Zakharov 方程组半离散 Fourier 谱格式解的存在性

孙 璐[1], 张法勇[2],朱 捷[1],陈洪海[1],王宏久[1]

1. 黑龙江科技学院理学院,哈尔滨 150027
2. 黑龙江大学数学科学学院,哈尔滨 150080

摘要 为了研究等离子体物理中 Zakharov 方程组数值方法解的适定性,本文针对 Zakharov 方程组的周期初值问题,首先在[0,T]上建立了半离散的 Fourier 谱格式;然后,证明了半离散 Fourier 谱格式具有守恒性质;最后,利用守恒性质对方程组的近似解进行先验估计,得到了整体解的存在性。

关键词 Zakharov 方程组;Fourier 谱格式;整体解;先验估计

中图分类号 O241.1 **文献标识码** A **doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2012.01.014

Solutions Existence of Semi-discrete Fourier Spectral Scheme in the Zakharov Equations

SUN Lu[1], ZHANG Fayong[2], ZHU Jie[1], CHEN Honghai[1], WANG Hongjiu[1]

1. *College of Science, Heilongjiang Institute of Science and Technology, Harbin 150027, China*
2. *College of Mathematical Science, Heilongjiang University, Harbin 150080, China*

Abstract In order to study well-posed problem of the numerical solutions method for Zakharov equations in plasma physics, first, according to the periodic initial value problem of the equations, a semi-discrete Fourier spectral scheme is constructed in the closed region of [0, T]. Second, the conservative property of the semi-discrete spectral scheme is proved. And at last, the conservative property is used to obtain the priori estimate of approximate solution and the existence of global solution for Zakharov equations.

Keywords Zakharov equations; Fourier spectral scheme; global solution; priori estimate

0 引言

本文考虑等离子物理学中出现的一维 Zakharov 方程组[1]的周期初边值问题:

$$iE_t+E_{xx}=NE \tag{1}$$

$$N_{tt}-N_{xx}=(|E|^2)_{xx} \tag{2}$$

$$E(x,0)=E^0(x) \quad N(x,0)=N^0(x) \quad N_t(x,0)=N^1(x) \tag{3}$$

$$E(x+L,t)=E(x,t) \quad N(x+L,t)=N(x,t) \tag{4}$$

其中,未知复值函数 $E(x,t)$ 为高频电场的包络波解;$N(x,t)$ 为未知实值函数,是离子数密度在平衡态附近的扰动。由于此方程是一个偏微分方程组,其解析解无法求出,因此要寻找一种适合的离散方法来求解。1979 年,Sulem 等[2]对一维 Zakharov 方程组弱解的存在性进行了研究;1992 年 Glassey[3],1995 年 Chang[4]利用差分法对一维 Zakharov 方程组进行研究,并且验证了所给出的格式具有守恒性质,其收敛阶达到 $O(h^2)$;1996 年 Zhang,向新民[5-6]利用 Fourier 拟谱方法对 Zakharov 方程组进行了误差估计。本文主要利用 Fourier 谱方法[7]建立 Zakhrov 方程组的半离散格式,并对格式进行先验估计,研究整体解的存在性。

1 符号及引理

设 $I=[0,L]$,$p\geqslant 1$,N 为正整数,$L^p(I)$ 为 I 上所有 p 次幂 Lebesgue 可积的函数全体,$H_p^m(I)$ 为以 L 为周期的 m 阶

收稿日期:2011-08-10;修回日期:2011-10-26
基金项目:黑龙江省教育厅科研项目(12513081)
作者简介:孙璐,讲师,研究方向为微分方程数值解法,电子信箱:adams_lulu@126.com

Sobolev 空间,$L^\infty(I)$为在 I 上本性有界的函数全体,其范数简记为 $\|\varphi\|_\infty$,设 $E(x,t)$为复值函数,$N(x,t)$为实值函数。

定义 1[7]($L^p(I)$范数)　$\|\varphi\|_{L^p}=\left(\int_0^L|p|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$

定义 2[7]($H_p^m(I)$范数)　$\|\varphi\|_m=\left(\sum_{k=0}^{m}\int_0^L\left|\frac{\mathrm{d}^k\varphi}{\mathrm{d}x^k}\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$

定义 3[7]　$S_N=Span\left\{\sqrt{\frac{1}{L}\mathrm{e}^{\frac{i2kx}{L}}}\;\middle|\;|k|\leqslant N\right\}$

为了进行先验估计,引入如下引理:

引理 1[7](Sobolev 不等式)　对于 $\forall u\in H^1(I)$,有

$$\|u\|_\infty\equiv\sup_{0\leqslant x\leqslant L}|u(x)|\leqslant\|u\|^{\frac{1}{2}}\left(2|u|_1+\frac{1}{L}\|u\|\right)^{\frac{1}{2}}$$

2　半离散谱格式及其守恒性质

首先,构造问题(1)—(4)的半离散 Fourier 谱格式,即:求映射 $E_N(t),N_N(t),[0,T]\rightarrow S_N$ 使得

$$\mathrm{i}(E_{Nt},\chi)+(E_{Nxx},\chi)=(N_NE_N,\chi),\ \forall\chi\in S_N\tag{5}$$

$$(N_{Ntt},\chi)-(N_{Nxx},\chi)=(|E_N|^2_{xx},\chi),\ \forall\chi\in S_N\tag{6}$$

$$(E_N(0),\chi)=(E_0,\chi),(N_N(0),\chi)=(N_0,\chi),$$
$$(N_{Nt}(0),\chi)=(N_1,\chi),\ \forall\chi\in S_N\tag{7}$$

半离散 Fourier 谱格式(5)—(7)可看成为一个非线性常微分方程组的初值问题,由常微分方程组理论,其局部解存在。下面证明其整体解存在。

考虑位势问题:求 $u\in H_0^1(I)$,使得 $u_{xx}=N_{Nt}$。

对于半离散 Fourier 谱格式(5)—(7)的解 E_N,N_N,有如下定理:

定理 1　设 E_N,N_N 为半离散 Fourier 谱格式 (5)—(7)的解,则半离散 Fourier 谱格式(5)—(7)拥有下面两个守恒量:

$$\int_0^L|E_N|^2\mathrm{d}x=C\tag{8}$$

$$\int_0^L\left\{|E_{Nx}|^2+\frac{1}{2}(|u_x|^2+N_N^2)+N_N|E_N|^2\right\}\mathrm{d}x=C\tag{9}$$

证明　式(8)的证明:在式(5)中令 $\chi=\bar{E}_N$ 取虚部,得

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{i}\int_0^LE_{Nt}\bar{E}_N\mathrm{d}x+\mathrm{Im}\int_0^LE_{Nxx}\bar{E}_N\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\int_0^LN_NE_N\bar{E}_N\mathrm{d}x\tag{10}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|E_N|^2=(E_N\bar{E}_N)_t=E_{Nt}\bar{E}_N+\bar{E}_{Nt}E_N=2\mathrm{Re}(E_{Nt}\bar{E}_N)$$

考虑式(10)等号左端第一项,有

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{i}\int_0^LE_{Nt}\bar{E}_N\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\int_0^LE_{Nt}\bar{E}_N\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^L|E_N|^2_t\mathrm{d}x$$

式(10)等号左端第二项

$$\mathrm{Im}\int_0^LE_{Nxx}\bar{E}_N\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\int_0^L\bar{E}_{Nx}\mathrm{d}x=-\mathrm{Im}\int_0^L|E_{Nx}|^2\mathrm{d}x=0$$

式(10)等号右端

$$\mathrm{Im}\int_0^LN_NE_N\bar{E}_N\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\int_0^LN_N|E_N|^2\mathrm{d}x=0$$

从而有

$$\frac{1}{2}\int_0^L|E_N|^2_t\mathrm{d}x=0$$

即

$$\int_0^L|E_N|^2\mathrm{d}x=C$$

式(9)的证明:在式(5)中令 $\chi=\bar{E}_{Nt}$ 取实部,得

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{i}\left(\int_0^LE_{Nt}\bar{E}_{Nt}\mathrm{d}x\right)+\mathrm{Re}\int_0^LE_{Nxx}\bar{E}_{Nt}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\int_0^LN_NE_N\bar{E}_{Nt}\mathrm{d}x\tag{11}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|E_{Nx}|^2=(E_{Nx}\bar{E}_{Nx})_t=E_{Nxt}\bar{E}_{Nx}+\bar{E}_{Nxt}E_{Nx}=2\mathrm{Re}(E_{Nxt}\bar{E}_{Nx})$$

式(11)等号左端第一项

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{i}\left(\int_0^LE_{Nt}\bar{E}_{Nt}\mathrm{d}x\right)=\int_0^L|E_{Nt}|^2\mathrm{d}x=0$$

式(11)等号左端第二项

$$\mathrm{Re}\int_0^LE_{Nxx}\bar{E}_{Nt}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\left(-\int_0^LE_{Nx}\bar{E}_{Nxt}\mathrm{d}x\right)=$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|E_{Nx}|^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^L|E_{Nx}|^2_t\mathrm{d}x$$

式(11)等号右端

$$\mathrm{Re}\int_0^LN_NE_N\bar{E}_{Nt}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^LN_N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|E_N|^2=\frac{1}{2}\int_0^LN_N|E_N|^2_t\mathrm{d}x$$

从而

$$-\frac{1}{2}\int_0^L|E_{Nx}|^2_t\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^LN_N|E_N|^2_t\mathrm{d}x\tag{12}$$

对 N_N,由于 $u_{xx}=N_{Nt}$,在式(2)中令 $\chi=P_Nu$,得

$$\int_0^LN_{Ntt}P_Nu\mathrm{d}x-\int_0^LN_{Nxx}P_Nu\mathrm{d}x=\int_0^L|E_N|^2_{xx}P_Nu\mathrm{d}x\tag{13}$$

式(13)等号左端第一项

$$\int_0^LN_{Ntt}P_Nu\mathrm{d}x=\int_0^LN_{Ntt}u\mathrm{d}x=\int_0^Lu_{xxt}u\mathrm{d}x=-\int_0^Lu_{xt}u_x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^L(u_x^2)_t\mathrm{d}x$$

式(13)等号左端第二项

$$-\int_0^LN_{Nxx}P_Nu\mathrm{d}x=-\int_0^LN_{Nxx}u\mathrm{d}x=-\int_0^LN_Nu_{xx}\mathrm{d}x=$$
$$-\int_0^LN_NN_{Nt}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^L(N_N^2)_t\mathrm{d}x$$

式(13)等号右端

$$\int_0^L|E_N|^2_{xx}P_Nu\mathrm{d}x=\int_0^L|E_N|^2(P_Nu)_{xx}\mathrm{d}x=\int_0^L|E_N|^2P_Nu_{xx}\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^L|E_N|^2P_NN_{Nt}\mathrm{d}x=\int_0^L|E_N|^2N_{Nt}\mathrm{d}x$$

从而有

$$-\frac{1}{2}\int_0^L(u_x^2)_t\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^L(N_N^2)_t\mathrm{d}x=\int_0^L|E_N|^2N_{Nt}\mathrm{d}x\tag{14}$$

式(12)×2+式(14)整理即有

$$\int_0^L\left\{|E_{Nx}|^2+\frac{1}{2}(u_x^2+N_N^2)+|E_N|^2N_N\right\}\mathrm{d}x=C$$

证毕。

3 半离散 Fourier 谱格式解的存在性

定理 2 存在一个正常数 C,使得半离散 Fourier 谱格式(5)—(7)的解 E_N,N_N 满足:

$$\|E_N\|^2+|E_N|_1^2+|u|_1^2+\|N_N\|^2\leqslant C$$

进而有,

$$\|E_N\|_\infty\leqslant C$$

证明 考虑式(9)左端最后一项,有

$$\left|\int_0^L N_N|E_N|^2\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_0^L\left(\varepsilon N_N^2+\frac{1}{4\varepsilon}|E_N|^4\right)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\|N_N\|^2+\|E_N\|_{L_4}^4\right. \tag{15}$$

由引理 1 和式(8),有

$$\|E_N\|_{L_4}^4=\int_0^L|E_N|^2|E_N|^2\mathrm{d}x\leqslant\|E_N\|_\infty^2\int_0^L|E_N|^2\mathrm{d}x$$

$$=\|E_N\|_\infty^2\|E_N\|^2\leqslant\frac{1}{2}|E_N|_1^2+\frac{1}{2}(2C)^2\|E_N\|^2$$

$$=\frac{1}{2}|E_N|_1^2+C$$

由式(9)和式(15)可得

$$|E_N|_1^2+\frac{1}{2}|u|_1^2+\frac{1}{2}\|N_N\|^2\leqslant C+\left|\int_0^L N_N|E_N|^2\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}|E_N|_1^2+\frac{1}{4}\|N_N\|^2+C$$

从而有

$$\frac{1}{4}|E_N|_1^2+\frac{1}{4}\|N_N\|^2+\frac{1}{4}|u|_1^2\leqslant C$$

因此,

$$|E_N|_1^2+\|N_N\|^2+|u|_1^2\leqslant C$$

再由式(9),即得

$$\|E_N\|^2+|E_N|_1^2+\|N_N\|^2+|u|_1^2\leqslant C$$

证毕。

因此,$\|E_N\|^2\leqslant C,|E_N|_1^2\leqslant C$。进而,由引理 1 可得 $\|E_N\|_\infty\leqslant C$。再由一致有界性可知整体解存在。

4 结论

本文考虑到动力系统中的 Zakharov 方程组,由于其的解析解的表达形式无法求出,需要利用数值方法来求给定方程组的数值解,因此本文建立了半离散 Fourier 谱格式,而方程组近似解的适定性研究就成为重点。本文利用方程组解的守恒性质,对其进行先验估计,并验证其半离散 Fourier 谱格式解的存在性。这种方法可以推广到动力系统的其他偏微分方程组中。本文研究是在有限时间内进行讨论的,有关无限时间内的讨论还有待于进一步研究。

参考文献(References)

[1] Temam R. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1997: 1-255.

[2] Sulem C, Sulem P L. Regularity properties for the Zakharov equations [M]. Lecture Note in Phys, Berlin: Springer-Verlag, 1979: 123-149.

[3] Glassey R T. Convergence of an energy-preserving scheme for the Zakharov equations in one space dimension [J]. *Mathematics of Computation*, 1992, 58(197): 83-102.

[4] Chang Q S, Guo B L, Jiang H. Finite difference method for generalized Zakharov equations[J]. *Mathematics of Computation*, 1995, 64(210): 537-553.

[5] Zhang F Y, Xiang X M. The global error estimate of the pseudospectral method for a class of generalized Zakharov equations 1 [J]. *Journal of Heilongjiang University: Natural Science*, 1996, 13(2): 1-6.

[6] Zhang F Y, Xiang X M. The global error estimate of the pseudospectral method for a class of generalized Zakharov equations 2 [J]. *Journal of Heilongjiang University: Natural Science*, 1997, 14(3): 2-7.

[7] 向新民. 谱方法的数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
Xiang Xinmin. Numerical analysis of spectral methods [M]. Beijing: Science Press, 2000.

[8] Ma S Q, Chang Q S. Strange attractors on pseudospectral solutions for dissipative Zakharov equations[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2004, 24B (3): 321-336.

(责任编辑　马宇红,代丽)

·科学共同体介绍·

中国自然资源学会

中国自然资源学会 (China Society of Natural Resources)原名中国自然资源研究会,1980 年 9 月经中国科协批准成立,1993 年 2 月更名为中国自然资源学会。历届理事长分别为**侯学煜**、**孙鸿烈**、**石玉林**、**刘纪远**。

中国自然资源学会是由从事自然资源及相关学科的科学研究、工程技术、教育以及管理工作者,自愿组成并依法登记成立的全国性、学术性的法人团体,是中国科协所属的全国一级学会,是发展我国自然资源科技事业的重要社会力量。

中国自然资源学会现有会员 4000 余人,其中院士会员 13 人;团体会员单位 34 个;下设 14 个专业委员会、2 个工作委员会。学会还协助湖南省、湖北省、福建省、山东省、宁夏回族自治区等 5 个省(区)建立了省级自然资源学会。

中国自然资源学会主办《自然资源学报》、《应用基础与工程科学学报》、《资源科学》等学术期刊。

中国自然资源学会于 2009 年 10 月 9 日在上海召开第 6 次全国会员代表大会,选举**刘纪远**任理事长,**沈镭**任秘书长。

(责任编辑　徐子政(实习生),秦政)