

三对角四阶紧致差分格式的优化和初步应用

刘晓,王小光,李文强

河南师范大学数学与信息科学学院,河南新乡 453007

摘要 提高数值解的精度和分辨率,有助于更精确地求解日趋复杂的工程问题。本文依据差分格式的伪波数应该在尽可能大的波数范围内接近物理波数的思想,构造了满足四阶精度的具有高分辨率的三对角紧致差分格式。一方面,它可以与近些年发展的求解(循环)三对角方程组的高效算法相结合,以更高的分辨率、更小的计算量来计算一阶导数;另一方面,与传统格式相比,该格式的最大精确求解波数可以达到 2.5761,大于传统格式的 1.13097。因此,优化格式更适合模拟小尺度波动。数值计算结果表明:(1)虽然优化格式仍然是四阶精度,但要比传统四阶紧致差分格式的计算误差小,尤其对于小尺度波动,优化格式的计算误差会更小;(2)对于行波问题,优化格式能够更加准确地模拟波动的传播行为,其优势也更加明显。理论分析和数值算例的比较结果均表明,优化的紧致差分格式更适合求解小尺度波动问题。

关键词 紧致格式;高精度;高分辨率;小尺度波动

中图分类号 O241.6

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2011.34.002

Optimization of Fourth-order Compact Finite Difference Triangular Scheme and Its Initial Applications

LIU Xiao, WANG Xiaoguang, LI Wenqiang

College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan Province, China

Abstract In order to improve the precision and resolution of a numerical scheme used to solve the complex scientific and engineering problems, it is necessary for difference scheme to resolve wave numbers with as high precision as possible. Based on this idea, a triangular compact finite difference scheme with fourth-order accuracy and high resolution is proposed. On one hand, this compact scheme could be efficiently solved by the algorithms which are recently developed to solve the (cyclic) triangular equations, therefore, the first derivation could be efficiently calculated by the optimized compact difference scheme with higher resolution and less amount of calculation; on the other hand, it has a maximum accuracy wave number of 2.5761, comparing with that of 1.13097 by using traditional schemes. In short, the optimized compact difference scheme is more appropriate to simulate small scale fluctuations in fluid dynamics. Numerical computation experiments illustrate that (1) even though the optimized scheme is still fourth-order, it has a smaller error than that of traditional fourth-order compact finite difference, especially for the small scale fluctuations; (2) for the problems involving traveling wave, the optimized scheme is able to simulate wave propagation behavior more accurately. Both the theoretical analysis and numerical experiments indicate that the optimized compact finite difference scheme is more appropriate to resolve the problems with small scale fluctuations.

Keywords compact scheme; high precision; high resolution; small scale fluctuation

0 引言

在求解日趋复杂的工程问题时,低阶精度差分格式已经不能完全满足准确求解问题的要求,很多问题要求数值方法

对流场特性有更强的模拟能力^[1-3],这就需要通过提高数值解的精度和分辨能力。提高分辨能力既可通过网格技术(如逐步加密网格或改变网格布局)实现^[4-6],也可通过提高数值方法的

收稿日期:2011-08-08;修回日期:2011-10-30

基金项目:国家自然科学基金项目(41004063);河南省教育厅自然科学研究计划项目(2010B110014);河南师范大学校级青年教师培养资助计划项目

作者简介:刘晓,副教授,研究方向为计算数学、大气动力学,电子信箱:xliu@spaceweather.ac.cn

精度实现^[7-10]。

提高数值解的精度和分辨率需要同时考虑高分辨率的空间离散和时间离散。对于应用较广泛的差分方法主要基于两种思想对空间导数进行离散:传统有限差分方法和紧致有限差分方法。传统有限差分格式是直接通过网格点上函数值的线性组合表示一阶或二阶导数,例如能达到四阶精度的七点中心差分的DRP(Dispersion-Relation-Preserving)格式^[11-12],该差分格式能够很好地保持原微分方程的波传播和色散特性^[13],这种方法的一个重要特点就是随着数值精度的提高,网格基架点也必须增加,这为构造和应用数值边界条件带来了一定难度^[14]。紧致有限差分格式是利用网格点上函数值的线性组合表示一阶或二阶导数的线性组合,是一种通过使用较少的基架点便能实现高精度计算的格式^[15]。例如,1992年Lele^[16]提出的应用范围比较广泛的紧致差分格式,和普通差分格式相比,紧致差分格式能在相同的节点上构造出更高精度的格式,适合湍流的直接数值模拟;Kim和Lee^[17]利用DRP格式的基本思想在Lele格式的基础上获得了优化的紧致差分格式,但不能满足渐进稳定性的要求^[18];傅德熏等^[19]提出了高精度迎风紧致差分格式及具有任意阶精度的超紧致差分格式;王强等^[20]采用对称性紧致差分格式对超声速自由剪切流空间稳定性问题进行了多方面参数研究,部分计算结果同已有理论和实验结论相吻合;柳占新等^[21]提出的紧致滤波格式可以消除数值伪波,优化了五对角紧致滤波格式。

必须指出的是,在计算流体力学方面,流体从层流向湍流的演化过程正是一个尺度逐渐变小、高频波动逐渐增强的过程。本文也正是基于此应用背景建立高分辨率的格式,期望能够在保证一定精度的前提下,获得对高频波动分辨能力更好的数值格式,但会牺牲一定的计算量。发展更高精度的数值格式也是计算流体力学的研究重点之一。

本文在Lele提出的紧致差分格式的基础上寻找满足四阶精度的具有高分辨率的三对角形式的紧致差分格式,以满足求解多尺度波动,尤其是求解小尺度波动问题的需要;近年来,李文强等^[22-23]发展了一系列求解三对角/循环三对角方程的相对高效的算法,为三对角紧致差分格式的应用奠定了基础。本文还通过比较优化的三对角紧致差分格式与普通的满足四阶精度的三对角形式的紧致差分格式^[24]的计算误差和分辨率,说明优化的紧致差分格式在求解小尺度波动问题上的一些优势。

1 优化紧致差分格式的构造

1.1 紧致差分格式

Lele提出的广义紧致差分格式为^[16]

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (1)$$

其中, f' 为函数 f 的空间一阶导数; h 和 i 分别为网格步长和网格标号; α, β, a, b, c 为常系数。对式(1)进行Fourier分析,

可得到修正波数为

$$\omega'(\omega) = \frac{a \sin \omega + (b/2) \sin 2\omega + (c/3) \sin 3\omega}{1 + 2\alpha \cos \omega + 2\beta \cos 2\omega} \quad (2)$$

其中, $\omega = k \cdot h$ 为量化的波数,可称为原波数, k 为物理波数, ω' 为修正波数。修正波数和原波数之间的偏差是产生数值色散误差的主要原因^[12-13, 16, 21]。为了提高紧致差分格式的精度, ω' 就应该在较大的波数范围内充分接近 ω ,这也是对紧致差分格式进行优化以提高分辨率的一个基本原则^[16, 25]。本文将利用这个原则对差分格式进行优化,以达到提高分辨率、减小计算误差的目的。

为了衡量 ω' 和 ω 的近似程度,通常采用下面的相对误差准则计算精确求解波数的区间^[16, 25]:

$$\frac{|\omega' - \omega|}{\omega} \leq \varepsilon \quad (3)$$

其中, ε 表示相对允许误差。满足式(3)的 ω 的范围 $[0, \omega_{\max}]$ 称为精确求解度量波数区间^[25],范围越大差分格式的分辨率越高,并且分辨率 $\omega_f = \omega_{\max} / \pi$ 。

1.2 优化的紧致差分格式

本节首先对优化紧致差分格式的构造过程进行详细描述,然后与一般紧致格式进行计算精度和分辨率的比较。

对于三对角四阶紧致差分格式而言,式(1)中的系数 $\beta = 0$,并且其他系数满足下面的等式关系,才能保证格式达到四阶精度:

$$a + b + c = 1 + 2\alpha \quad (4)$$

$$a + 2^2b + 3^2c = 2 \frac{3!}{2!} \alpha \quad (5)$$

在这里需要寻找的是满足式(3)的最大的 ω ,也就是说在一定允许误差条件下使 ω' 和 ω 重合的范围达到最大,即:可以根据修正波数的公式给出 α, a, b, c 4个参数满足的另外两个等式^[3],也就是 ω' 和 ω 重合时的 ω_1 和 ω_2 ,进而求解这4个参数,最终确定差分格式:

$$\omega'(\omega_1) = \omega_1 \quad (6)$$

$$\omega'(\omega_2) = \omega_2 \quad (7)$$

具体计算过程如下:

第1步 对于不同的 ω_1 和 ω_2 ,通过求解由(4)、(5)、(6)、(7)4个方程构成的方程组可以得到不同的 α, a, b, c 的参数组合。

第2步 把第1步的结果代入式(2),计算这种差分格式对应的修正波数。

第3步 根据式(3)计算此种差分格式的精确求解度量波数区间,区间越大,格式的分辨率就越高。

经过多次试验,最终可以得出结论,当 $\omega_1 = 2.1, \omega_2 = 2.5$ 时分辨率最高,即为最优的三对角四阶紧致差分格式,精确求解波数的区间为 $[0, 2.5761]$,这时格式对应的参数为: $\alpha = 0.4468, \beta = 0, a = 1.5410, b = 0.4067, c = -0.0541$ 。

1.3 与一般格式分辨率的比较

著名的四阶精度对称紧致型逼近式为^[24]

$$\frac{1}{4}u'_{j+1} + u'_j + \frac{1}{4}u'_{j-1} = \frac{3}{2} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \quad (8)$$

称为格式 1, 对比 Lele 的紧致差分格式的一般形式(式(1))可以知道, 此时一般紧致差分格式的各个系数参量的数值为: $\alpha=1/4, \beta=0, a=3/2, b=0, c=0$ 。表 1 给出了最优的三对角四阶紧致差分格式(称为格式 2)与这里的格式 1 的系数。

表 1 紧致差分格式的系数

Table 1 Coefficients of compact difference scheme

系数	a	b	c	α	β
格式 1	3/2	0	0	1/4	0
格式 2	1.5410	0.4067	-0.054	0.4468	0

根据式(2)分别计算这两种紧致差分格式的修正波数, 其图形如图 1 所示。

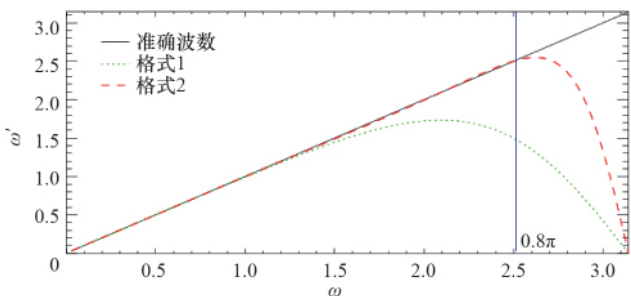


图 1 修正波数比较

Fig. 1 Comparison of modified wave numbers for different scheme

从图 1 可以看出, 格式 2 的精确求解度量区间要大于格式 1, 在一定的度量波数范围内, 格式 2 能更好地模拟问题。给定一个容许误差 0.01, 根据式(3), 可以算出各自的精确求解度量区间, 格式 1 为 $[0, 1.1310]$, 格式 2 为 $[0, 2.5761]$ 。因此, 不管是从度量波数的图形还是从精确求解度量区间上比较, 都能得出结论: 格式 2 的分辨率比格式 1 的分辨率高, 尤其是在区间 $[1.1310, 2.5761]$ 内, 格式 2 的分辨能力更好。

2 数值算例

2.1 精度的比较

本节主要验证在数值计算中数值格式实际体现出来的精度。用 q 表示数值格式实际体现的精度, 在知道准确解的情况下, 计算精度的公式为^[26]

$$q = \frac{1}{\ln 2} \left[\ln \left(\frac{u_{2h} - u}{u_h - u} \right) \right] \quad (9)$$

其中, u_h 表示步长为 h 时的数值解; u_{2h} 表示步长为 $2h$ 时的数值解; u 表示网格点数为 n 时的准确解。根据式(9), 用如下算例验证前面数值格式的精度。

算例 1 在周期边界条件下, 利用四阶紧致格式来计算函数 $f(x) = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的一阶导函数, 其精确解为 $f'(x) = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 。其中用到文献[22]中发展的求解循环三对角方程

组的追赶法。计算误差和精度如表 2 所示。

表 2 两种格式在不同网格剖分下的误差以及计算精度
Table 2 Error and computational accuracy of those two schemes with different grids

格点数	误差		计算精度	
	格式 1	格式 2	格式 1	格式 2
10	2.0292×10^{-3}	1.0881×10^{-3}	—	—
20	1.7315×10^{-4}	1.0568×10^{-4}	4.0127	3.9644
30	4.1617×10^{-5}	2.6013×10^{-5}	4.0056	3.9705
40	1.5170×10^{-6}	9.5740×10^{-6}	4.0031	3.9449
50	6.9399×10^{-6}	4.4105×10^{-6}	4.0020	3.8831

在计算阶数的公式中需要计算步长为 $2h$ 和 h 时的误差, 表 2 中用二范数衡量误差并计算精度。表 2 计算结果表明, 这两种格式在实际计算的时候都能够达到四阶精度; 并且, 在同样的网格剖分下, 格式 2 的误差比格式 1 的误差要小一些。

2.2 分辨率的比较

算例 2 求解正弦函数 $y = \sin kx, x \in [0, \pi]$ 的一阶导数。其准确解为 $y' = k \cos kx$ 。

目的: 用格式 1 和格式 2 计算周期函数的导函数, 比较这两种格式在区间 $[1.13097, 2.5761]$ 内的分辨效果。

为了保证 ω 的范围是 $[1.13097, 2.5761]$, 需要确定 k 使得 $1.13097 < \omega = k \cdot h < 2.5761$ 。对于已经剖分好的网格来说, $h = \pi/N$ 已经确定, 可通过变化 k 值使得 $k \cdot h$ 在区间 $[1.13097, 2.5761]$ 之内。比如, 区间 $[0, \pi]$ 被分为 50 等份, 即 $N=50$, 则 $h = \pi/50$, 则 k 的范围为 $(18, 41)$ 。为了方便计算, 在这里将 k 取值为 40, 即, 此时求解的是原函数 $y = \sin 40x, x \in [0, \pi]$ 的导函数。

由于这里的原函数是一个周期函数, 并且格式 1 和格式 2 都是三对角四阶紧致差分格式, 所以在求解导函数的过程中需要求解一个循环三对角线性方程组, 这里用文献[24]中的追赶法求解这个问题。

两种格式求导函数的计算结果如图 2 所示。

从误差函数图形可以看出, 格式 1 求导函数时误差比格式 2 的误差要大得多, 这说明在区间 $[1.13097, 2.5761]$ 之内, 格式 1 比格式 2 有更好的模拟能力, 这与理论分析结果相吻合。在这种情况下: 格式 1 的二范数误差为 82.1785, 格式 2 的二范数误差为 0.3430。从二范数误差也可以看出, 格式 2 与理论解几乎完全重合。

算例 3 已知^[25]:

$$y = \left[1 + 3 \sin \left[\frac{2\pi(x-40h)}{3h} \right] \right] \cdot \exp \left[-\ln(2) \left(\frac{x-40h}{8h} \right)^2 \right], x \in [0, 1]$$

求解: y' 。

已知导函数的解析解为

$$y' = \frac{2\pi}{h} \cos \left(\frac{2\pi(x-40h)}{3h} \right) e^{-\ln 2 \left(\frac{x-40h}{8h} \right)^2}$$

$$\ln 2 \left(\frac{x-40h}{3h} \right) \left[1 + 3 \sin \left(\frac{2\pi(x-40h)}{3h} \right) \right] e^{-\ln 2 \left(\frac{x-40h}{3h} \right)^2}$$

根据参考文献[25]计算的原函数的归一化功率谱密度结果,知原函数的最大度量波数接近于 $0.8\pi=2.51327$,正好在区间 $[1.13097, 2.5761]$ 内,这个位置正好位于格式2的精确求解度量区间内,而在格式1精确求解度量区间外,如图1所示。所以用格式1进行导数计算时的误差应该比格式2的误差大,下面用实际的数值误差验证一下这个结论。

与算例2不同,算例3不是一个周期函数,所以在边界处

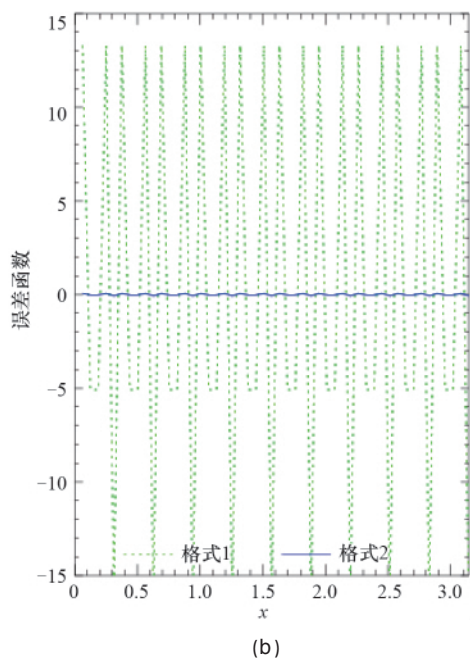
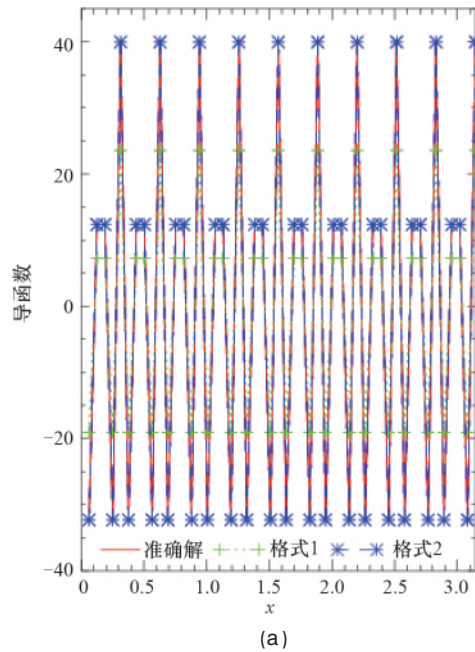


图2 算例2的导函数(a)和误差函数(b)
Fig. 2 Function of the first derivative (a) and its errors (b) for case 2

不能直接求解循环三对角方程组来计算边界点处的导数值,考虑用文献[23]中多项式拟合数值边界条件的方法构造边界格式,在这里边界处用具有二阶精度的边界格式,最终需要求解的是一个三对角方程组,用一般的追赶法即可。

当 $h=0.01$ 时,格式1和格式2计算的导函数和误差函数图形如图3所示。

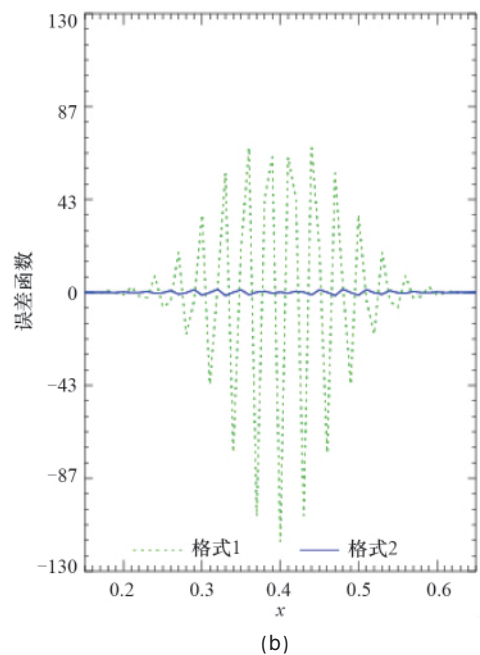
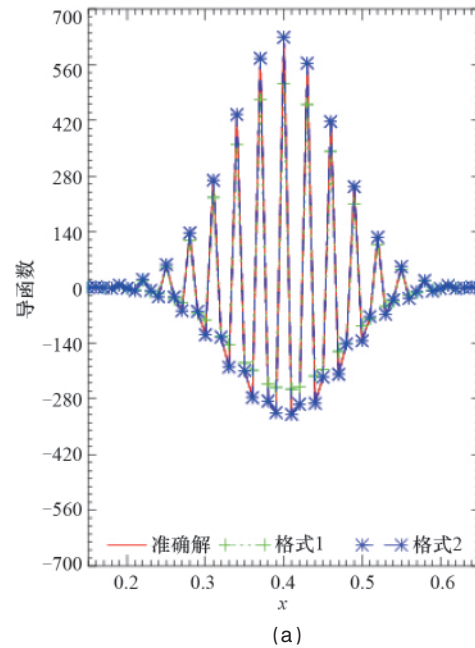
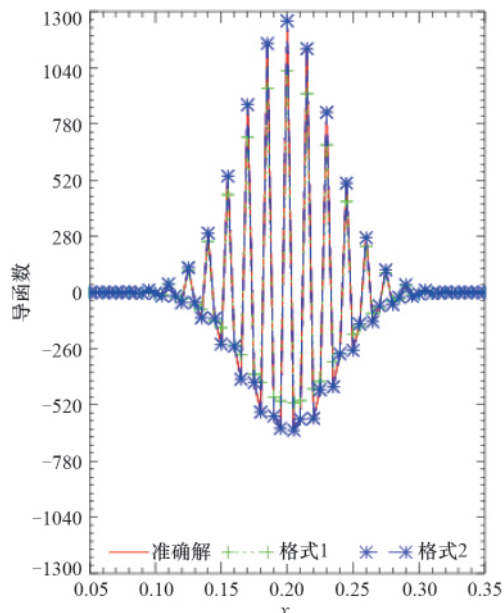


图3 $h=0.01$ 时算例3的导函数(a)和误差函数(b)图形
Fig. 3 Function of the first derivative (a) and its errors (b) when $h=0.01$

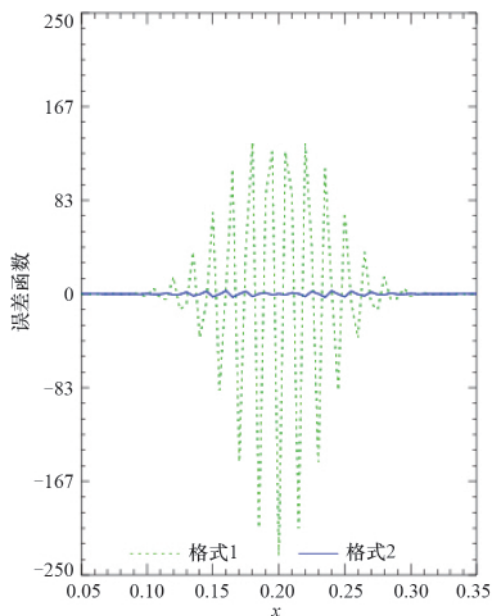
从导函数以及误差函数的图形可以看出,格式2的误差确实比格式1的误差要小,格式1的无穷范数误差为116.24,格式2的无穷范数误差为23.04。格式2的无穷范数对于导

函数整体范围[-400,700]而言,是一个比较小的数,所以格式2也能很好地模拟该问题。

继续增大网格剖分点数,当 $h=0.005$ 时,计算结果如图4所示。



(a)



(b)

图4 $h=0.005$ 时算例3的导函数(a)和误差函数(b)图形

Fig. 4 Function of first derivative (a) and its error (b) when $h=0.005$

从误差函数图形可以明显地看到,格式1的误差比格式2的误差大,此时格式1的无穷范数误差为232.481,格式2的无穷范数误差为46.086。同样,46.086对于范围[-750,1250]而言也很小,所以在这个度量区间范围内,格式2较格式1

有更好的分辨能力。

2.3 行波解的误差比较

上面只是讨论了紧致差分格式求导时在小尺度波动上的分辨问题,下面考虑这两种格式的计算误差随时间变化的规律。

算例4 一维波对流的控制方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in [0, 1], t \geq 0$$

初始边界条件为^[25]

$$\begin{cases} u(x, t=0) = \left\{ 1 + 3 \sin \left[\frac{2\pi(x-40h)}{3h} \right] \right\} \cdot \exp \left[-\ln 2 \left(\frac{x-40h}{8h} \right)^2 \right] \\ u(x=0, t) = 0 \end{cases}$$

由数学物理方程知识,得波动方程的解析解为

$$u(x, t) = \left\{ 1 + 3 \sin \left[\frac{2\pi(x-t-40h)}{3h} \right] \right\} \cdot \exp \left[-\ln 2 \left(\frac{x-t-40h}{8h} \right)^2 \right]$$

首先将空间平分为100等份,即 $h=0.01$,为了减小时间积分误差对结果的影响,可以将柯朗数 CFL 取为0.05,即 $\tau = CFL \cdot h$ 。

空间离散利用2.2节中算例2的过程进行,时间积分可采用LDDRK (Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta)方法^[28]。LDDRK方法具有低色散和低耗散特性,可以减小计算误差,增强计算的高效性,并且需要较小的存储空间。计算中所有量都被标准化,空间以 h 为单位,时间以 τ 为单位。各时刻的计算结果对比如图5所示。

图5给出了不同差分格式计算的波动结果(图5(a),5(c)和5(e))以及计算值和准确解之间的相对误差(图5(b),5(d)和5(f))在计算域内随时间的变化。从误差图形及各格式的无穷范数误差可以看出,格式1的误差比格式2的误差要小很多,即格式1比格式2有更好的模拟能力。从波动图形可以看出,格式2在波数范围[1.13097, 2.5761]内,属于慢型格式^[9],可以用群速度进行验证。

3 结论

本文根据伪波数尽可能在较大的范围内接近物理波数的思想,对三对角四阶紧致差分格式进行优化,构造了分辨率更高的四阶紧致差分格式(格式2)。该格式虽然仍是四阶精度,但其精确求解度量波数能达到2.5761。因此,从理论上讲,该格式对小尺度波动具有更好的分辨能力。与传统的四阶紧致差分格式(格式1)相比,虽然这两个格式具有相同的精度,但数值计算结果显示格式2具有如下优势:(1)在计算一阶导数时,格式2在计算小尺度波时的误差比格式1的误差小;(2)对于行波问题,格式2与LDDRK方法结合之后的计算误差明显小于格式1与LDDRK方法结合的计算误差。因此,理论分析和计算结果均表明,本文构造的优化的三对角四阶紧致差分格式能够更好地模拟小尺度波动。在后续的工作中,将用此格式来计算二维小尺度波动的算例,以检验此格式在计算二维问题时的有效性。

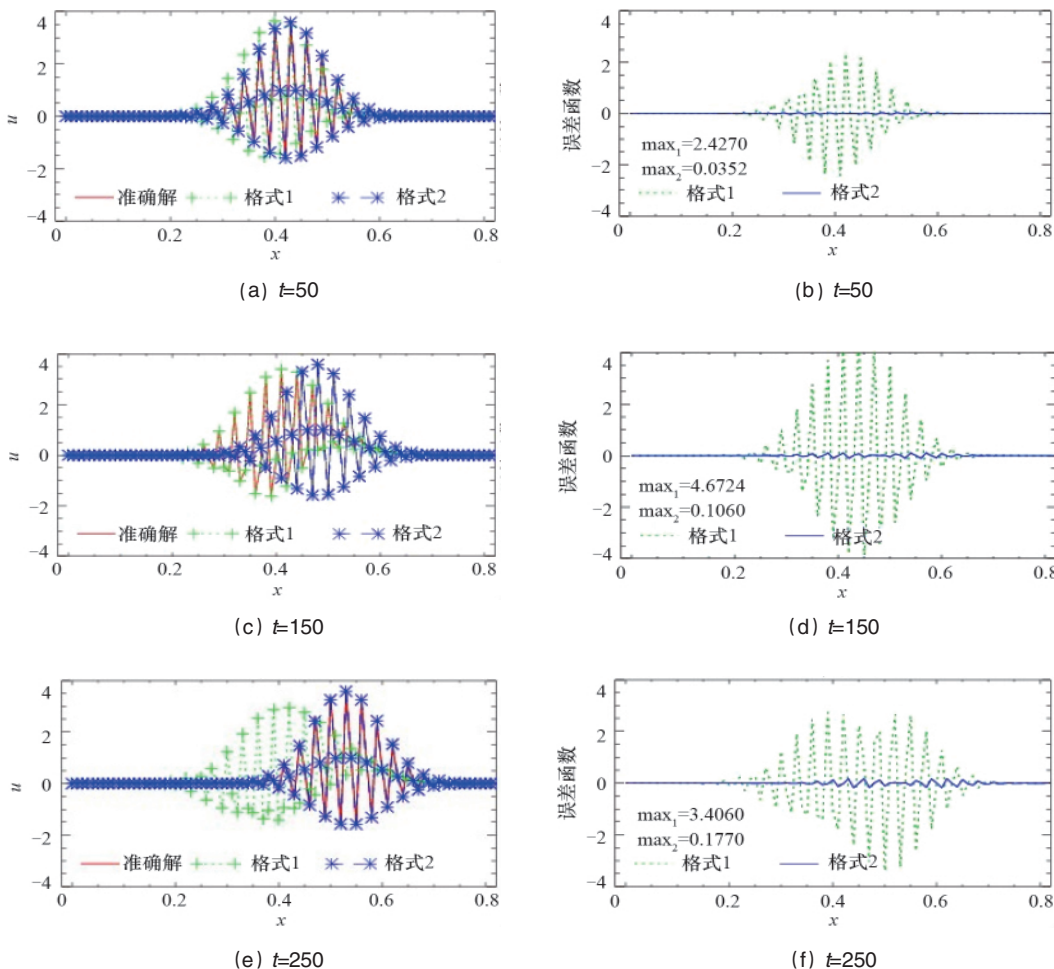


图 5 随时间变化的波动图形和误差函数图形
Fig. 5 Fluctuations and errors vs time

参考文献 (References)

[1] 胡国庆, 刘明宇, 傅德熏, 等. 轴对称射流气动声场的数值模拟 [J]. 计算物理, 2001, 18(3): 193-198.
Hu Guoqing, Liu Mingyu, Fu Dexun, et al. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2001, 18(3): 193-198.

[2] 季仲贞, 王斌, 曾庆存. 大气海洋环境数值模拟中的若干计算问题[J]. 气候与环境研究, 1999, 4(2): 135-151.
Ji Zhongzhen, Wang Bin, Zeng Qingcun. *Climatic and Environmental Research*, 1999, 4(2): 135-151.

[3] 沈孟育, 牛晓玲. 三点五阶优化广义紧致格式[J]. 空气动力学报, 2003, 21(4): 383-390.
Shen Mengyu, Niu Xiaoling. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2003, 21(4): 383-390.

[4] Li Z, Ma H, Zhou Y. A unifying method for outlier and change detection from data streams [C]//Proc of the 2006 Int'l Conf on Computational Intelligence and Security. New York: IEEE Press, 2006: 580-585.

[5] Cui H. Online outlier detection over data streams [D]. Simon: Fraser University, 2005.

[6] 李新亮, 马延文. 不可压 N-S 方程高效算法及二维槽道湍流分析[M]. 力学学报, 2001, 33(5): 577-587.
Li Xinliang, Ma Yanwen. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(5): 577-587.

[7] 王强, 傅德熏, 马延文. 不可压扰动方程高精度对称紧致差分数值解

法及应用[J]. 空气动力学报, 1999, 17(3): 292-298.
Wang Qiang, Fu Dexun, Ma Yanwen. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1999, 17(3): 292-298.

[8] 田振夫. 泊松方程的优化有限差分方法 [J]. 嘉应大学学报: 自然科学版, 1996(1): 6-9.
Tian Zhenfu. *Journal of Jiaying University: Natural Science Edition*, 1996(1): 6-9.

[9] Peyret R, Taylor T D. Computational methods for fluid flow [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

[10] Manohar R, Stephenson M. High order difference schemes for linear partial differential equations [J]. *SIAM J Sci Stat Comp*, 1984, 5: 69-77.

[11] Tam C K W, Webb J C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics [J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, 107(2): 262-281.

[12] 罗柏华. 用于波动方程计算的高阶精度紧致差分方法[J]. 上海大学学报: 自然科学版, 2009, 15(2): 134-141.
Luo Baihua. *Journal of Shanghai University: Natural Science Edition*, 2009, 15(2): 134-141.

[13] 杨爱玲, 谢翠丽, 陈康民. 气动声学直接数值模拟的空间差分格式分析[J]. 航空动力学报, 2004, 19(5): 630-635.
Yang Ailing, Xie Cuili, Chen Kangmin. *Journal of Aerospace Power*,

- 2004, 19(5): 630-635.
- [14] 王保国, 刘淑艳, 闫为革, 等. 高精度强紧致三点格式的构造及便捷条件的处理[J]. 北京理工大学学报, 2003, 23(1): 13-18.
Wang Baoguo, Liu Shuyan, Yan Weige, et al. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2003, 23(1): 13-18.
- [15] 王书强, 杨顶辉, 杨宽德. 弹性波方程的紧致差分方法 [J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2002, 42(8): 1128-1131.
Wang Shuqiang, Yang Dinghui, Yang Kuande. *Journal of Tsinghua University: Sci & Tech Edition*, 2002, 42(8): 1128-1131.
- [16] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, 103(1): 16-42.
- [17] Kim J W, Lee D J. Optimized compact finite difference schemes for computational acoustics[J]. *AIAA Journal*, 1996, 34(5): 887-893.
- [18] Abarbanel S S, Chertock A E. Strictly stability of high-order compact implicit finite-difference schemes: The role of boundary conditions for hyperbolic PDEs[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 160: 42-66.
- [19] 傅德熏, 马延文. 高精度差分格式及多尺度流场特性的数值模拟[J]. 空气动力学学报, 1998, 16(1): 24-35.
Fu Dexun, Ma Yanwen. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1998, 16(1): 24-35.
- [20] 王强, 傅德熏, 马延文. 超声速粘性剪切流空间稳定性对称紧致差分数值分析[J]. 空气动力学学报, 2000, 18(4): 434-440.
Wang Qiang, Fu Dexun, Ma Yanwen. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2000, 18(4): 434-440.
- [21] 柳占新, 黄其柏, 袁骥轩, 等. 计算气动声学中的紧致滤波格式[J]. 航空学报, 2009, 30(3): 403-410.
Liu Zhanxin, Huang Qibai, Yuan Jixuan, et al. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2009, 30(3): 403-410.
- [22] 李文强, 马民. 求解循环三对角方程组的追赶法 [J]. 科技导报, 2009, 27(14): 69-72.
Li Wenqiang, Ma Min. *Science and Technology Review*, 2009, 27(14): 69-72.
- [23] 李文强, 刘晓. 多项式拟合数值边界格式及其稳定性分析[J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2010, 38(1): 16-20.
Li Wenqiang, Liu Xiao. *Journal of Henan Normal University: Natural Science*, 2010, 38(1): 16-20.
- [24] 傅德熏, 马延文. 计算流体力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
Fu Dexun, Ma Yanwen. *Computational fluid dynamics* [M]. Beijing: High Education Press, 2002.
- [25] 柳占新, 黄其柏, 胡漂, 等. 计算气动声学中的高精度紧致差分格式研究[J]. 航空动力学报, 2009, 24(1): 83-90.
Liu Zhanxin, Huang Qibai, Hu Li, et al. *Journal of Aerospace Power*, 2009, 24(1): 83-90.
- [26] 陶文栓. 数值传热学 [M]. 2 版. 西安: 西安交通大学出版社, 2001: 503-505.
Tao Wenshuan. *Numerical heat transfer* [M]. 2nd ed. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2001: 503-505.
- [27] 石东洋. 数值计算方法[M]. 郑州: 郑州大学出版社, 2007: 103-111.
Shi Dongyang. *Numerical computation method* [M]. Zhengzhou: Zhengzhou University Press, 2007: 103-111.
- [28] Hu F Q, Hussanini M Y, Manthey Y J L. Low-dissipation and low-dispersion runge-kutta schemes for computational acoustics [J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 124(1): 177-191.

(责任编辑 马宇红, 代丽)

· 学术动态 ·



“全国第三届蔬菜规模化高效育苗技术 经验交流会”征文

由国家大宗蔬菜产业技术体系, 中国农村专业技术协会设施果蔬技术专业委员会, 中国园艺学会设施园艺分会, 中国农业科学院蔬菜花卉研究所, 武汉市农业科学院主办的“全国第三届蔬菜规模化高效育苗技术经验交流会”拟于 2012 年 3 月 20 日在武汉召开。

征文范围: 全国各地瓜菜工厂化育苗产业发展状况交流; 瓜菜工厂化育苗关键技术交流; 工厂化育苗高效模式经验交流; 工厂化育苗相关标准交流; 工厂化育苗相关产业技术(包括瓜菜新品种、育苗基质、育苗设施、育苗装备等新技术); 工厂化育苗节能技术经验交流; 工厂化育苗组织形式探索。

论文截止日期: 2012 年 2 月 20 日。

联系电话: 027-61815566。

通信地址: 武汉市黄陂区生态产业园维尔福种苗有限公司 (430345)。

电子信箱: wping0903@163.com。

大会网址: www.caas.net.cn/caasnew/ggfw/kyxx/58862.shtml。