

# 科学与工程应用中自适应网格方法进展

王瑞利, 刘全, 吴子辉, 胡晓棉

北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094

**摘要** 自适应网格方法是科学与工程应用中的关键技术之一。基于拉格朗日方法计算过程中网格的处理方式, 论述了耦合型和后处理型两种自适应网格类型。在耦合型自适应网格方法下, 论述了网格细化技术、移动网格和自适应坐标法。在后处理型自适应网格方法下, 描述了网格重分、邻域重连、邻域可变和邻域优化等自适应网格技术。对各种自适应网格方法的基本理论、效果、适应物理特征能力和特色等优缺点进行了分析与对比, 为使自适应网格技术真正走向科学与工程领域提供了参考。

**关键词** 科学与工程应用领域; 耦合型; 后处理型; 网格自适应方法

中图分类号 O241

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2012.05.011

## Advances in the Adaptive Grid Methods on the Area of Science and Engineering Application

WANG Ruili, LIU Quan, WU Zihui, HU Xiaomian

*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China*

**Abstract** Adaptive grid method is one of the key techniques in the area of science and engineering applications. Based on the Lagrange grids of computational method, two types of different adaptive grid methods including couple adaptive mesh methods and pro-processor adaptive mesh methods are described. In the framework of couple adaptive mesh methods, several adaptive mesh methods including adaptive mesh refinement, moving mesh method, and adaptive coordinate methods are reviewed. In the framework of pro-processor adaptive mesh methods, adaptive mesh redistribution, reconnection-based method, changing connectivity of the mesh, and connectivity optimization method are described. Their advantages and disadvantages are compared with each other and analyzed with regard to the basic theory, efficiency, robustness for physics characteristics, and other features. It provides the support for using adaptive mesh method in the area of science and engineering applications.

**Keywords** science and engineering applications; coupling type; post-processing type; adaptive grid methods

### 0 引言

很多科学研究和工程问题中涉及的物理过程都可以用偏微分方程表达, 一般情况下无法得到精确解(exact solutions)或其显式解(explicit solutions)不可能知道, 利用计算机进行数值求解是主要的研究手段之一。数值求解首先需要进行空间离散化, 再通过有限元方法(FEM)或有限差分方法(FDM)或有限体积方法(FVM)得到离散的方程组, 将离散的方程组形式化表示成算法, 研发相应的程序。对于时间相关的问题, 相应地时间离散也是必要的。

过去数十年里, 尽管计算机的速度和内存都有很大提高, 但很多实际问题的数值模拟仍需在很多简化下才可完成。也就是说, 现有的计算机能力对付过多的自由度仍然有很多困难, 特别是三维问题。在这种情形下, 自适应算法应运而生, 并在理论研究和实际应用上得到广泛的重视。如果一个偏微分方程的解有足够的光滑度, 则一致网格(uniform mesh)就可以给出满意的解。但也有一些很重要的问题, 其解的光滑性并非很好, 比如解间断(discontinuous solution)或解有大梯度(steepest gradient)情形。在这种情况下, 一致网格的计

收稿日期: 2012-02-01; 修回日期: 2012-02-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(11072039); 中国工程物理研究院科学基金项目(2011B0202043)

作者简介: 王瑞利, 研究员, 研究方向为计算流体力学与应用软件, 电子信箱: wang\_ruili@iapcm.ac.cn; 吴子辉(通信作者), 副研究员, 研究方向为计算流体力学, 电子信箱: wu\_zihui@iapcm.ac.cn

算将是非常昂贵的,而自适应算法则是一种很有效的工具。很多实际问题在局部有奇性,需要很多的计算网格点,平均分布网格将极大地浪费计算资源。合理分布网格对于高效和精确计算起着极其重要的作用。

自适应网格方法(Adaptive Grid Methods, AGM)是根据物理问题特征、或微分方程特点、或计算区域形状、或计算格式特点,合理布置、调整或改变网格的形状、大小、疏密程度的过程。例如,在可压缩流体的拉格朗日数值模拟中,在某些变化较为剧烈的区域,如大变形、激波面、接触间断面和滑移面等,网格在迭代过程不断调整,做到网格点分布与物理解的耦合,从而达到提高解的精度和分辨率,这就是一种自适应网格方法。自适应网格希望在物理解变动较大的区域网格自动密集,而在物理解变化平缓区域网格相对稀疏,这样在保持计算高效率的同时得到高精度解。自适应网格方法的另一个含义是在工程计算过程中,由于一些方法的特点,如拉格朗日方法,网格跟随流体的局部速度而变化,难免在一些流场变化剧烈的地方,如旋涡、物质界面等,形成网格的变形,导致计算格式精度下降,甚至中止计算。在这种情况下,为了保持计算格式的精度,或者使计算顺利进行,网格需要进行调整或后处理。即在计算过程中,根据计算的情况调整网格或重新布置网格,并通过守恒插值,将品质不高的原始网格上的物理量重映到修正后或重新生成后品质较好的新网格上,以致计算继续下去的一种自适应网格技术。针对前一种与物理量耦合的网格自适应主要有移动网格方法、局部细化或粗化的网格方法和自适应坐标法。针对后一种后处理型的网格自适应技术主要有网格重分(网格光滑化、网格重构等)、拓扑优化(邻域调整、邻域可变、邻域优化等)。近30年来,自适应网格方法一直引起国际学术界和各类应用部门的高度重视,并且成为网格方法研究的热点问题,发展了很多方法,在一些领域应用非常广泛。随着时间的推移,还会不断出现新的方法,而一些老方法也会进一步完善和发展,所以试图对所有自适应网格方法进行准确分类相当困难。有些自适应网格方法按所选定的分类方式很难将其划入某一类型,还有一些方法则可能跨越多种类型。另外,自适应网格方法与网格生成、计算方法紧密相关,有时也很难区分。

## 1 自适应网格方法分类

20世纪70年代末,自适应技术首先由Babuška<sup>[1]</sup>提出将后验误差应用于有限元方法中,多年来已有大量关于其数学理论、程序实现和工程应用的论文问世。1994年,中国科学院计算中心余德浩<sup>[2]</sup>指出,有限元逼近通常分为h型、p型和h-p型,传统的h型方法通常不断细分网格从而使单元尺寸 $h \rightarrow 0$ 实现近似解逼近准确解,在此过程中作为近似解的分片多项式的阶 $p$ 不变。p型方法则在网格固定即 $h$ 不变的情况下,通过不断提高作为近似解的分片多项式的阶,即令 $p \rightarrow +\infty$ 实现逼近。h-p型方法则是二者的适当结合。但通常的h

型、p型或h-p型方法还不是自适应方法,对许多问题而言,通常细分全部网格或提高所有单元的逼近阶改善计算结果显然是很不经济的。自适应方法的特点正在于,依据对已有计算结果的后验局部误差估计,对网格进行局部细分或仅对某些单元提高逼近多项式的阶,然后进行下一步计算,这样便可以尽可能少的代价获得尽可能好的结果。因此,自适应方法是具有某种最优性质的反馈方法。之后,大量文章沿用了自适应有限元方法的提法,将已有的自适应有限元方法分为3类<sup>[3-6]</sup>:p方法、r方法和h方法。p(polynomial)方法通过在局部增加和减少基函数阶的方法实现自适应,即通过增加单元的多项式插值阶数来提高求解精度。r方法靠改变已有网格的节点位置改善分析精度,既不提高单元的插值阶数,也不改变节点总数,它是通过改变节点的位置达到反映结构特征的目的,这种方法作为网格生成后处理阶段的网格光滑过程。r(redistribution)是重构之意,与h方法共同使用可以达到很好的效果。h方法通过网格的加密与稀疏方法实现自适应,即通过改变节点数目和单元尺寸达到提高网格求解精度目的。h常代表离散的长度。这3种方法在进行自适应有限元网格生成时可以结合运用,但都以h方法为主。h方法与p方法结合时称为hp方法;而h方法与r方法结合时称为hr方法。

在自适应有限元方法研究中,这三类方法是大家普遍采用的分类方法。但基于拉格朗日方法的特点,此三种自适应网格方法不能很好覆盖目前拉格朗日自适应网格的方法,本文基于拉格朗日方法计算过程中网格的处理方式,提出耦合型和后处理型两种自适应网格类型,并对目前的拉格朗日方法中自适应网格的主要方法进行了分析和归类。

### 1.1 流体力学基本方法

自适应网格方法是与流体计算格式紧密相关的。在流体力学领域一般将方法分为两种基本类型<sup>[7]</sup>:欧拉(Euler)方法和拉格朗日(Lagrange)方法。

(1) Lagrange方法。Lagrange方法的特点是计算网格随物质的质团运动,可以清晰地描述物质界面,自由面和活塞等边界条件的处理也是自然的。Lagrange方程形式简单,数值离散格式求解效率高,在一维情形,质团的排列有序、不会互相超越,此时采用拉格朗日方法尤为有效。著名的von-Neumann-Richtmyer方法<sup>[8]</sup>就是一种一维Lagrange方法。但在多维情形下,由于Lagrange方法网格会跟随流体局部速度移动,从而出现网格变形,网格的扭曲常常降低方法的精度,甚至造成网格混乱、网格相交,以至于计算不能继续。

(2) Euler方法。Euler方法是网格固定,因而不会出现Lagrange方法下的网格畸变,也因此Euler方法的时间步长总可以保持在一个比较稳定的范围内,处理大变形问题也比较灵活。但当系统中含有多种介质时,不加特殊处理会使物质界面逐渐模糊,得不到正确的结果。

为了克服这两种方法各自的局限,逐渐发展了一些Lagrange和Euler混合的方法。除了最著名和具有代表性的

任意拉氏-欧氏<sup>[9]</sup>(Arbitrary Lagrangian-Eulerian, ALE)方法外,还有 MEL 方法和 CEL 方法<sup>[10]</sup>。这些方法允许任意网格移动,包括 Lagrange 和 Euler 的限制。尤其允许物质界面的网格可以跟随流体移动,这样既保证了界面的精确解,也可使网格保持比较正规。为了达到这个目的,一般的方法在 2 步之间循环:第 1 步是 Lagrange 步,网格移动跟随流体,保持了 Lagrange 方法的优点;第 2 步是 Euler 步,包括了网格的重映。网格的重映尽可能使网格规则或自适应于问题的物理解。跟随重映步,就是从旧的、扭曲的网格到新的、任意定义的规则网格的物理量重映,因为这个过程是一个典型的插值过程,常常要强迫物理量单调和守恒,所以重映过程是当今计算流体领域中比较难的一个课题。

## 1.2 基于拉氏方法的自适应网格分类

自适应网格方法很多,为了将其方法简单描述,本文 Lagrange 方法将目前自适应网格方法分为耦合型自适应网格方法和后处理型自适应网格方法两大类。

(1) 耦合型自适应网格方法。耦合型自适应网格方法(Couple Adaptive Mesh Method)是指在科学计算中,针对某些变化较为剧烈的区域,如大变形、激波面、接触间断面和滑移面等,网格在迭代过程不断调节,将网格细化,做到网格点分布与物理解的耦合,从而提高解的精度和分辨率的一种技术。耦合型自适应网格方法最大的特点是与计算问题或求解方程耦合。

(2) 后处理型自适应网格方法。后处理型自适应网格方法(Pro-processor Adaptive Mesh Method)是指在工程计算过程中,由于一些方法的特点,如 Lagrange 方法,网格随流体的局部速度变化,这样难免在一些流场变化剧烈的地方,如旋涡、物质界面等,形成网格变形,致使计算格式精度下降,甚至中止计算。为了在这种情况下提高计算格式精度,或使计算顺利进行,网格需进行后处理。即在计算过程中,根据计算情况调整网格或重新布置网格,并通过守恒插值,将品质不高的原始网格上的物理量插值到修正后或重新生成后,品质较好的新网格上,以致计算继续下去的一种技术。后处理型自适应网格方法最大的特点是不与计算问题或求解方程耦合,只是为了 Lagrange 计算顺利进行所做的网格技术。

## 2 自适应网格方法的通用方法

自适应网格方法的种类多种多样,而且新的思想、新的算法还在不断出现,难以用统一的基准将其分类。本文仅对众多自适应网格方法中的典型方法的算法思想进行回顾和总结。

在自适应网格方法中,必须讨论两方面问题:问题特点或网格品质确定自适应位置和自适应算法确定计算网格。确定自适应位置常用误差估计(error estimation)。误差估计需要采用一定误差估计方法计算局部或整体近似误差。Duarte 等<sup>[11]</sup>通过 hp 方法进行误差估计;Chung 和 Belytschko<sup>[12]</sup>采用有限元影射技术进行误差分析;Liu<sup>[13]</sup>采用背景网格内能量误差进行

误差估计;Häussler-Combe 等<sup>[14-15]</sup>采用计算位移的二阶导数和应变能密度梯度进行自适应分析。问题特点确定自适应位置的方法很多,除误差估计,还有一些其他方法。网格品质包括网格光滑性、均匀性和正交性。自适应算法确定计算网格是自适应方法的重要内容,近 30 年得到了很好的发展。

### 2.1 耦合型自适应网格方法

#### 2.1.1 自适应网格细化与粗化方法

自适应网格细化与粗化(Adaptive Mesh Refinement, AMR)算法是由 Berger 和 Oliger 在 1984 提出和发展的<sup>[16]</sup>。1989 年, Berger 和 Colella<sup>[17]</sup>成功地把 AMR 技术应用到守恒律和气体动力学方程的求解中,开辟了计算气体动力学方程的新方法;1991 年, Bell 等<sup>[18]</sup>发展了三维 AMR 程序。目前有以下 3 种类型的网格细化技术:(1) 全部细分(Fully Refined, FR);(2) 移动网格(Moving Mesh, MM; Equivalent Tensor Product, ETP);(3) 局部细分(Adaptive Mesh Refinement, AMR)。其中,局部细分与粗化的 AMR 技术是当前较具影响的网格自适应技术,如 LRR(Local Rectangular Refinement)是典型的 AMR 自适应方法。而 AMR 技术又分为 3 种基本类型:Overlap 型、Block 型和 Hybrid 型。这些不同形式的 AMR 技术已广泛应用于物理、力学、工程等领域。近几年,AMR 已经扩展到各种问题和算法的选取中,包括求解变系数的 Poisson 方程、Helmholtz 方程、控制无黏性气体动力学的双曲性守恒方程组、可压和不可压的 Navier-Stokes 方程、控制反应流方程、爆轰模拟等<sup>[19-21]</sup>。

目前,针对 AMR 技术与开放源码的软件主要有 P. MacNeice、K. Olson 等的 PARAMESH<sup>[22-24]</sup>,美国 LLNL 实验室研制的 SAMRAI<sup>[25]</sup>(Structured Adaptive Mesh Refinement Application Infrastructure)已经得到很好的应用。大部分 AMR 技术文章和应用都是在 Euler 网格和有限元中应用, Lagrange 网格和有限体积的文章和成果较少。现在,多介质大变形问题仍以 Lagrange 流体动力学程序为主导,所以 Lagrange 框架下开展 AMR 技术研究有一定挑战性。本文作者针对 Lagrange 方法,研制了 LAMR<sup>[21,26]</sup>程序,并应用于爆轰数值模拟。

AMR 方法的主要过程是:(1) 确定目标函数;(2) 获得基于目标函数当前网格的流场解与伴随解;(3) 构造对应于当前网格的密网格;(4) 对每个网格单元,将当前网格的对应量插值到密网格,构造从当前网格解到密网格解的插值算子;(5) 在密网格上计算流场残量;(6) 进行误差估计以及光顺。若误差大于设定的误差,则标记当前网格进行细化,细化结束返回步骤(2);若误差小于或等于设定的误差,则对当前网格不进行细化。

可以看出,AMR 方法比较适用于静态问题,静态问题需要加密的位置是固定的,而动态问题因为需要加密的位置随着时间的推移而移动,往往不但需要将某些部分网格进行加密,而且需要将某些部分的网格稀疏化,以避免过多的网格产生不必要的计算量。尤其是在 Lagrange 框架下网格形状随

流体变化而变化,粗化网格可能会丧失一些物理图像。关于 AMR 方法虽然已有一些研究结果,但是总体上说限制比较大,还不够成熟和完善。在 AMR 方法的实现中,为了维护网格的拓扑结构的数据,导致数据结构相当复杂,代码上的工作量是比较大的。图 1 是 AMR 技术应用的一个例子,可以看出物理量梯度陡的位置始终是密网格布置的位置。

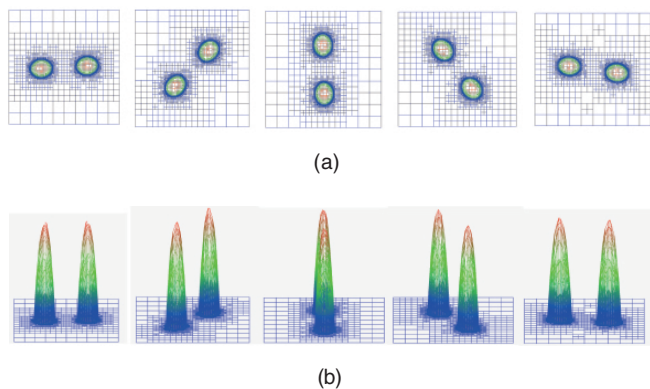


图 1 网格和物理量分布推进过程 ((a)为网格, (b)为物理量分布)

Fig. 1 Advancing of the mesh with physical quality distribution

### 2.1.2 移动网格法

移动网格法 (Moving Mesh Method) 主要是为解决发展方程的计算问题而设计的,已有 40 多年的研究历史。它通过调整网格位置来提高数值解分辨率的同时改善数值计算对计算机资源的要求。1966 年, Winslow<sup>[27]</sup>提出的椭圆型生成方法及其之后一系列通过修改 Poisson 方程源项达到控制网格均匀性、正交性等几何性质的方法可看做是移动网格法的前身。自 1981 年 Miller<sup>[28]</sup>提出移动有限元法 (Moving Finite Element, MFE) 之后,近 30 多年来, MFE 得到广泛关注。早期最有代表性的工作除 Miller 的 MFE 之外,还有 1986 年 Dorfi 和 Drury<sup>[29]</sup>提出的移动有限差分法。2001 年 R. Li 等<sup>[30]</sup>提出了基于调和映射的移动网格方法,利用调和映射构造逻辑区域和物理区域间的坐标变换并采用一个迭代的过程来实现网格的移动,解决了过去的高维自适应移动网格方法引起的网格缠绕问题,提出的区域边界上和内部的网格相互耦合的移动方式,设计了新旧网格之间保持物理性质的解重映算法。1999 年起, W. M. Cao 等<sup>[31-33]</sup>提出了基于几何守恒律 (Geometric Conservation Laws, GCL) 的移动网格法。2003 年汤华中和汤涛<sup>[34]</sup>在一维和二维结构网格上通过解一个从逻辑区域到物理区域的基于变分原理的网格方程而得到了一种移动网格方法,并证明他们的方法在一维时是稳定的和收敛的。2007 年, J. Q. Han 和 H. Z. Tang<sup>[35]</sup>给出了基于几何的旧网格上的物理量到新网格的守恒型插值或重映方法。2008 年, G. X. Chen 等<sup>[36]</sup>将基于几何的旧网格上的物理量到新网格的守恒型插值或

重映方法直接推广应用于非结构三角形网格,并给出了四面体网格上的一种基于几何的守恒型插值或重映。

移动网格法的思想是保持求解过程中网格节点数及其相互之间的拓扑连接的结构不变,但网格节点的位置则随着时间而变化,并且将较多的网格点移动到解的性质较奇异、需要进行精细地逼近的地方。通过这种调整,可以合理分布网格点,使得解变化较大的局部区域有较多的网格,从而使整体的误差减少,从而使数据存储量小,计算速度快。与局部加密方法一样,在实现网格移动的时候,需要一个指示子一样的量来对网格移动进行指导。

移动网格方法中最成功的实现是将方程的求解问题和网格移动的问题分离成为两个完全独立的部分。在网格移动的过程中,可以不考虑方程本身的求解方法。在这样的情况下,对于不同类型的问题的移动网格方法,就被归结为对于该问题给出合适的控制函数的问题,同时这种分离也有利于程序的开发和实际应用,只是网格移动后需要将物理量进行守恒重映。此方法目前已得到了很好的应用。图 2 是北京大学李若网页 (<http://www.movingmesh.org>) 上移动网格法在双马赫反射问题应用的例子,可以看出网格与密度等值线物理量相匹配的关系。

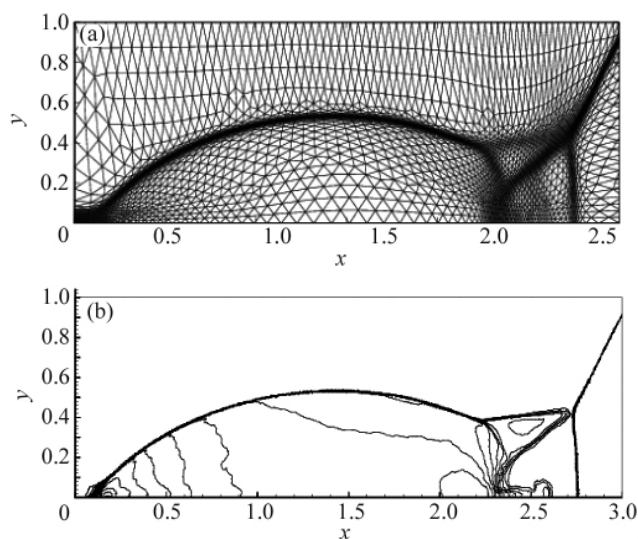


图 2 网格和物理量分布移动过程 ((a)为网格, (b)为密度等值线)

Fig. 2 Moving of the mesh with physical quality distribution

### 2.1.3 自适应坐标法

在许多流体力学问题尤其是多介质问题的计算中,物理空间区域通常是不规则的或活动的,要对这样的流体问题进行数值计算,须首先对区域进行适当的离散化,即生成较好的计算网格。网格生成技术的本质是坐标变换技术。现在常用的生成网格的方法均相当于做一个坐标变换,即把物理空间中的不规则的或活动的区域变换到计算空间 (逻辑空间)

中规则的和固定的区域,并在其上进行数值计算。W. H. Hui 等<sup>[7]</sup>于 1996 年提出的统一坐标法和 G. W. Yuan 等<sup>[8]</sup>于 2005 年提出的自适应坐标变换法均属于此类方法。

W. H. Hui 等<sup>[7]</sup>于 1996 年提出了统一坐标系,引入一个自由参数  $h$ ,将流体动力学各个物理量看成时间和拟粒子 (pseudo-particles) 的某种固有特征的函数,拟粒子以速度  $hq$  运动,其中  $q$  为流体质点运动速度。 $h=0$  时,为 Euler 坐标系; $h=1$  时,为 Lagrange 坐标系。自由度  $h$  使统一坐标综合了 Euler 坐标和 Lagrange 坐标的优点,弥补了二者的缺陷。统一坐标既可以避免 Euler 坐标法的过度数值耗散和动边界捕捉困难,也可以避免 Lagrange 坐标法的严重网格变形,并且能保证接触间断处有较高的分辨率。

## 2.2 后处理型自适应网格方法

### 2.2.1 网格重构/重分方法

C. W. Hirt 等<sup>[9]</sup>在 1974 提出了 ALE 方法,主要步骤包括:(1) Lagrange 计算步;(2) 网格重分 (rezone);(3) 重映 (remap)。在 Lagrange 计算步,求解 Lagrange 形式的动力学方程组,时间推进一步,网格随着介质的局部速度运动而运动,可能会出现变形,使得计算误差增大,甚至可能扭曲/翻转,导致整个计算中止,这时需要充分网格。改善网格品质,解决网格严重变形的问题,相应地也就需要将旧网格上的物理量重映到重分后的新网格上,即重映。ALE 方法是最早提出网格重分的概念。

网格重分/重构方法 (Adapting Griding Techniques) 也称自适应网格重新分布 (Adaptive Mesh Redistribution) 方法,网格重分是指在 Lagrange 程序计算过程中,某步或某时刻对计算区域或部分区域重新生成一套新网格,并将原网格的物理量守恒插值到新网格的一个过程。网格重新生成是将品质不高的网格体系,通过网格生成方法重新创建成品质较好的网格体系。网格重分的主要作用是:一可以使计算能继续下去;二可以提高解的精度。按网格重分的区域,一般分为整体网格重分和局部网格重分两种情况。

整体网格重分是指在计算过程中,在间隔一定时间对计算区域或某计算块重新生成网格。整体网格重分一般最好能保持原来网格的拓扑结构,如对某区网格光滑化生成新网格 (图 3),可以看出网格的几何品质得到大大提高。但对于一些特殊情况下,也可以改变网格的拓扑结构,如在计算过程中结构网格块与非结构网格块之间的相互转换。

局部网格重分方法是指在计算过程中,在某步对某计算区域 (计算块) 中划定区域 (块) 重新生成网格,然后通过插值的方法求得新生成网格的流场属性值。因此局部网格重构一般包括调用自动网格生成器和由旧网格向新网格进行插值两部分所组成。这种方法适合大位移问题。但是,局部网格重构方法也有两个大的缺点。一是局部网格重构需要在某个时间步长中挖出重分区域/块,增加了计算的负担;二是网格重构过程还给数值计算带来了插值误差。在简单的二维问题

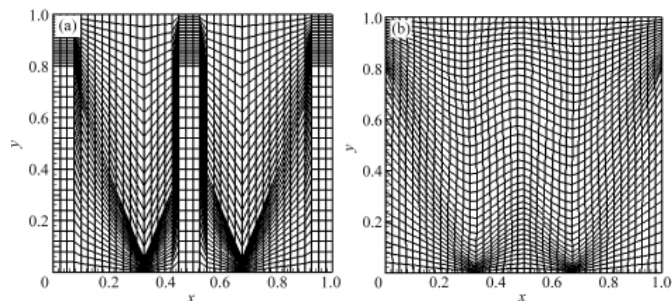


图 3 整个计算区域采用网格光滑重新生成网格

((a)为原始网格;(b)为光滑化后网格)

Fig. 3 Mesh generated by using grid smoothing method for the global computational domain; (a) is original mesh, (b) is new generated mesh

中,局部网格重构的消耗不是太大,但在复杂问题,尤其是三维问题中,局部网格重构将变成一项非常繁重的工作。2004 年俄罗斯联邦核中心——全俄技术物理研究院 A. V. Skovpen 等<sup>[39]</sup>对于大变形问题提出的局部开窗口的网格生成方法及边界分割的拓扑变化思想就属于局部网格重分的典型代表,此方法能很好地计算大变形和区域分割问题。

近几年,基于 Hirt、Amsden 和 Cook 提出的 ALE 方法,出现了大量网格重分方面的研究成果<sup>[40-43]</sup>,用于多介质大变形计算的 Lagrange 加重分方法得到很好发展和应用<sup>[44-46]</sup>。有些网格优化方法<sup>[47-48]</sup>也属于此类,最典型的是美国 Los Alamos 实验室 P. Knupp 等<sup>[49]</sup>提出在保证 Lagrange 计算网格的同时尽量使网格品质变好的参考 Jacobi 网格优化方法。还有一直在 Lagrange 程序中采用的大量网格后处理方法,最为典型 Laplace<sup>[50-52]</sup>光滑化方法。

### 2.2.2 邻域重连

邻域重连 (Reconnection-Based) 方法是 2009 年法国的 R. Loubère 与美国 Los Alamos 实验室的 M. Shashkov 等合作提出基于邻域重连的 ReALE 方法<sup>[53]</sup>中提到的处理 Lagrange 计算过程中网格大变形的一种网格自适应方法,这种方法目前有很好的发展势头及应用前景。此网格的核心思想是将流体计算过程中的网格节点当成计算区域中的散点,然后利用杜强等<sup>[54-55]</sup>提出的 CVT (Centroidal Voronoi Tessellation) 网格优化方法,生成 Voronoi 网格。然后扫描 Voronoi 网格边长,若两个节点之间线段很短,将其两点并为一点,再重连生成新的网格。依次类推,直到 Voronoi 网格的边长满足要求。此方法的优点是网格品质很高,但由于迭代生成网格需要一定的时间,另外新旧网格物理量插值会带来一定的误差。此方法与 ALE 耦合已成功地应用到多介质大变形可压缩流体的数值计算中,取得了很好的效果。并基于 CHIC 程序研制了 Reale 程序,对流体大变形问题得到了较好的结果。

### 2.2.3 邻域可变

二维 Lagrange 方法的计算网格是与流体质团紧密联系

在一起的,并随着质团运动而运动,质团之间没有物质交换。根据网格之间的相邻关系是否固定这一特点,可以对拉格朗日方法进行更细的分类:网格之间的相邻关系是全部固定的,全部不固定的,部分固定部分不固定的。对于固定相邻关系的拉格朗日方法,其计算逻辑较简单,在网格比较正规的情况下计算误差也较小,其主要问题是在网格出现大变形时,计算误差剧增甚至影响计算的顺利进行。如果在拉格朗日计算过程中网格整体变形较大或计算区域界面比较规则的情况下,利用网格重分技术可以得到很好的计算结果。但当网格局部网格变化严重时,利用网格重分技术很难处理,尤其是当计算区域的边界自相交、分割等严重变形出现时,网格重分或邻域重连技术都显得束手无策。为了更好地处理网格大变形,1998年以来由王瑞利、林忠<sup>[56-57]</sup>等研发的网格邻域可变(changing connectivity of the mesh)技术对此问题的解决起到了很好的作用。邻域可变技术是处理 Lagrange 计算过程中网格大变形的一种很好的网格自适应方法。此方法的核心思想是在计算过程中,当网格有出现相交的可能时,就在局部改变网格的邻域关系,以避免网格相交带来的大变形问题,能较好的解决流体大变形问题的模拟。网格邻域变化包括删点、加点、减边、加边、合并网格、分解网格、分离等一系列操作。但由于 Lagrange 计算过程中网格的变化是多种多样的,如何建立朴实可靠的大变形网格处理方法仍是当前流体力学数字模拟的瓶颈问题。实际上,邻域可变最早的应用是在网格生成邻域。圣地亚国家实验室的 S. J. Owen 等<sup>[8]</sup>在网格生成过程中,通过判别网格长宽比、节点连线数等特点,实现点、边加密与合并的网格拓扑操作,提高网格的品质,就是属于网格邻域可变的思想。此方法目前已成功应用到高温高压多介质复杂流体的数值模拟<sup>[59]</sup>、多介质之间间隙闭穴的滑移处理<sup>[60]</sup>和爆轰数值模拟<sup>[61]</sup>中,并取得了很好效果。图 4 是邻域可变在爆轰闭穴滑移中的应用<sup>[60]</sup>。计算模型从里到外依次

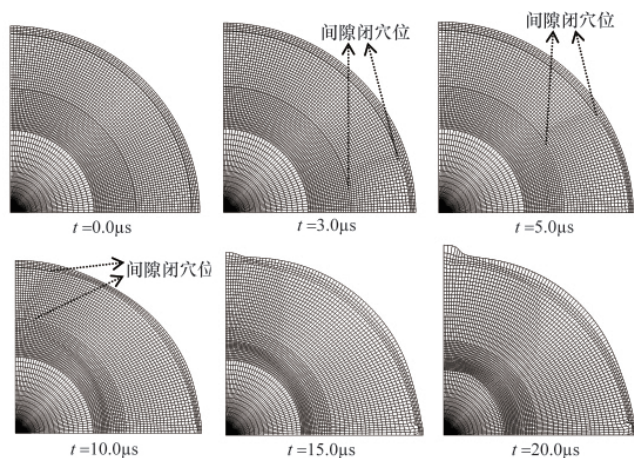


图 4 爆轰闭穴滑移模型计算结果  
Fig. 4 Numerical results of closed void interface in the explosive mode

为气体(Air)、金属钨(W)、金属钢(Fe)、炸药(PBX9401)和金属(W)。区域尺寸分别为: $R_1=3.0\text{cm}$ ,  $R_2=4.0\text{cm}$ ,  $R_3=4.5\text{cm}$ ,  $R_4=4.53\text{cm}$ ,  $R_5=6.5\text{cm}$ ,  $R_6=6.52\text{cm}$ ,  $R_7=6.8\text{cm}$ , 其中炸药与两边金属之间有间隙。图中给出了间隙逐渐闭合的过程。

## 2.2.4 邻域优化

邻域优化(Connectivity Optimization Method),严格来说与邻域可变区别不大。只是邻域可变是在计算过程中,根据网格相交,然后对相交网格基于计算几何对相交网格进行拓扑变化的一种网格处理方法。而邻域优化是在计算过程中,对一些网格品质比较差的网格,通过与周围相邻网格一块进行网格拓扑操作,以提高网格的几何品质。实际上与网格生成中模板法、拓扑分解法一样。网格邻域优化主要是网格的光滑化技术, L. A. Freitag<sup>[62-65]</sup>在这方面作了很好的工作。2008年以来,陈艺冰、江松等<sup>[66]</sup>研发的网格优化 OBR 方法在科学与工程应用中起到了很好的作用。

## 3 问题与展望

自适应网格方法已经发展了 40 多年,一些方法已经在应用中取得了很好的效果。本文主要对 Lagrange 框架下的一些自适应网格方法进行了综合分析,可以看出 Lagrange 框架下自适应网格方法还有很多问题急需解决。

(1) 自适应网格的扫描技术(控制函数、探测函数),即自适应网格实施的条件。要应用好自适应网格方法,首先必须找出需要自适应的位置,这方面目前虽有一些方法,如误差分析、物理量梯度等,但很不成熟。

(2) 在 Lagrange 框架下,由于网格跟随流体变化,有些自适应网格方法需要改进和完善。如 AMR 方法加密后,不同物质界面的无缝拼接问题;AMR 方法网格粗化后,保持物质界面的问题。

(3) 在 Lagrange 方法下,自适应网格重构后,高精度、快速的物理量重映技术仍是目前关注的重要内容。

(4) 自适应网格方法的智能化,很多自适应网格方法还需要人工干预。

(5) 各种保持物理特性的自适应网格方法仍是研究的热点问题。

## 参考文献 (References)

- [1] Babuška I, Rheinboldt W C. A-posteriori error estimates for the finite element method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1978, 12(10): 1597-1615.
- [2] 余德浩. 有限元及边界元计算中的自适应方法 [J]. *自然科学进展*, 1994, 4(2): 16-22.  
Yu Dehao. *Progress in Natural Science*, 1994, 4(2): 16-22.
- [3] Adjerid S, Flaherty J E. A moving finite element method with error estimation and refinement for one-dimensional time dependent partial differential equations [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1986, 23 (4): 778-796.
- [4] Cao W, Huang W, Russell R. An r-adaptive finite element method based

- upon moving mesh PDEs[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 149 (2): 221-244.
- [5] Thompson J F. A survey of dynamically-adaptive grids in the numerical solution of partial differential equations [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 1985, 1(1): 3-27.
- [6] 汤涛, 李若, 张争茹. 偏微分方程的移动网格方法[R]. 自适应算法暑期班讲义. 北京: 北京大学数学学院, 2004.
- Tang Tao, Li Ruo, Zhang Zhenru. A moving mesh method of partial differential equations [R]. Lecture of Adaptive Computation in Summer Seminars. Beijing: School of Mathematical Sciences, Peking University, 2004.
- [7] 李德元, 徐国荣, 水鸿寿, 等. 二维非定常流体力学数值方法[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- Li Deyuan, Xu Guorong, Shui Hongshou, *et al.* Numerical computational methods of two dimensional unsteady fluid mechanics [M]. Beijing: Science Press, 1987.
- [8] Vonneumann J, Richtmyer R D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks [J]. *Journal of Applied Physics*, 1950, 21 (3): 232-237.
- [9] Hirt C W, Amsden A A, Cook J L. An Arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds [J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, 135(2): 203-216.
- [10] Noh W F. CEL: A time-dependent two-space dimensional coupled Eulerian-Lagrangian code [M]//Alder B, Fernbach S, Rotenberg M. *Methods in Computational Physics*, New York: Academic Press, 1963: 117-180.
- [11] Duarte C A, Oden J T. An h-p adaptive method using clouds [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139 (1-4): 237-262.
- [12] Chung H J, Belytschko T. An error estimate in the EFG method [J]. *Computational Mechanics*, 1998, 21(2): 91-100.
- [13] Liu G, Tu Z. An adaptive procedure based on background cells for meshless methods [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, 191(17-18): 1923-1943.
- [14] Häussler-Combe U, Korn C. An adaptive approach with the Element-Free-Galerkin method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 162(1-4): 203-222.
- [15] Luo Y, Combe U H. An adaptivity procedure based on the gradient of strain energy density and its application in meshless methods [C]// *Meshfree Methods for Partial Differential Equations*. Berlin: Springer, 2003: 267-279.
- [16] Berger M J, Oliger J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, 53(3): 484-512.
- [17] Berger M J, Colella P. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics [J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, 82 (1): 64-84.
- [18] Bell J, Berger M, Saltzman J, *et al.* Three-dimensional adaptive mesh refinement for hyperbolic conservation laws [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1994, 15(1): 127-138.
- [19] Howell L H, Bell J B. An adaptive mesh projection method for viscous incompressible flow[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1997, 18 (4): 996-1013.
- [20] Almgren A S, Bell J B, Colella P, *et al.* A Conservative adaptive projection method for the variable density incompressible Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, 142(1): 1-46.
- [21] 王瑞利, 闫伟, 林忠, 等. 数值求解中网格自适应加密和合并技术的研究[J]. 数值计算与计算机应用, 2004, 25(2): 145-154.
- Wang Ruili, Yan Wei, Li Zhong, *et al.* *Journal of Numerical Methods and Computer Applications*, 2004, 25(2): 145-154.
- [22] Macneice P, Olson K M, Mobarri C, *et al.* PARAMESH: A parallel adaptive mesh refinement community toolkit [J]. *Computer Physics Communications*, 2000, 126(3): 330-354.
- [23] Olson K, MacNeice P. An overview of the PARAMESH AMR software package and some of its applications [C]//Plewa T, Linde T, Weirs V G. *Adaptive Mesh Refinement—Theory and Applications: Proceedings of the Chicago Workshop on Adaptive Mesh Refinement Methods*. New York: Springer, 2005: 315-330.
- [24] Olson K. PARAMESH: A parallel, adaptive grid tool [C]//Deane A, Brenner G, Emerson D, *et al.* *Parallel Computational Fluid Dynamics 2005: Theory and Applications*. College Park, MD: Elsevier, 2006: 341-348.
- [25] Hornung R D, Kohn S R. The use of object-oriented design patterns in the SAMRAI structured AMR framework [C]//Proceeding of the First Workshop on Object Oriented Methods for Inter-Operable Scientific and Engineering Computing, <http://www.LNL.gov/CASC/SAMRAI>, 1998.
- [26] 王瑞利, 付汉清. 二维自适应网格加密(AMR)方法研究[C]//第十一届中国空气动力学物理气体动力学学术交流会论文集. 北京: 北京应用物理与计算数学研究所, 2003.
- Wang Ruili, Fu Hanqing. A study of two dimensional adaptiv mesh refinement [C]//Proceedings of 11th China Aerodynamics Symposium on Physical Gas Dynamics. Beijing: Beijing Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, 2003.
- [27] Winslow A M. Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh [J]. *Journal of Computational Physics*, 1966, 1(2): 149-172.
- [28] Miller K. Moving finite elements II [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1981, 18(6): 1033-1057.
- [29] Dorfi E A, Drury L O. Simple adaptive grids for 1-D initial value problems[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, 69(1): 175-195.
- [30] Li R, Tang T, Zhang P. Moving mesh methods in multiple dimensions based on harmonic maps [J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 170(2): 562-588.
- [31] Cao W, Huang W, Russell R D. An r-adaptive finite element method based upon moving mesh PDEs [J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 149(2): 221-244.
- [32] Cao W, Huang W, Russell R D. A study of monitor functions for two-dimensional adaptive mesh generation [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1999, 20(6): 1978-1994.
- [33] Cao W, Huang W, Russell R D. An error indicator monitor function for an r-adaptive finite-element method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 170(2): 871-892.
- [34] Tang H, Tang T. Adaptive mesh methods for one- and two-dimensional hyperbolic conservation laws [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2003, 41(2): 487-515.
- [35] Han J, Tang H. An adaptive moving mesh method for two-dimensional ideal magnetohydrodynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 220(2): 791-812.
- [36] Chen G, Tang H, Zhang P. Second-order accurate Godunov scheme for multicomponent flows on moving triangular meshes [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2008, 34(1): 64-86.

- [37] Hui W, Li P, Li Z. A unified coordinate system for solving the two-dimensional Euler equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 153(2): 596–637.
- [38] Yuan G, Shen L, Shen Z. Adaptive coordinate transformation methods [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2005, 22(1): 7–12.
- [39] Skovpen A V. Modified algorithm for unstructured quadrilateral meshing [J]. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 2005, 45(8): 1506–1528.
- [40] 熊俊, 周海兵, 张树道. SALE 速度重映算法的改进 [J]. 计算物理, 2006, 23(1): 37–42.  
Xiong Jun, Zhou Haibing, Zhang Shudao. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2006, 23(1): 37–42.
- [41] Maire P, Breil J, Galera S. A cell-centred arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2008, 56(8): 1161–1166.
- [42] Galera S, Maire P, Breil J. A two-dimensional unstructured cell-centered multi-material ALE scheme using VOF interface reconstruction [J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(16): 5755–5787.
- [43] Berndt M, Breil J, Galera S, et al. Two-step hybrid conservative remapping for multimaterial arbitrary Lagrangian-Eulerian methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(17): 6664–6687.
- [44] Maire P. A high-order cell-centered Lagrangian scheme for two-dimensional compressible fluid flows on unstructured meshes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(7): 2391–2425.
- [45] Campbell J C, Shashkov M. A compatible Lagrangian hydrodynamics algorithm for unstructured grids [J]. *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, 2003, 4(2): 53–70.
- [46] 王瑞利, 林忠, 倪国喜. 基于任意多边形拉氏网格的有限体积方法研究及应用[J]. 数值计算与计算机应用, 2006, 27(1): 31–38.  
Wang Ruili, Lin Zhong, Ni Guoxi. *Journal of Numerical Methods and Computer Applications*, 2006, 27(1): 31–38.
- [47] 姚彦忠, 袁光伟, 倪国喜. 推进方式的参考 Jacobian 网格优化方法[J]. 计算物理, 2007, 24(3): 253–260.  
Yao Yanzhong, Yuan Guangwei, Ni Guoxi. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2007, 24(3): 253–260.
- [48] 勇珩, 袁国兴, 成娟, 等. 自适应于流场变化的网格重构方法[J]. 计算物理, 2007, 24(5): 505–511.  
Yong Heng, Yuan Guoxing, Cheng Juan, et al. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2007, 24(5): 505–511.
- [49] Knupp P, Margolin L G, Shashkov M. Reference Jacobian optimization-based rezone strategies for arbitrary Lagrangian Eulerian methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, 176(1): 93–128.
- [50] Field D A. Laplacian smoothing and Delaunay triangulations [J]. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1988, 4(6): 709–712.
- [51] Hansbo P. Generalized Laplacian smoothing of unstructured grids[J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1995, 11(5): 455–464.
- [52] Cannan S, Tristano J, Staten M. An approach to combined Laplacian and optimization-based smoothing for triangular, quadrilateral and quaddominant meshes [C]//Proceedings of the Seventh International Meshing Roundtable. Dearborn, MI: Sandia National Laboratories, 1998: 479–494.
- [53] Loubère R, Maire P, Shashkov M, et al. ReALE: A reconnection-based arbitrary-Lagrangian-Eulerian method [J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(12): 4724–4761.
- [54] Du Q, Gunzburger M. Grid generation and optimization based on centroidal Voronoi tessellations [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2002, 133(2–3): 591–607.
- [55] Du Q, Faber V, Gunzburger M. Centroidal voronoi tessellations: Applications and algorithms[J]. *SIAM Review*, 1999, 41(4): 637–676.
- [56] Wang R, Lin Z, Lin W. The research of hydromechanics methods with changing connectivity of the mesh in problems with large deformation [C]. The 2010 International Conference of Applied and Engineering Mathematics, Imperial College, London, UK, June 30–July 2, 2010.
- [57] 王瑞利, 林忠, 魏兰. 针对流体大变形问题网格邻域可变技术 [J]. 计算物理, 2011, 28(4): 501–506.  
Wang Ruili, Lin Zhong, Wei Lan. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2011, 28(4): 501–506.
- [58] Owen S J, Staten M L, Canann S A, et al. Q-Morph: An indirect approach to advancing front quad meshing [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 44(9): 1317–1340.
- [59] 王瑞利, 林忠, 葛全文, 等. 基于流体特征的任意多边形非结构网格方法研究[M]//刘凯欣. 计算爆炸力学进展. 北京: 中国力学学会爆炸力学专业委员会, 北京大学工学院, 2006: 103–111.  
Wang Ruili, Lin Zhong, Ge Quanwen, et al. Base on arbitrary n-polygon of fluid characteristic unstructured grids method [M]//Liu Kaixin. Process in the Computational Explosive Mechaniacs. Beijing: Explosion Professional Committee, Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics; College of Engineering, Peking University, 2006: 103–111.
- [60] 王瑞利, 林忠, 刘全. 基于非结构任意多边形网格的滑移面计算技术 [C]//第十五届中国空气动力学物理气体动力学学术交流会论文集, 北京: 北京应用物理与计算数学研究所, 2011: 117–120.  
Wang Ruili, Lin Zhong, Liu Quan. The calculated slide surface based on the unstructured arbitrary n-polygon grids [C]//Proceedings of 15th China Aerodynamics Symposium on Physical Gas Dynamics, Beijing: Beijing institute of Applied Physics and Computational Mathematics, 2011: 117–120.
- [61] 林文洲, 洪滔, 林忠, 等. 拉氏程序使用减敏模型模拟炸药绕爆问题 [J]. 计算物理, 2010, 27(2): 181–189.  
Lin Wenzhou, Hong Tao, Lin Zhong, et al. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2010, 27(2): 181–189.
- [62] Freitag L A. On combining laplacian and optimizationbased mesh smoothing techniques [C]// Canann S A, Saigal S, Applied Mechanics Division, American Society of Mechanical Engineers. Trends in Unstructured Mesh Generation, AMD (Series), New York, NY: American Society of Mechanical Engineers, 1997, 220: 37–43.
- [63] Freitag L A, Ollivier-Gooch C. Tetrahedral mesh improvement using swapping and smoothing[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(21): 3979–4002.
- [64] Freitag L, Plassman P. Local optimization-based untangling algorithms for quadrilateral meshes [C]//Proceedings of the Tenth Anniversary International Meshing Roundtable. Newport Beach, CA: Sandia National Laboratories, 2001: 454–458.
- [65] Lori A, Freitag A, Knup P M. Tetrahedral element shape optimization via the Jacobian determinant and the condition number[C]//Proceedings of 8th International Meshing Roundtable, South Lake Tahoe, CA: Sandia National Laboratories, 1999: 247–258.
- [66] Chen Y, Jiang S. An optimization-based rezoning for ALE methods[J]. *Communications in Computational Physics*, 2008, 4(5): 1216–1244.

(责任编辑 朱宇)