9)之后,可以利用 Hack 定律 $L \propto A^{\alpha}$ (实际统计得到的 α 在 0.5—0.7 之间)引入河长与流域面积之间的关系函数

$$L = CA^{\alpha} \quad (11)$$

得到平均流域面积对支流级别 ω 的依赖关系

$$A_{\omega} = (c'/C)^{1/\alpha} e^{k_l \omega / \alpha} \quad (12)$$

由此直接得到平均流域面积之比

$$B_A = \frac{A_{\omega+1}}{A_{\omega}} = e^{k_l / \alpha} \quad (13)$$

在 $\alpha=0.65$ 时 $B_A=7.03$ 。

在统计流域面积比时,涉及到如何计算流域面积本身的问题。本文在 Horton 分级下,根据模型对地表网格化的特点,在计算某级别支流的流域面积时,将从该支流最下端格点辐射出去的所有树形结构子网络所包含的格点数之和看作它的流域面积,统计结果如图 6 所示。在半对数坐标下,某级别支流平均流域面积 A_{ω} 与支流级别 ω 之间的关系为

$$A_{\omega} = c''e^{k_A \omega} \quad (14)$$

则 $A_{\omega+1}$ 与 A_{ω} 之间的平均比例关系为

$$B_A = \frac{A_{\omega+1}}{A_{\omega}} = e^{k_A} = e^{1.95} \approx 7.03 \quad (15)$$

数值模拟统计得到的流域面积比 $B_A=7.03$,与 $\alpha=0.65$ 时方程(13)给出的结果相同。解析结果与数值结果完全一致。

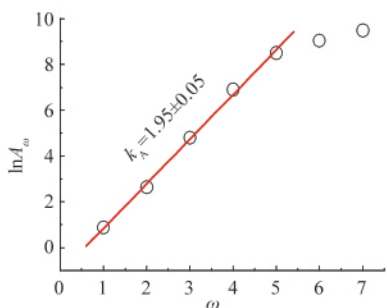


图 6 支流级别 ω 与该支流平均流域面积 A_{ω} 在半对数坐标下的关系

Fig. 6 Relation between stream order ω and the averaged drainage-basin area A_{ω} with semi-log scale

3.2 河网参数分布律

河网的另一个重要统计特征是其参数分布遵从幂律^[21-22],本模型模拟结果能够再现这一特征。图 7 展示河长的累积概率与河长在双对数平面上的拟合直线斜率为 $k=-0.696$,表明存在河长的幂分布律:

$$P(\geq l) \propto l^{-\beta} \quad \beta=0.696 \quad (16)$$

这个标度因子在测量获得实际河网河长累积分布幂指数范围 0.67—0.85^[21]之内。图 8 展示流域面积的累积概率与流域面积在双对数平面上的拟合直线斜率为 $k=-0.445$,同理表明流域面积遵从幂分布律

$$P(\geq A) \propto A^{-\gamma} \quad \gamma=0.445 \quad (17)$$

符合自然河网流域面积的分布律,其标度因子 γ 也在实际统计结果 0.41—0.45^[22]之内。

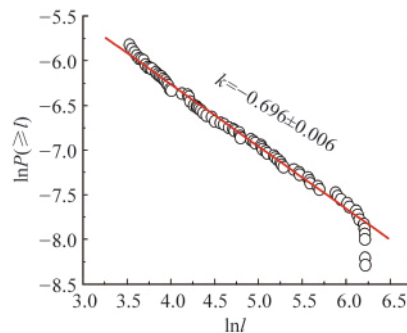


图 7 支流长度的累积概率分布

Fig. 7 Cumulative probability distribution of averaged stream length $P(\geq l)$ with log-log scale

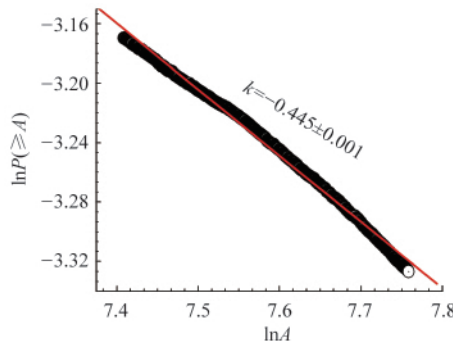


图 8 支流流域面积的累积概率分布

Fig. 8 Cumulative probability distribution of drainage-basin area $P(\geq A)$ with log-log scale

需要指出的是,河长与流域面积的累积概率分布均存在大尺度(图线尾部)和小尺度(图线头部)对幂律的偏离。前者在小尺度上偏大,而在大尺度上偏小;后者则在小尺度上偏小,在大尺度上亦偏小。几乎所有的实测统计都显示了大小两种尺度上的偏离。为什么存在这样的偏离?有人认为大尺度的偏离是由于所谓的有限尺度效应,即大尺度的采样困难导致的数据缺失造成了概率偏小。然而,许多理论或模拟结果都显示了大尺度概率偏小从而导致的非幂律“尾巴”,笔者认为这是河网本身的自然属性,而非大尺度的采样缺失所致。至于小尺度的偏离,Dodds 和 Rothman 早已给出了合理解释,他们认为小尺度河流为线性流域,即其河长与流域面积之间是一个简单的线性关系^[9],因此小尺度河流对 Hack 定律有偏离,对河长分布和流域面积分布亦有偏离。

也许有人要问:河网中的幂律是如何产生的?河网参数的幂律分布意味着什么?第一个问题的答案其实就包含在模型中。显然,模型的要素有二:一是水流对地表的侵蚀作用,二是地表的随机起伏(即使在降雨均匀的极端简化下,这种随机起伏也会导致水流路径的随机改变),前者是确定的,后者是随机的。没有侵蚀就没有演化,没有地表的随机起伏,演化将变成地表的均匀侵蚀,不可能形成网络结构。由此可以推断,随机性与确定性是同等重要的幂律形成的动力学根源。幂律是许多复杂系统中的普遍规律,但对于不同的系统,幂律的意义可能不同。对于河网,幂律分布意味着不存在特征尺度。就河长而言,或长或短的河道都有可能出现,且河道越长越不易见。幂律分布也意味着河网演化过程具有自组织临界性^[2],说明河网是以不断上演的局部临界失稳的方式逐渐发育起来的。

4 结论

本文借助正方形网格模型模拟了水流侵蚀作用下河网形态的生成过程。对模型的稳态结果进行了统计分析,表明支流的平均条数以负指数函数形式依赖于支流级别数,而支流的平均长度以正指数形式依赖于支流级别数。进一步的结果表明本模型模拟结果符合 Horton 法则,即河网中相邻级别支流的条数比、平均长度比和平均流域面积比与支流的级别无关。统计结果还展示了流域面积的累积概率分布和河道长度的累积概率分布均服从幂律。这些结论与实际河网上的统计特征相吻合。

参考文献 (References)

- [1] Smith C M, Ruppell J C. What anthropologists should know about the new evolutionary synthesis[J]. *Structure and Dynamics*, 2011, 5(2): 1-13.
- [2] Strogatz S H. Exploring complex networks [J]. *Nature*, 2001, 410: 268-276.
- [3] Leopold L, Maddock T. The hydraulic geometry of stream channels and some physiographic implications[R]. Washington D C: US Govt Print Off, 1953.
- [4] Leopold L. Downstream change of velocity in rivers[J]. *American Journal of Science*, 1953, 251(8): 606-624.
- [5] Somfai E, Sander L M. Scaling and river networks: A Landau theory for erosion[J]. *Phys Rev E*, 1997, 56(1): R5-R8.

- [6] Banavar J R, Colaioni F, Flammini A, et al. Sculpting of a fractal river basin[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, 78(23): 4522-4525.
- [7] Tucker G E, Bras R L. Hillslope processes, drainage density, and landscape morphology[J]. *Water Resources Research*, 1998, 34(10): 2751-2764.
- [8] Banavar J R, Colaioni F, Flammini A, et al. Scaling, optimality and landscape evolution[J]. *Journal of Statistical Physics*, 2001, 104(1): 1-48.
- [9] Wilson P S, Toumi R. A fundamental probability distribution for heavy rainfall[J]. *Geophysical Research Letters*, 2005, 32: L14812.
- [10] Dodds P S, Rothman D H. Geometry of river networks. I. Scaling, fluctuations, and deviations[J]. *Phys Rev E*, 2000, 63: 016115.
- [11] Dodds P S, Rothman D H. Geometry of river networks. II. Distribution of component size and number[J]. *Phys Rev E*, 2000, 63: 016116.
- [12] Dodds P S, Rothman D H. Geometry of river networks. III. Characterization of component connectivity [J]. *Phys Rev E*, 2000, 63: 016117.
- [13] Leopold L B, Langbein W B. The concept of entropy in landscape evolution[M]. New York: United States Government Printing Office, 1962, A1-A5.
- [14] Inaoka H, Takayasu H. Water erosion as a fractal growth process[J]. *Phys Rev E*, 1993, 47(2): 899-910.
- [15] Wang X, Hao R, Huo J, et al. Modeling sediment transport in river networks[J]. *Physica A*, 2008, 387(25): 6421-6430.
- [16] 曹世峰, 王旭明, 霍杰, 等. 河流网引水分沙的动力学瞬态模拟[J]. 科技导报, 2009, 27(16): 60-65.
Cao Shifeng, Wang Xuming, Huo Jie, et al. *Science and Technology Review*, 2009, 27(16): 60-65.
- [17] Beer T, Borgas M. Horton's Laws and the fractal nature of streams [J]. *Water Resources Research*, 1993, 29(5): 1475-1487.
- [18] Scheidegger A E. Horton's laws of stream lengths and drainage areas[J]. *Water Resources Research*, 1968, 4(5): 1015-1021.
- [19] Barbera P L, Rosso R. On the fractal dimension of stream networks[J]. *Water Resources Research*, 1989, 25(4): 735-741.
- [20] Hack J T. Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland[R]. Washington D C: US Govt Print Off, 1957.
- [21] Rodriguez-Iturbe I, Ijjasz-Vásquez E J, Bras R L, et al. Power law distributions of discharge mass and energy in river basins [J]. *Water Resources Research*, 1992, 28 (4): 1089-1093.
- [22] Riccardo R, Ignacio R I, Amos M, et al. On Hack's law [J]. *Water Resources Research*, 1996, 32(11): 3367-3374.
- [23] Takayasu H, Inaoka H. New type of self-organized criticality in a model of erosion[J]. *Phys Rev Lett*, 1992, 68: 966-969.

(责任编辑 马宇红,代丽)

《科技导报》“卷首语”栏目征稿

“卷首语”栏目每期邀请一位中国科学院院士和中国工程院院士就重大科技现象、事件,以及学科发展趋势、科学研究热点和前沿问题等,撰文发表个人的见解、意见和评论。本栏目欢迎院士投稿,每篇文章约 2000 字,同时请提供作者学术简历、工作照和签名电子文档。投稿信箱:kjdbbjb@cast.org.cn。