

# 小型四轴飞行器动力学参数测定方法设计

王冬来, 吕强, 刘峰

装甲兵工程学院控制工程系, 北京 100072

**摘要** 针对四轴飞行器动力学模型参数测定的低成本与高精度难以兼顾的特点, 力求设计一种成本较低, 精度满足实际工程要求的参数测量装置。首先简化了飞行器旋翼转速与升力以及转速与反扭矩之间的关系, 根据刚体力学原理, 设计的测定装置实现了电机定子与测量平台的刚性连接, 将旋翼产生的升力和反扭矩分别以重力和力矩的形式表现出来。对测得数据进行拟合与分析, 得到旋翼的升力系数和反扭矩系数, 通过与相关数据对比, 证明所测参数精度满足控制精度要求; 而且整个参数测量过程简单, 成本低, 易于在工程中实现。

**关键词** 四轴飞行器; 参数测定; 升力系数; 反扭矩系数

**中图分类号** V271.4

**文献标识码** A

**doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2011.36.007

## Determination of Quadrotor Dynamic Parameters

WANG Donglai, LU Qiang, LIU Feng

Department of Control Engineering, Academy of Armored Force Engineering, Beijing 100072, China

**Abstract** A novel quadrotor parameter tester instrument has been designed to solve the problem that it is difficult to take into account the low cost and high precision of the tester instrument at the same time. At first, the relation model between rotor rolling velocity and thrust has been simplified, so it is with rotor rolling velocity and drag moment. Then the rigid joint between the tester instrument and the motor stator has been realized based on the theory of geostatics. Then the thrust of rotor was presented with the form of gravity, and the drag moment of rotor was presented with the form of moment. At last, the thrust coefficient and the drag coefficient were obtained by fitting and analyzing the experimentation data. In comparison with related data, the experimentation data shows that the precision of parameters have met the requirement of control. Further more, the ways and means of parameter determination are simple, the parameter tester instrument is cheap, and the realization of parameter determination in engineering is relatively easy.

**Keywords** quadrotor; parameter determination; thrust coefficient; drag coefficient

### 0 引言

近年来四轴飞行器的自主飞行控制成为新的研究热点。四轴飞行器是非线性、强耦合、多变量系统, 在实际飞行中设计调整其控制器存在很多危险, 通用方法是首先建立四轴飞行器的模型, 通过仿真方法获得控制器的参数, 再通过试验进行验证和调整。因此, 建模是整个飞控系统研究的基础。目前小型飞行器建模大多是根据多刚体理论建立运动方程<sup>[1]</sup>, 方程具有明确的物理意义。在建模过程中, 系统模型中存在未知动力学参数, 无论是利用风洞试验来测定, 或者是利用

扭矩传感器、电机测试装置等专用仪器测定, 都会大幅增加研究成本。针对这一问题, 本文根据多刚体理论, 立足于 X500-D 四轴飞行器, 基于其模型的动力学方程结构, 自行构造测量装置并对升力系数、反扭矩系数进行测定, 最后对所得参数的精度进行比对与验证。

### 1 四轴飞行器的数学模型分解

四轴飞行器有 6 个自由度, 而只有 4 个控制输入, 因此, 四轴飞行器的控制问题属于欠驱动控制问题<sup>[2]</sup>。根据文献[3]

收稿日期: 2011-12-06; 修回日期: 2011-12-13

作者简介: 王冬来, 博士研究生, 研究方向为现代控制理论和小型四旋翼飞行器控制, 电子信箱: aganaq@163.com; 吕强 (通信作者), 教授, 研究方向为现代控制理论和人工智能与小型飞行器控制, 电子信箱: qianglv@189.cn

—[4],四轴飞行器悬停状态下的动力学模型为

$$\begin{cases} \ddot{x}=u_x \frac{1}{m} U_1 \\ \ddot{y}=u_y \frac{1}{m} U_1 \\ \ddot{z}=g-(\cos\varphi\cos\theta) \frac{1}{m} U_1 \\ \dot{\varphi}=b_1 U_2 \\ \dot{\theta}=b_2 U_3 \\ \dot{\psi}=b_3 U_4 \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $x, y$  和  $z$  分别为飞行器在惯性坐标系下的位置坐标;  $\dot{x}, \dot{y}$  和  $\dot{z}$  分别为 3 个轴向上的线速度;  $\ddot{x}, \ddot{y}$  和  $\ddot{z}$  分别为 3 个轴向上的线加速度;  $m$  为飞行器的总质量;  $g$  为当地重力加速度;  $\varphi, \theta$  和  $\psi$  分别为惯性坐标系下的滚转角、俯仰角和偏航角;  $\dot{\varphi}, \dot{\theta}$  和  $\dot{\psi}$  分别为相应的角速度;  $\ddot{\varphi}, \ddot{\theta}$  和  $\ddot{\psi}$  分别为相应的角加速度;  $U_1$  为机体坐标系下 4 个旋翼提供的总的垂直机身平面的升力;  $U_2, U_3, U_4$  分别为飞行器的滚转力矩、俯仰力矩和偏航力矩;  $u_x = \cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi, u_y = \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi; b_1 = \frac{l}{I_{xx}}, b_2 = \frac{l}{I_{yy}}, b_3 = \frac{l}{I_{zz}}, I_{xx}, I_{yy}$  和  $I_{zz}$  分别为围绕  $x, y$  和  $z$  轴的转动惯量;  $l$  为臂长即旋翼中心到飞行器重心的水平距离。

$$\begin{cases} U_1=T_1+T_2+T_3+T_4 \\ U_2=T_4-T_2 \\ U_3=T_1-T_3 \\ U_4=-\tau_1+\tau_2-\tau_3+\tau_4 \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $U=[U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^T$  为系统输入向量;  $T_i$  和  $\tau_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 分别为 4 个旋翼产生的升力和反扭矩。

## 2 飞行器控制系统结构

四轴飞行器悬停姿态通过不断调节 4 个电机的转速实现。首先由主控计算机基于飞行器数学模型和控制算法得出需要输入的  $U_1, U_2, U_3, U_4$ , 然后根据旋翼升力与转速之间的关系以及反扭矩与转速之间的关系<sup>[5]</sup>, 进一步解算出所需的 4 个电机转速。升力与转速的关系以及反扭矩与转速的关系为

$$\begin{cases} T=C_T \rho A R^2 \Omega^2 \\ \tau=C_\tau \rho A R^3 \Omega^2 \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $C_T$  和  $C_\tau$  是由旋翼姿态决定的系数, 在悬停姿态下为常数;  $\rho$  为空气密度;  $A$  为桨叶面积;  $\Omega$  为旋翼转速;  $R$  为旋翼半径。式(3)可进一步简化为

$$\begin{cases} T=b\Omega^2 \\ \tau=d\Omega^2 \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $b=C_T \rho A R^2, d=C_\tau \rho A R^3, b$  为旋翼的升力系数,  $d$  为反扭矩系数。因此, 实现对飞行器的悬停控制, 需要设计测试装置, 采集试验数据分析得到  $b$  和  $d$ 。进而式(2)可表示为

$$\begin{cases} U_1=b(\Omega_1^2+\Omega_2^2+\Omega_3^2+\Omega_4^2) \\ U_2=b(\Omega_4^2-\Omega_2^2) \\ U_3=b(\Omega_1^2-\Omega_3^2) \\ U_4=d(-\Omega_1^2+\Omega_2^2-\Omega_3^2+\Omega_4^2) \end{cases} \quad (5)$$

为了实现对飞行器的姿态控制, 必须解算出电机应有的转速, 那么首先需要测定旋翼的升力系数和反扭矩系数。飞行器飞行控制系统如图 1 所示, 其中,  $\varphi_d, \theta_d, \psi_d$  和  $z_d$  分别为期望的滚转角、俯仰角、偏航角和高度。

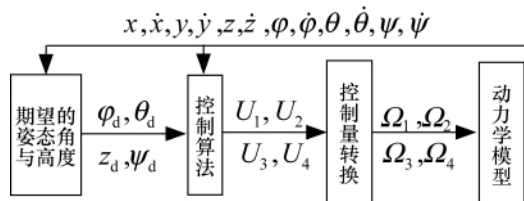


图 1 四轴飞行器控制系统结构

Fig. 1 Control system structure of quadrotor

## 3 升力系数与反扭矩系数测定系统设计

### 3.1 升力与旋翼转速关系的测量装置设计

首先构造一个“L”形钢架, 将其固定于水平且稳重的钢质平台上, 如图 2 所示, 从上到下依次为旋翼、第 1 层钢片、直流无刷电机、弹性联轴器、第 2 层钢片、增量式旋转编码器、钢质平台、精度为 0.1g 的电子秤。其中旋翼与电机固定在第 1 层钢片的上下两端, 弹性联轴器与旋转编码器固定在第 2 层钢片的上下两端, 弹性联轴器将电机的外转子与编码器的轴固性连接, 钢质平台平稳的放置在电子秤上。由 STM32103VB 单片机作为主控计算机, 给电机输入 PWM 信号, 电机带动旋翼旋转, 同时联轴器将电机外转子转速传递到旋转编码器。利用单片机测量编码器输出的脉冲宽度, 可得到电机转速; 利用电子秤测得的重力差得到旋翼产生的升力。

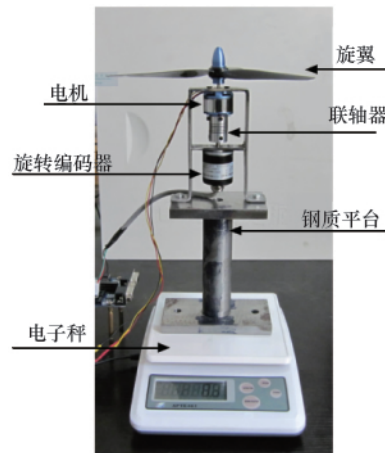


图 2 升力系数测量装置

Fig. 2 Thrust coefficient determination test device

### 3.2 反扭矩与旋翼转速关系的测量装置设计

设计转速-反扭矩测试装置,如图3和图4所示,将“H”形钢架连同旋翼、电机、弹性联轴器和增量式旋转编码器固定于刚性悬臂,悬臂通过轴承连接在厚重钢板的出轴上,悬臂可绕此轴自由旋转,此时电机轴、编码器转轴和轴承三者共轴。在悬臂的一端,刚体支撑杆垂直立于电子秤,此时悬臂保持水平作为力臂,给电机输入信号,电机转子带动旋翼逆时针转动,所产生的顺时针反扭矩由电机定子通过刚性悬臂传递到支撑点。根据刚体力矩公式

$$\tau = mgl \quad (6)$$

电子秤的测量值  $m$ 、重力加速度  $g$  和轴承中心到支撑点的长度  $l$  的乘积就是所求的反扭矩。后两项都是常数,只有电子秤测量值  $m$  随旋翼转速变化。

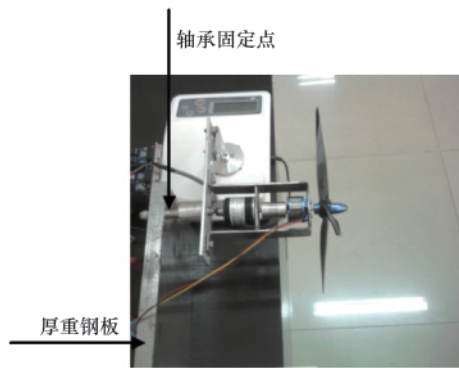


图3 反扭矩系数测试装置俯视图

Fig. 3 Planform of drag coefficient determination test device

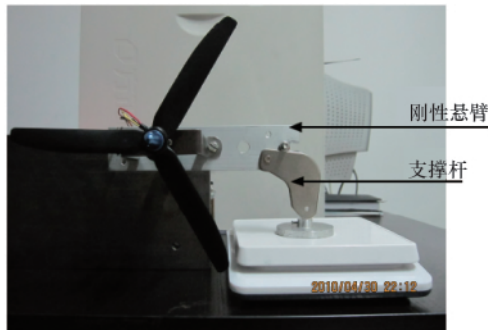


图4 反扭矩系数测试装置侧面图

Fig. 4 Side view of drag coefficient determination device

## 4 测试与验证

### 4.1 测试结果

利用转速-升力测试装置测定的电机转速与所产生的升力的数据如表1所示。

对旋翼转速的平方与升力进行一次拟合,二者关系为: $T(\Omega) = 5.8 \times 10^{-6} \Omega^2 - 0.06$ 。为了简化模型,舍弃常数项,并对  $b$  进一步筛选,取  $b = 5.6 \times 10^{-6}$ 。比较电机实际响应结果与拟合曲线  $T_{fit}(\Omega) = b\Omega^2 = 5.6 \times 10^{-6} \Omega^2$ ,如图5所示。

表1 电机转速与升力数据

Table 1 Motor speed and thrust data

脉宽调制 PWM	电机转速/(rad·s <sup>-1</sup> )	升力/N
16	134	0.0764
48	244	0.2989
80	344	0.6125
112	446	1.0878
144	532	1.5778
176	618	2.1070
208	712	2.8420
240	781	3.4888

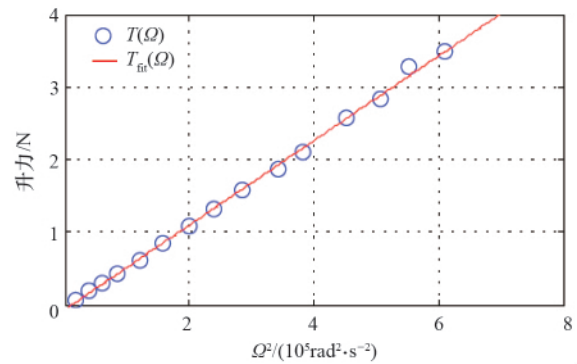


图5 旋翼产生升力与转速的平方的关系及其拟合曲线

Fig. 5 Relation between thrust and rotor speed, and the fitting curve of  $T_{fit}(\Omega)$

从图5可以看出,曲线  $T_{fit}(\Omega)$  与电机响应数据基本吻合。且在实际飞行中,转速大多处于 400—800rad/s,这一段拟合的精度较高,因此,  $b$  的取值是合理的。

利用转速-反扭矩测试装置测定的旋翼转速与所产生的反扭矩的数据如表2所示。

表2 旋翼转速与反扭矩数据

Table 2 Rotor speed and drag moment data

PWM	电机转速/(rad·s <sup>-1</sup> )	反扭矩/(N·m)
16	137	0.0014
48	249	0.0035
80	350	0.0071
112	452	0.0118
144	550	0.0188
176	623	0.0235
208	714	0.0341
240	784	0.0412

对旋翼转速的平方与反扭矩进行一次拟合,得  $\tau(\Omega) = 6.7 \times 10^{-8} \Omega^2 - 0.001$ 。舍弃常数项,并且对反扭矩系数  $d$  进行筛选,得  $d = 6.5 \times 10^{-8}$ 。因此,最终所得拟合曲线为  $\tau_{fit}(\Omega) = 6.5 \times 10^{-8} \Omega^2$ ,如图6所示。

从图 6 可以看出,拟合曲线与电机实际响应存在有限误差。由于反扭矩系数的数量级很小,所以在实际控制中,此误差的影响并不明显。

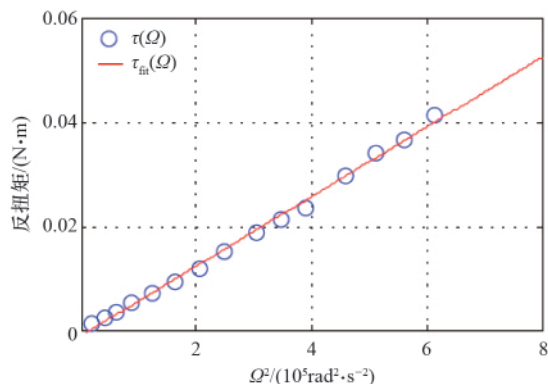


图 6 旋翼产生的反扭矩与转速的响应关系及其拟合曲线  
Fig. 6 Relation between drag moment and rotor speed, and the fitting curve of  $\tau_m(\Omega)$

#### 4.2 测试数据的验证

由式(3)和式(5)可知,旋翼的升力系数与反扭矩系数取决于旋翼的构造与形状,同一型号的旋翼参数应该是一致的。为了验证构建的测试装置所测定的数据精度是否可靠,

表 3 所测数据与文献中数据的对比

Table 3 Contrast of measured parameters and the data in other papers

电机	升力系数 $b/10^{-5}$	扭力系数 $d/10^{-7}$
Tower Pro 2410-09	1.61733	4.41438
DT-700	1.75822	3.33411
DT-750	1.77118	3.28183
X2208	1.70567	3.42081

选用 GWS1060 三叶桨进行测试,结果如表 3 所示。表 3 中前 3 行为文献[6]提供的数据,最后 1 行为本文测得的数据。

由表 3 可以看出,该装置得到的结果和文献[6]的数据基本一致。这也佐证了测定的 X-500D 四轴飞行器参数精度是可靠的,所设计的测试装置是有效的。

#### 5 结论

本文设计并研制了测定飞行器升力系数和反扭矩系数的试验装置,避开了需要借助昂贵的风洞试验或是需要购置高成本的专业器械测量的传统飞行器建模方法。通过与资料数据进行比对,验证了所测参数的精度是可靠的,设计的试验装置是有效的。同时整个参数测定过程简单易行,成本低,所建模型易于工程实现。

#### 参考文献 (References)

- [1] Konstantin K, Carsten D. Mechanical model and control of an autonomous small sized helicopter with a stiff main rotor[C]//Proceedings of 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots Systems. Sandal, Japan: IEEE, 2004: 2469-2474.
- [2] 聂博文, 马宏绪, 王剑, 等. 微小型四旋翼飞行器的研究现状与关键技术[J]. 电光与控制, 2007, 14(6): 113-117.  
Nie Bowen, Ma Hongxu, Wang Jian, et al. *Electronics Optics & Control*, 2007, 14(6): 113-117.
- [3] 刘志军, 吕强, 王冬来. 小型四旋翼直升机的建模与仿真控制[J]. 计算机仿真, 2010, 27(7): 18-20.  
Liu Zhijun, Lu Qiang, Wang Donglai. *Computer Simulation*, 2010, 27(7): 18-20.
- [4] Tommaso B. Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter[D]. Lund: Lund University, 2008.
- [5] Menno Wierema B. Sc. Design, implementation and flight test of indoor navigation and control system for a quadrotor UAV [D]. Delft, Holland: Delft University of Technology, 2008.
- [6] Motor-test[EB/OL]. [2011-12-10]. <http://www.radrotary.com/motor-test.xls>.

(责任编辑 安莹, 刘志远)

·学术动态·

## “第十七届全国小儿心血管病学术会议”征文



由中华医学会儿科学分会心血管学组主办的“第十七届全国小儿心血管病学术会议”计划于 2012 年 6 月 1 日在广州举行。

征文范围:先天性心脏病、心律失常、心肌炎、心肌病、心包疾病、感染性心内膜炎、川崎病、功能性心血管疾病、晕厥、肺动脉高压、高血压、血脂紊乱、心力衰竭、风湿性心脏病等。

全文截止日期:2011 年 12 月 31 日。

电 话:010-83573209

电子信箱:pedcardiology@126.com

通信地址:北京市西城区西安门大街 1 号北京大学第一医院儿科办公室 (100034)

会议网站:[http://www.cma.org.cn/index/indexxshd/index\\_zwtz/2011922/1316660618117\\_1.html](http://www.cma.org.cn/index/indexxshd/index_zwtz/2011922/1316660618117_1.html)